



UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULTE DES LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

DEPARTEMENT DE LANGUES ET CULTURES AFRICAINES

CLASSE: BACCALAUREAT I

COURS DE LOGIQUE FORMELLE

(LCA1105)

Volume horaire: 45 h (Cours Magistral: 30 h; Travaux Dirigés: 15 h)

ENSEIGNANT: Pr NZIBAVUGA Viator

Année Académique 2024– 2025

Bujumbura, Mai, 2025

DESCRIPTIF ET CONTENU DU COURS

1. Objectifs du Cours de Logique Formelle

L'objectif général du cours de Logique Formelle est de faire découvrir aux étudiants *les méthodes de penser logique* (Ghocho, 1996:19) ou un mode de penser qui se veut cohérente et donc non sujette aux contradictions.

Les objectifs spécifiques de ce cours sont entre autres de :

- Etablir le lien entre la logique et d'autres disciplines;
- Faire connaître aux étudiants le symbolisme et les types d'opérations intellectuelles auxquelles fait recours la logique ainsi que les principales tautologies;
- Leur familiariser avec le calcul propositionnel et celui des formes normales.

2. Résultats attendus

A la fin du cours, l'étudiant devra être capable de :

- Traduire dans la langue formelle des expressions du langage usuel;
- Passer du langage symbolique au langage ordinaire;
- Evaluer une proposition ou un argument au moyen de la table de vérité ou par des Formes Normales (Gbocho, 1998).

3. Contenu du Cours

La Logique a pour objet les arguments. Elle a la tâche de dégager les principes qui permettent *de distinguer les bons arguments des mauvais*. Ceux-ci seront abordés d'un point de vue formel, c'est-à-dire sous leur trait de *schémas abstraits de raisonnement* et non point s'intéresser à leur contenu car cela revient à la logique informelle (Gbocho, 1996).

Il s'agira alors de découvrir les lois qui fondent la validité et faire une approche de *logique formelle* ou *logique symbolique*. Elle est appelée aussi *logique mathématique* du fait que d'un côté la rigueur atteint en ce domaine apparente à celle des mathématiques et que de l'autre côté les systèmes logiques sont construits au moyen d'expressions empruntées aux mathématiques.

Le domaine de la logique étant plus strict, il faudra *primo* définir quelques mots clés qui sont utilisés en vue d'éviter toute ambiguïté dans un tel domaine scientifique. Il s'agira *secundo* d'étudier le rapport de la logique avec des sciences connexes telles la grammaire, la morale, la psychologie, la physique et les mathématiques. *Tertio*, l'on passera à la logique des termes et à celle des

propositions avant d'aborder le calcul logique. *Quarto*, l'on étudiera les différentes tautologies, surtout les plus importantes dont les principes d'identité, de non-contradiction et du tiers-exclu et passer à toutes celles qui interviennent lorsqu'il s'agit de distribution, de simplification.

Quinto, il faudra passer au calcul des Formes Normales. Cette formulation sert à prouver qu'une même réalité peut être formulée de plusieurs manières. D'où il convient d'être flexible dans la manière d'être et de faire pour s'adapter aux conditions de vie mais tout en sauvegardant l'essentiel, c'est-à-dire ne pas se présenter dans les situations de l'existence sous la *dureté de l'os*.

4. Méthodologie

Le cours de Logique Formelle fait partie des Cours philosophiques des sciences et de la connaissance. Sous cet aspect, l'on ne perdra pas de vue que cette discipline doit améliorer nos dispositions de correctement argumenter, c'est-à-dire de cheminer la pensée à l'aide des preuves en démontrant ce qui est asserté pour convaincre l'auditoire, l'informer, etc.

Les méthodes d'**analyse** et de **critique** serviront de moyen d'action. Les étudiants suivront dans un premier temps l'exposé en présentiel la présentation de l'essentiel du cours et ils pourront réagir simultanément pour demander des éclaircissements. Dans un second temps, ils auront à mesurer leur niveau de compréhension en résolvant, en groupe constitués des exercices qui sont proposés dans ce support. Quelques cas à analyser et à calculer relèvent des expériences de la vie, ce qui témoigne que la Logique est justement pour la vie de l'homme.

5. Mode d'évaluation

Deux modes d'évaluations auront lieu dans le cadre de ce cours. Il sera fait d'une part une **évaluation continue** à la suite du déroulement du cours. Elle consistera à tester le degré de compréhension des étudiants de ce qui sera en train d'être exposé et surtout par la résolution des exercices de renforcement qui seront d'abord traités à domicile, dans le processus de révision individualisée et/ou collectivisée par groupes de 4 étudiants pour être par la suite corrigé ensemble en classe. D'autre part sera réalisée une **évaluation sommative** à la fin du cours pour examiner chaque étudiant quant à sa capacité de maîtrise de la matière apprise. Il sera question d'évaluer si les objectifs fixés ont été atteints.

TABLE DES MATIERES

DESCRIPTIF ET CONTENU DU COURS	1
1. Objectifs du Cours de Logique Formelle	1
2. Résultats attendus	1
3. Contenu du Cours	1
4. Méthodologie.....	2
5. Mode d'évaluation.....	2
TABLE DES MATIERES	3
INTRODUCTION	6
CHAPITRE 1. QUELQUES DEFINITIONS	9
1.1. Discours.....	9
1.2. Proposition.....	10
1.3. Notion de classe.....	11
1.4. Relation et prédication	11
1.5. Modalité.....	12
1.6. Formalisation	12
CHAPITRE 2. RAPPORT DE LA LOGIQUE AVEC D'AUTRES DISCIPLINES CONNEXES.....	13
2.1. Logique et Grammaire	13
2.2. Logique et Morale	13
2.3. Logique et psychologie	14
2.3.1. Le raisonnement déductif	15
2.3.2. Le raisonnement inductif	15
2.3.3. Le raisonnement par analogie.....	16
2.3.4. Le raisonnement par l'absurde	17
2.3.5. Le raisonnement hypothético-déductif	17
2.4. Logique et mathématique.....	17
2.5. Logique et physique	18
CHAPITRE 3. LOGIQUE DES TERMES	19
3.1. Définition	19
3.2. La copule <i>est</i>	19
3.3. Relations attributives	19
3.3.1. Relation essentielle et nécessaire.....	19
3.3.2. Relation non essentielle mais nécessaire	19
3.3.3. Relation ni essentielle ni nécessaire	19
3.4. Les prédicables.....	20
3.5. Les catégories.....	21

3.6. Caractères des termes	21
3.6.1. L'extension d'un terme	21
3.6.2. La compréhension d'un terme	21
4.1. Opérations sur les propositions	22
4.1.1. Oppositions.	23
4.1.2. Conversions	24
4.2. Le syllogisme	24
4.2.1. Les règles du syllogisme	27
4.2. 2. Les modes et figures du syllogisme	27
CHAPITRE 5. LE CALCUL LOGIQUE	30
5.1. Le recours au symbolisme	30
5.2. Le Vrai et la Faux	30
5.3. Atomes et molécules	30
5.4. Les connecteurs propositionnels	31
5.5. Inventaire et figuration des connecteurs propositionnels	31
5.5.1. La négation	31
5.5.2. La conjonction	32
5.5.3. La disjonction inclusive	32
5.5.4. La disjonction exclusive	32
5.5.5. L'implication	32
5.5.6. L'équivalence	33
5.5.7. L'incompatibilité	33
5.5.8. Le rejet	34
5.6. Les expressions bien formées (EBF)	35
5.6.1. Vérification d'un mot par fractionnement	36
5.6.2. Vérification d'un mot au moyen des tables de vérité	37
5.6.3. Vérification des arguments au moyen des tables de vérité	38
CHAPITRE 6. LA TAUTOLOGIE	40
6.1. Définition	40
6.2. Caractère de la tautologie	40
6.3. Les différentes EBF	41
6.4. Les trois grandes lois de la logique à double valeur	41
6.4.1. Le principe de non contradiction	41
6.4.2. Le principe d'identité	41
6.4.3. Le principe du tiers exclu	42
6.5. Les 16 opérateurs binaires	42

6.6. La réduction du nombre des opérateurs	43
6.7. Inventaire des principales tautologies	44
CHAPITRE 7. LE PROBLEME DE LA DECISION ET LES FORMES NORMALES	46
7.1. Sommes logiques	46
7.1.1. Définition.....	46
7.1.2. Propriétés de la disjonction continue	46
7.2. Produit logique.....	46
7.2.1. Définition.....	46
7.2.2. Propriétés de la conjonction continue	46
7.3. Formes normales d'une EBF.....	47
7.3.1. La forme normale disjonctive distinguée.....	47
7.3.2. La forme normale conjonctive distinguée	47
7.4. Méthodes de mise en formes normales	48
7.4.1. Théorème	48
7.4.2. Méthodologie de mise en formes normales	48
EXERCICES II.....	50
BIBLIOGRAPHIE	51

INTRODUCTION

La Logique Formelle est l'une des disciplines du domaine de la philosophie des sciences et de la connaissance. En tant que philosophie, celle-ci se veut être une réflexion explicite, analytique et systématique, c'est-à-dire rigoureusement ordonnée tel qu'il existe une cohérence entre tous les éléments pour constituer un tout: les éléments dans leurs diversités se soudent pour former ensemble une unité.

Ainsi, la nécessité d'une méthode permettant à déceler les désharmonies ou les incohérences dans nos raisonnements se trouve fondée. Cette science qui s'occupe de contrôler la rigueur de nos expressions, de vérifier la cohérence et la validité de nos raisonnements, et tout cela en vue d'éviter l'erreur est la **Logique**.

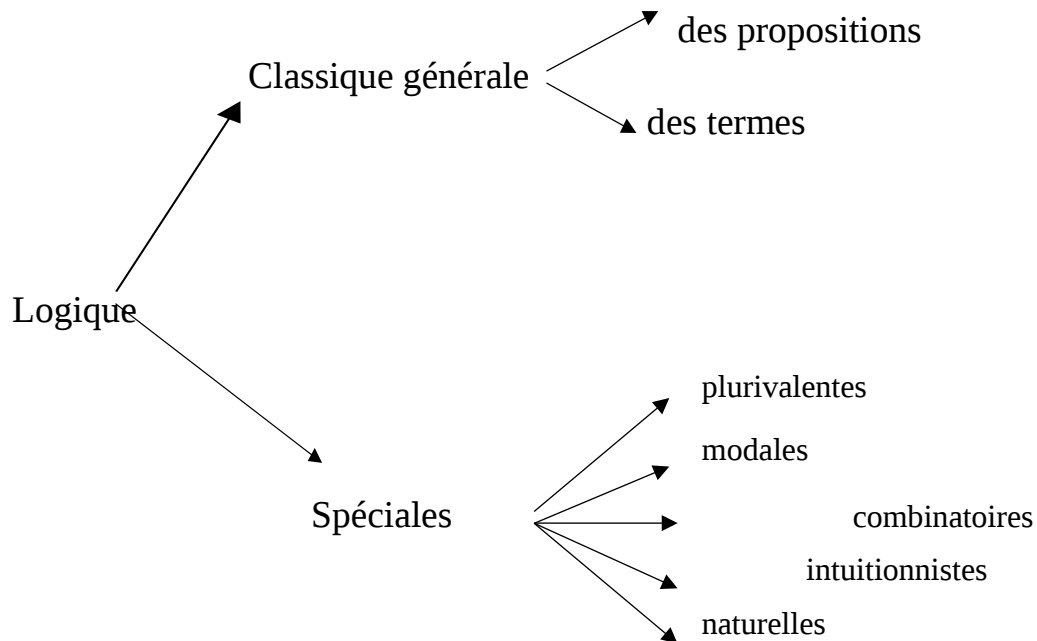
Etymologiquement, *Logique* vient du mot grec *logos* qui signifie *raison*. La Logique fait appel à ce qui est *raisonnable*. Elle est «un art de penser» cultivé «pour le secours qu'elle apporte aux autres sciences», en fournissant à «la spéculation ses instruments» (Verneaux, 1964: 52). La logique est une science normative car elle est une science des inférences formelles valides, c'est-à-dire conformes à des règles définies, et donc légitimes.

Cette science a été officiellement créée par l'Ecole d'Elée au 5^{ème} siècle avant J.C. chez les Grecs mais ce sont surtout Platon et Aristote qui lui ont donnée la forme que nous lui reconnaissons actuellement. En effet, chez Platon, la *Logique* était appelée *Dialectique*, c'est-à-dire l'art du dialogue ou de la discussion; un art fondé sur le refus de la contradiction. Chez Aristote¹, la *Logique* est appelée *Analytique*.

Aristote est le 1^{er} à avoir pensé la Logique comme une discipline autonome en tant que c'est lui qui a «dégagé et étudié pour elles-mêmes les lois logiques impliquées dans le raisonnement» (Roure, 1967:14) et il a développé la logique classique telle qu'elle était enseignée jusqu'au 20^{ème} siècle. La logique formelle contemporaine est parfois appelée *mathématique* d'une part à cause de son origine puisque ce sont des mathématiciens comme Boole, De Morgan et Peano qui l'ont élaborée et lui ont donné son fondement moderne.

D'autre part, dans son état actuel, la logique moderne se caractérise par des traits fondamentaux qui la rattachent aux mathématiques, à savoir l'usage d'un symbolisme artificiel et celui du formalisme. Cette logique formelle mathématique comprend d'un côté la logique classique et de l'autre côté les logiques spéciales.

¹ Ses œuvres logiques sont regroupées dans l'*Organon*, œuvre constituée des 5 livres que sont les *Catégories*; *De l'Interprétation*, *Les 1^{ères}* et *les Seconds Analytiques*, les *Topiques*, et *Les Réfutations sophistiques*. Dans *Les 1^{ères}* et *les Seconds Analytiques*, Aristote donne à sa logique une véritable tournure formelle. Il y développe la théorie du syllogisme. *Les 1^{ères} Analytiques* déterminent les formes du syllogisme et *les Seconds Analytiques* traitent de la démonstration.



Objet de la logique

La Logique a pour finalité de déterminer les règles qui servent à conduire les raisonnements vers la vérité. Elle détermine parmi toutes les opérations intellectuelles tendant à la connaissance du vrai lesquelles sont valides et lesquelles ne le sont pas. Son but est de parvenir à dégager les conditions d'une inférence valide, abstraction faite de l'établissement de la vérité ou de la fausseté intrinsèque ou matérielle des propositions. La Logique est donc née le jour où les hommes ont su que la validité n'était pas tributaire de la vérité et que la vérité ne suffisait pas à entraîner la validité.

«La Logique ou Dialectique, dira Epictète, a 3 utilités: elle peut seule nous apprendre à **discerner les représentations** raisonnables de celles qui ne le sont pas, à **appliquer nos prénotions** du bien et du mal aux cas particuliers et à **rester cohérents dans nos résolutions**» (Châtelet François, Sous la direction de, 1972: 141).

Diderot de son côté dira que:

«La logique est l'**art de penser juste**, ou de faire un usage légitime de sens ou de raison, de **s'assurer de la vérité des connaissances** qu'on a reçues, et de **démêler les erreurs de l'ignorance** ou les sophismes de l'intérêt et des passions: art sans lequel toutes les autres connaissances sont peut-être plus nuisibles qu'utiles à l'homme, qui en devient ridicule, sot ou méchant..»².

Quant à Schopenhauer (1912:1102), il tient la logique comme liée à d'autres disciplines qui lui sont proches même s'ils diffèrent au niveau du domaine d'application:

² Diderot, *Plan d'une université. Œuvres complètes*, Ed. Garnier, tome III, cité in LEIF J. et BIANCHERI A., *Philosophie de l'éducation. Les doctrines pédagogiques par les textes*, Librairie Delagrave, p. 179.

«La **logique**, la **dialectique** et la **rhétorique** se tiennent entre elles; car ensemble elles forment une technique de raison. C'est sous ce titre qu'on devrait les étudier simultanément, la logique (singulier) en tant que technique du penser proprement dit, la dialectique (duel) en tant que technique de la discussion avec autrui, et la rhétorique (pluriel) en tant que technique de la parole adressée à plusieurs».

La dialectique est l'art du dialogue tendant à la recherche en commun de la vérité; avec un caractère de la controverse, d'où la dialectique revient à cet art de discuter. En rhétorique par contre, la pensée devient mouvement par son dynamisme de façon que les figures rhétoriques ressemblent à ce qu'en logique sont les figures du syllogisme.

La validité de nos raisonnements compte en priorité pour cette logique qui utilise 3 opérations intellectuelles spécifiquement distinctes:

1. **L'appréhension:** c'est l'acte par lequel notre esprit saisit l'objet qui sert de support à la pensée. Ainsi, par cette opération, *«l'esprit se représente une ou plusieurs choses, sans en rien affirmer ou nier. Le résultat de l'appréhension est le concept qui s'exprime par un nom ou un terme du langage»* (Nève de Mévergnies, 1939: 17).
Ex: *umugabo, umunyeshure, inkoni*, etc.
2. **Le jugement:** il consiste à affirmer ou à nier un rapport entre 2 idées. Ce rapport peut être celui:
 - a. D'identité ou de non identité. Ex: *umwana w'ikinege*;
 - b. D'appartenance ou de non appartenance. Ex: *Idarapo ry'Uburundi*;
 - c. De convenance ou de non convenance. Ex: *Harageze kuruhuka*. *«Le jugement s'exprime par une proposition»* (Nève de Mévergnies, 1939: 17)
3. **Le raisonnement:** c'est l'opération par laquelle de 2 ou plusieurs jugements donnés, on tire un autre jugement qui en découle nécessairement; c'est-à-dire une *«combinaison de 2 ou plusieurs jugements, destinée à faire ressortir l'évidence d'un jugement nouveau. L'expression du raisonnement déductif c'est le syllogisme»* (Nève de Mévergnies, 1939: 17).
4. Il est envisageable de penser à une 4^{ème} opération qui ferait intervenir à la fois *«des raisonnements et des jugements relatifs à un même objet»*, de façon à former des sciences (Nève de Mévergnies, 1939: 17).

CHAPITRE 1. QUELQUES DEFINITIONS

Les notions dont fait usage la Logique ont considérablement évolué depuis le 19^{ème} siècle. Pour éviter toute ambiguïté dans un domaine si rigoureux, donnons la signification de quelques termes très courants.

1.1. Discours

Il y a langage toutes les fois qu'il y a possibilité de communication de message entre des individus. Le langage est une faculté dont le produit chez l'homme est la langue. Celle-ci est une expression matérialisée d'un message soit par la parole (=langue orale) soit par l'écriture (= langue écrite) soit par un système de signes muni de règles de combinaison (= langue formelle).

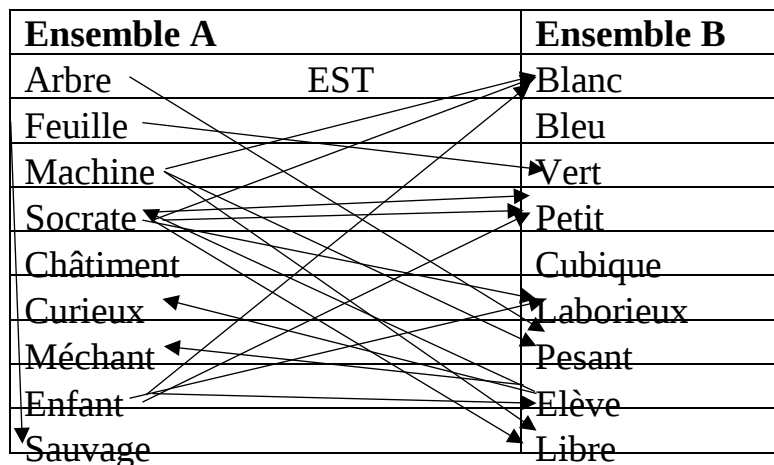
L'ensemble de tous les messages possibles est le *discours*. A l'intérieur de ce grand ensemble que constitue le discours, on peut singulariser divers discours particularisés: discours politiques (ou juridique, religieux, logique, etc.).

Une vision superficielle des choses conduit à penser qu'une langue se réduit à un ensemble de signes, c'est-à-dire à un vocabulaire, à un lexique.

Ensemble A	Ensemble B
Arbre	Blanc
Feuille	Bleu
Machine	Vert
Socrate	Petit
Châtiment	Cubique
Curieux	Laborieux
Méchant	Pesant
Enfant	Elève
Sauvage	Libre

La simple connaissance d'une liste de ce genre, même si on en comprend tous les termes ne constituent pas une langue. Tout au plus, on pourra articuler les sons correspondant au signe en voyant ou en imaginant l'objet ainsi désigné. Il y a langue lorsqu'on établit les relations entre des ensembles et des sous ensemble, en utilisant par exemple la copule *est*. On dira:

Homme *est* libre; Machine *est* cubique (bleue); feuille *est* verte; Socrate *est* libre; l'arbre *est* petit; etc. et l'on constitue ainsi des énoncés qui peuvent être complétés par quelques déterminations secondaires comme des mots grammaticaux (ex: l'avion *est* **une** machine) ou par des signes grammaticaux tel la marque du pluriel, le temps des verbes, etc.



Un discours particulier peut se réduire à un énoncé simple ou à des combinaisons plus ou moins complexes.

La langue étant un instrument de communication, elle a ses exigences: les combinaisons doivent respecter des règles d'un code admis conventionnellement par tous les membres du groupe parlant cette langue. Ces combinaisons doivent respecter les *règles de la syntaxe*.

Toutefois, un discours n'est pas seulement un énoncé respectant les lois d'une syntaxe. Au niveau de la communication, on exige du discours qu'il exprime quelque chose qui soit sensée, par exemple une perception, un sentiment, etc. Les 2 énoncés, *arbre est un homme* et *le boulanger est un homme*, sont corrects du point de vue des lois de la syntaxe mais personne ne pourrait les mettre sur un même plan du point de vue de la signification.

L'énoncé, *l'arbre est un homme*, est admissible syntaxiquement mais il ne l'est pas sémantiquement (sema=sens). D'où l'on doit concevoir à côté des règles de syntaxe des règles de signification dont l'ensemble constitue la sémantique.

1.2. Proposition

Le discours logique est composé de propositions que l'on désigne conventionnellement par des lettres minuscules en italique *p, q, r, s*, etc. La logique étudie l'art de combiner ces propositions. Cet art est le calcul propositionnel dont les bases ont été élaborées par Georges Boole (1815-1864) et approfondies par l'économiste britannique Stanley Jevons (1835-1882) et par l'américain Charles Sanders Peirce (1839-1914). Le calcul propositionnel a été proposé sous forme définitive par Ernest Schröder (1841-1902) lorsque les mathématiciens cherchaient à poser le fondement de leur cohérence et que le mathématicien allemand Frege (1848-1925) s'orienta vers l'instrument logique.

D'où, le traitement définitif de la logique des propositions dans ses rapports avec la logique des classes a été élaboré par Frege; le fondateur de la logique moderne³.

Pour faire de la logique propositionnelle, il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'il y a dans une proposition donnée. Il suffit de poser les 3 axiomes suivants:

- a. Il existe des propositions notées p, q, r, s , etc.
- b. A toute proposition est affectée une valeur logique: *vraie* ou *faux* dans les logiques courantes dites logiques à 2 valeurs ou logiques binaires ou encore employer un langage numérique et appeler 1 et 0 ces valeurs;
- c. Les combinaisons des propositions constituent elles-mêmes de nouvelles propositions.

Avant cette formalisation moderne de la logique, Aristote in *Organon* avait fait preuve d'une théorie de la proposition qu'il appelle jugement. Aristote part d'une analyse grammaticale du langage et appelle jugement tout énoncé reliant un sujet à son attribut (prédicat) au moyen de la copule *être* convenablement conjugué. Ex: Socrate (sujet) est (copule) un homme (prédicat).

1.3. Notion de classe

On appelle classe un ensemble d'objets ayant en commun une propriété caractéristique. Une classe est désignée par des lettres telles que x, y, z , etc.

Ex: *être étudiant de l'Université du Burundi*; *être habitant du Burundi*; etc.

Dans la logique aristotélicienne, les classes sont appelées termes. Un jugement aristotélicien relie donc un terme sujet (ex: Socrate) au terme attribut (ex: homme) par l'intermédiaire de la copule *est*.

1.4. Relation et prédication

Considérons x, y, z des variables individuels, c'est-à-dire ceux qui sont susceptibles d'être remplacés par des noms individuels (ex: Socrate, Joseph,...) et f , une propriété donnée.

Pour énoncer que x possède la propriété f , nous écrirons $f(x)$; c'est une autre manière d'énoncer un jugement. La prédication est le fait de relier un prédicat à un sujet.

Ex: x est Socrate; f est un homme; ce qui vaut $f(x)$: Socrate est un homme. Nous appelons f , le prédicat et x , l'argument de ce prédicat. Comme il n'y a qu'un seul argument applicable à f , ce *prédicat sera dit unaire*. Mais si on a 2 arguments x, y à appliquer au prédicat f , nous aurons la forme $f(x, y)$: celle-ci est une proposition qui contient les 2 arguments x, y et le prédicatif. Il s'agit d'un **prédicat binaire** (2 arguments), c'est-à-dire qu'il existe entre x, y une relation *binaire*.

³ Frege Gottlob. 1969. *Les fondements de l'arithmétique. Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*. Traduction et introduction de Claude Imbert, Editions du Seuil.

L'étude des relations binaires est particulièrement intéressante. C'est en déterminant leur propriété qu'on évite un certain nombre de faux raisonnements. Par exemple, on distingue les relations dans lesquelles l'ordre des arguments est indifférent et celles dans lesquelles il ne l'est pas. Les 1^{ères} sont dites *relations symétriques* (ex: Platon est concitoyen de Socrate= Socrate est concitoyen de Platon) et les secondes sont dites *relations asymétriques* (ex: Socrate est maître de Platon *distinct* de Platon est maître Socrate; Elysée est fils de Kamana). Une expression à 3 arguments introduit une *relation ternaire*. Ex: $f(x, y, z)$.

1.5. Modalité

En logique classique, la modalité d'une proposition est une détermination de la relation qu'elle exprime (Virieux Reymond, 1962:17). A ce titre:

- une *proposition peut être assertorique* lorsque la prédication est énoncée à titre de simple fait. Ex: Il fait beau: c'est une assertion, un simple fait.
- La *proposition peut être problématique* en cas de prédication possible ou impossible. Ex: Il se pourrait que je vienne en classe demain, ce n'est pas certain, je peux ne pas venir; certaines planètes sont peut-être habitées.
- Une *proposition peut être apodictique* ou *nécessaire* lorsqu'elle énonce une nécessité de fait. Ex: Tout ce qui est a une cause; Deux et deux font quatre; Toute vie est nécessairement un mélange de peine et de joie.

1.6. Formalisation

L'idée que la forme de nos jugements peut être analysée sans tenir compte de leur contenu est commune à tous les logiciens. La formalisation d'un système s'effectue à travers certaines techniques, à savoir:

- Etablir la listes de *symboles* nécessaires pour transcrire le système considéré;
- Enoncer des *règles de formation* permettant de construire, à l'aide de ces symboles, des expressions. Toute expression construite en respectant ces règles est dite une **expression bien formée (EBF)**;
- Enoncer un certain nombre d'expressions posées comme valables et qui sont les *axiomes* du système;
- Enoncer les *règles de dérivation* qui permettent d'obtenir d'autres propositions valables à partir des axiomes ou de toute expression dénotée comme valable, c'est-à-dire un *théorème*.

La formalisation de la logique a commencé au milieu du 19^{ème} siècle avec Georges Boole. Mais le système de symbole définitif est celui créé par Frege. La mise au point des symboles simple et universel a été entreprise par le mathématicien et philosophe italien Peano (1858-1932) et ses collaborateurs de l'université de Turin. Cette logique développée entretient des rapports avec d'autres sciences.

CHAPITRE 2. RAPPORT DE LA LOGIQUE AVEC D'AUTRES DISCIPLINES CONNEXES

La logique entretient des rapports avec d'autres disciplines qui se rapportent à l'homme et à la société selon qu'elles s'attachent à la culture en ses dimensions de langues, de littératures, d'éthique, de sciences, etc.

2.1. Logique et Grammaire

Tout comme le logicien, le grammairien s'occupe aussi bien des propositions que des termes. Toutefois, le grammairien étudie les normes qui régissent les différentes langues (français, anglais, kirundi, chinois, kiswahili, etc.) au moment où le logicien vise à atteindre, par-delà les langues diverses, les lois qui régissent la pensée.

Ainsi, une multiplicité de formes grammaticales peut traduire un seul rapport logique. C'est le cas du rapport causal qui peut être exprimé par:

- a. Une *subordonnée*. Ex. *Parce* qu'il est malade, il n'est pas venu au cours;
- b. Une *coordonnée*. Ex. Il n'est pas venu au cours, *car* il est malade;
- c. Une simple *juxtaposition*. Ex. Il n'est pas venu au cours; il est malade.

Par contre, un même terme exprime parfois 2 rapports logiques différents. Ex. le *ou* marque 2 rapports logiques différents, la disjonction inclusive et la disjonction exclusive (Virieux-Reymond, 1962:6).

D'un côté, le grammairien étudie toutes les formes de propositions, pourvu qu'elles aient un contenu non absurde, qu'elles soient optatives, interrogatives, conditionnelles ou constatives. De l'autre côté, le logicien ne considère comme proposition que celles qui traduisent une prise de position à l'égard du F et ne se préoccupe pas de propositions optatives telles que: « *Pourvu qu'il me marie!* » ou interrogative telle que: « *Pleut-il ?* » car ces énoncés ne sont ni V ni F.

C'est dire qu'il y a des catégories grammaticales sans équivalent logique possible comme le genre et là où une correspondance semblerait s'établir, elle est illusoire et dangereuse.

2.2. Logique et Morale

La logique classique peut être comparée à la morale car toutes les 2 sont bivalentes et normatives. Les valeurs morales sont *Bien* et *Mal*; la norme morale: le *Bien*. Les valeurs logiques: *Vrai* et *Faux*; la norme logique: le *Vrai*.

« *Lorsque Socrate a déclaré que nul n'était méchant volontairement et qu'il suffisait de savoir ce qu'était le Bien pour le pratiquer, il a indiqué*

un 1^{er} lien entre la logique et la morale: pour pratiquer une vertu, la 1^{ère} condition est d'en connaître le concept.

De plus, pour exprimer ses jugements, le moraliste doit respecter les principes de la logique et ne pas substituer à un concept l'opposé du sens reçu. A son tour, le logicien doit posséder des qualités morales, honnêteté, franchise, ... » (Virieux-Raymond, 1962: 7).

2.3. Logique et psychologie

La logique, comme la psychologie étudie la pensée et elles ne diffèrent que quant à leurs domaines et leurs tâches.

En effet, la psychologie, en tant que science décrit notre vie intérieure: plaisirs, émotions, sensations, passions, images, idées, souvenirs, inventions, rêves. Elle investit aussi sur la vie psychique des malades mentaux, des animaux ou tout autre corps doté d'une vie consciente. La psychologie peut considérer de simples onomatopées, des exclamations en tant qu'elles traduisent un état d'âme. Ex: exclamation: Oohh! Intéresse la psychologie car elle indique un état d'âme mais la logique ne s'occupera de cette exclamation qu'au moment où elle est susceptible de valeur de vérité, c'est-à-dire quand elle peut être transformée en jugement Vrai ou Faux. Ex. Il est V (ou F) que je construis une maison.

Ainsi, la logique se préoccupe de la vie de la pensée au point de vue des valeurs de vérité des propositions; elle porte sur les conditions de droit qui constituent et dominent la pensée valable tandis que la psychologie tient à définir les conditions d'existence des faits psychiques (Virieux-Raymond, 1962).

La logique générale tient compte d'une part de la structure formelle des jugements et des raisonnements, et d'autre part, du contenu des propositions.

Cependant, à la suite de la spécialisation dans le domaine de la pensée, la logique s'est scindée en *logique formelle* et en *logique appliquée*. Celle-ci s'applique à l'étude des méthodes employées par les sciences.

En effet, dans toute proposition peut être distinguée la **forme** et le **contenu**.

Sa forme se rapporte à sa structure: elle est semblable pour toutes les propositions de même genre. Ex. dans la logique classique, la structure de tout jugement prédicatif est: A est B; dans un jugement attributif, on remplace A par « tout homme » et B par « mortel »; on aura: *Tout homme est mortel*.

Quant au contenu ou matière de la proposition, il enrichit en information. Ex. pour le jugement: « Tout homme est mortel », on donne de ce fait un renseignement sur la nature humaine et ce renseignement est le contenu de la proposition. Toutefois, la logique formelle ne s'intéresse pas au contenu des propositions; elle n'étudie que leur structure formelle.

Dans un tel cas, la logique et la psychologie s'intéressent à l'étude de différents types de raisonnements. La psychologie décrit comment l'esprit fonctionne en raisonnant et la logique étudie les divers types de raisonnements du point de vue de leur validité pour établir le vrai.

Ces raisonnements sont de différents types, à savoir: le raisonnement déductif; le raisonnement inductif; le raisonnement par l'analogie; le raisonnement par l'absurde et le raisonnement hypothético-déductif (Virieux-Raymond, 1962: 10).

2.3.1. Le raisonnement déductif

Il permet de passer du général au particulier, de la loi à l'application. Mais les mathématiques sont toujours générales. Ainsi, le raisonnement déductif se définit essentiellement par son caractère de nécessité logique qui, unissant plusieurs jugements entre eux, passe d'un jugement à un autre (Virieux-Raymond, 1962: 10). On a 3 types de raisonnements déductifs:

a. La déduction immédiate

Elle comporte 2 jugements attributifs tels que l'un étant posé (la prémisse), l'autre (la conclusion) en découle nécessairement et sans intermédiaire. Ex. Tous les triangles sont des polygones (prémisse); donc, quelques polygones sont des triangles (conclusion).

b. La déduction syllogistique, médiate

Elle est formée de 3 jugements dont les deux 1^{ers} (prémisses) servent de base au 3^{ème} (conclusion). Ex. Tous les triangles n'ont que 3 angles. Cette figure n'a que 3 angles. Donc, cette figure est un triangle.

c. La déduction mathématique

Elle procède par substitution des grandeurs équivalentes à d'autres grandeurs et recourt à des jugements de relation (Virieux-Raymond, 1962: 11).

$$\text{Ex. } y(a-b) + b^2 = a^2$$

$$y(a-b) = a^2 - b^2$$

$$y = (a^2 - b^2) / (a-b)$$

$$y = a + b$$

2.3.2. Le raisonnement inductif

a. L'induction formelle (Voir Aristote)

Elle consiste à dénombrer tous les individus définis par la possession d'une même propriété, et si réellement ils possèdent tous, pris individuellement, cette même propriété, c'est que cet ensemble d'individus la possède.

Ex. Les végétaux, les animaux et les hommes respirent; les végétaux, les animaux et les hommes sont tous des êtres vivants; donc tous les êtres vivants respirent.

b. L'induction amplifiante.

Plusieurs sciences expérimentales recourent à l'induction, au sens courant du terme, ou induction amplifiante. Dans ce cas, le raisonnement inductif consiste à généraliser, à l'ensemble des cas semblables, un fait observé ou expérimenté dans un certain nombre de cas. Mais alors, qu'est ce qui montre que ce qui s'est prouvé jusqu'ici positif restera tel jusqu'à l'infini ? Le problème du fondement de l'induction se pose dans ce cas car *«comment et de quel droit conclure plus- et presque toujours infiniment plus- que l'on n'a observé»*⁴?

Cependant, si les sciences expérimentales recourent à un tel procédé de raisonnement, c'est parce qu'il est, implicitement admis dans le raisonnement inductif, une hypothèse métaphysique, généralement vérifiée, sur l'uniformité des lois de la nature. Et cette hypothèse s'énonce sous forme de proposition universelle. Le raisonnement inductif est donc lié, étroitement à un processus hypothético-déductif, dont on ne le sépare qu'artificiellement. Sur base de l'uniformité des lois de la nature, on part de:

Quelques A sont B, pour conclure jusqu'à plus ample informé, que:
Tous les A sont B.

c. L'induction complète ou raisonnement par récurrence.

Ce raisonnement consiste à étendre, à tous les cas les propriétés arithmétiques ou algébriques vérifiées pour un seul cas (Virieux-Raymond, 1962: 13).

2.3.3. Le raisonnement par analogie

Il consiste *«à conclure de l'existence de certaines ressemblances constatées entre 2 objets à l'existence d'autres ressemblances. Ex. Un chien m'a mordu une fois, j'en ai gardé un souvenir douloureux. Prochainement, si je rencontre un autre chien, même s'il est pacifique, par un raisonnement analogique, je prendrai peur et, selon mon caractère, je m'enfuirai ou je prendrai un bâton»*.

Ce type *«de raisonnement, précieux pour imaginer des hypothèses, n'est pas sûr en ce qu'il peut induire en erreur comme quand nous n'atteignons que des ressemblances superficielles»* (Virieux-Raymond, 1962: 13). Ex. Quand du fait que la baleine vit dans l'eau, on tire la conclusion qu'elle est un poisson. Mais dans les analogies profondes, le raisonnement par analogie peut avoir une valeur réelle. Ex. En étudiant les *«phénomènes d'aimantation»*, Newton conclut, par un raisonnement analogique, *«à l'attraction universelle»*.

⁴ LALANDE André 1929. *Les théories de l'induction et de l'expérimentation*. Paris: Boivin. P. 6 et 15

2.3.4. Le raisonnement par l'absurde

Il est utilisé toutes les fois où il est impossible de démontrer directement la vérité d'un raisonnement, comme en mathématiques lorsqu'on démontre directement un théorème. Quand on démontre,

«On part d'une proposition qui est la négation du théorème et l'on en déduit les conséquences qui se trouvent être absurdes en elles-mêmes, ou bien en contradiction avec un théorème précédemment établi. Il en résulte que la négation du théorème, point de départ de la déduction, est fausse puisqu'elle a donné une conclusion fausse. Le théorème est donc vrai en vertu du principe de non-contradiction; il a été démontré indirectement»⁵, par la fausseté de sa négation.

2.3.5. Le raisonnement hypothético-déductif

C'est un raisonnement déductif qui, au lieu de prendre comme prémisse une proposition catégorique note le caractère hypothétique de son point de départ en adoptant comme prémisse une proposition introduite par **si**, et le fait suivre d'une déduction (Virieux-Raymond, 1962: 15).

Le caractère hypothético-déductif appartient aussi bien au raisonnement qui établit les faits pour en déduire les lois qu'à celui qui applique les lois aux faits, puisque l'induction repose, comme la déduction, sur l'hypothèse de l'uniformité des lois de la nature, qui garantit aussi bien l'application des lois aux faits que le passage inverse, et cela jusqu'à plus ample informé.

2.4. Logique et mathématique

Jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, la logique et les mathématiques étaient des disciplines séparées. C'est en 1847, avec Boole et Morgan, que ces 2 disciplines se rapprochent. A ce titre, Meigne (1964: 115) souligne les positions respectives de la logique moderne et les mathématiques:

«La logique traditionnelle traite les concepts comme des absolus. La logique moderne, fondée sur le calcul des propositions, renvoie l'absolu sur les propositions élémentaires, regardées comme indépendantes les unes des autres et immuables au cours des opérations logiques. Dans les mathématiques, les êtres n'ont d'existence que s'ils ont été conçus dans une théorie et ne reçoivent leurs déterminations précises qu'en relation avec telle théorie. Nos théories ne sont point constituées d'être absolus, indépendants du milieu théorique dans lequel ils sont plongés. En sorte que la relation à la théorie, des êtres (objets et propriétés) des concepts essentiels d'équivalence, de compatibilité ou de contradiction, ainsi que celle des démonstrations de propriétés, oblige à reporter l'absolu sur la théorie. Cette obligation définit le primat de la théorie sur tous ses éléments constitutants».

⁵ GEX Maurice. *Méthodologie*, p. 70

2.5. Logique et physique

Dans la mesure où l'on conçoit que le vrai est, sinon totalement, du moins partiellement, défini par l'accord entre la pensée et le réel, il y a imbrication de la logique et de la physique, mais cette imbrication se présente différemment selon que l'on envisage les rapports de la logique avec la physique qualitative (qui a régné à partir d'Aristote jusqu'à l'avènement de la science moderne), ou bien avec la physique quantitative classique, dont les lois restent valables en macrophysique ou encore avec la microphysique (Virieux-Raymond, 1962: 24).

La physique classique reposait sur un déterminisme explicite. Ses origines remontent à la conception cartésienne que l'univers est une machine où tout se fait par figure et par mouvement, grâce à un mécanisme expérimentable mathématiquement. Suivant cette conception, l'on peut connaître exactement les conditions initiales des phénomènes et leur appliquer strictement les lois qui les concernent. Par contre, les théories récentes de la microphysique affirment que l'on ne peut pas connaître les conditions initiales d'un phénomène.

Alors que, pour la physique classique il était admis que le monde des phénomènes physiques existait objectivement, les théories modernes se demandent jusqu'à quel point ces phénomènes existent en dehors de la connaissance que le physicien en prend. Ces théories soulignent l'importance tant au niveau des démarches de la pensée du physicien qui élabore des hypothèses qu'au niveau des démarches matérielles opérées par le physicien au cours des opérations de mesure (Virieux-Raymond, 1962: 25).

Ainsi, la microphysique érige des lois à caractères statiques. Dans un tel cas, la logique s'adapte au domaine d'investigation où elle est utilisée et chaque catégorie de physique exige l'utilisation d'une logique adéquate⁶. Ex. La logique classique (bivalente) s'appliquera à la mécanique classique; la logique de complémentarité et de subjectivité s'appliquera à la mécanique ondulatoire. Mais il convient de se poser une question:

«Dans la mesure où nous utilisons notre raison pour penser la mécanique classique, la présence de la logique bivalente et normative n'est-elle pas supposée, puisque, dans un cas comme dans l'autre, nous recherchons le Vrai à l'exclusion du Faux, recherche qui dénote la bivalence et la normativité de la logique» (VIRIEUX-Raymond, 1962: 26-27)?

Ainsi, dans le choix entre les différents types de logique, il faut nécessairement faire intervenir le *principe du tiers exclu* de la logique classique pour éliminer les types de logiques non retenus.

⁶ DESTOUCHES- FEURIER, 1951. *La structure des théories physiques*. Paris: PUF.

CHAPITRE 3. LOGIQUE DES TERMES

La logique des termes s'observe notamment chez Aristote. En effet, l'attention qu'Aristote a portée aux termes et à leur liaison dans le jugement relève de la logique des classes. Il s'agit de la logique ancienne.

3.1. Définition

Pour Aristote, le terme est l'élément minimal de signification. Enoncer un terme revient à formuler une idée. Le terme est ce dont on affirme quelque chose (sujet) ou ce que l'on affirme de quelque chose (prédicat). Ainsi, les termes sont des éléments constitutifs d'une attribution. Autrement-dit, les termes sont des mots désignant des classes d'objets ou encore des ensembles au sens des collections.

3.2. La copule est

Un terme est attribué à un autre par l'intermédiaire de la copule *est*. Celle-ci peut avoir 2 significations différentes:

- a. Elle signifie *l'existence* dans les attributions de type *S est*.
- b. Elle signifie *l'inhérence* de P dans S dans les attributions de type *S est P*. La logique s'intéresse à la 2^{ème} signification car l'autre est une évidence.

3.3. Relations attributives

Il peut y avoir 3 sortes de relations entre le prédicat et le sujet:

3.3.1. Relation essentielle et nécessaire

Cette relation a lieu quand l'inhérence de P dans S définit S de façon essentielle et nécessaire. Ex. *l'homme est un animal*.

Essence: le sujet homme est défini par ce qui constitue son essence même.

Nécessité: l'homme ne peut pas ne pas être animal, aussi raisonnable soit-il.

3.3.2. Relation non essentielle mais nécessaire

Cette relation a lieu quand l'inhérence de P dans S est non essentielle, mais nécessaire. Ex. *l'homme est capable de rire*.

Non essentiel: le sujet *homme* n'est pas défini par *capacité de rire* car l'homme peut ne pas être en train de rire; il ne rit que quelques fois.

Nécessité: l'homme ne peut pas ne pas avoir la *capacité de rire*.

3.3.3. Relation ni essentielle ni nécessaire

Cette relation a lieu lorsque l'inhérence de P dans S est à la fois *accidentelle* et *contingente*, c'est-à-dire qu'elle appartient à la définition de S et S peut ne pas en être revêtu. Ex. *l'homme est noir*.

Ainsi, les énoncés attributifs peuvent être classés en 3 groupes selon 3 genres de relation entre le prédicat et le sujet.

Selon Philippe Thiry (2004:87), Kant admet « 3 types de jugements: logique, empirique et métaphysique.

- Les jugements logiques ou analytiques ou tautologies énoncent un prédicat qui est déjà pensé dans le sujet: « le triangle a trois côtés », « l'homme est un être pensant ». Le prédicat ne nous apprend rien sur le sujet d'où le nom de jugements tautologiques.... Ces jugements sont *a priori* c'est-à-dire indépendants de toute expérience sensible et leur légitimité relève du **principe de non-contradiction**...
- Les jugements empiriques ou synthétiques *a posteriori*. Ils sont synthétiques parce qu'ils opèrent une synthèse entre le prédicat et le sujet, ce qui signifie que le prédicat apporte une nouvelle information sur le sujet; ils sont *a posteriori* parce que cette nouvelle information est obtenue après l'expérience d'où le nom de jugements empiriques: « La table est verte », « Le chien dort ».
- Les jugements synthétiques *a priori* ou métaphysiques. Le jugement apporte une information nouvelle (synthétique) indépendamment de toute expérience sensible (*a priori*). Ex: jugement mathématique « $7+5=12$ »; jugement géométrique « la somme des angles d'un triangle = 180° »; jugement physique « tout événement a une cause ». C'est dire que le mathématicien est un métaphysicien qui s'ignore.

Kant classifie les arguments ainsi:

La relation est		L'énoncé s'appelle
Essentielle	Nécessaire	analytique
+	+	
-	+	Synthétique <i>a priori</i>
-	-	empirique

3.4. Les prédicables

On a 5 classes de prédicats applicables à un sujet. Un prédicat peut indiquer soit l'essence du sujet soit une partie seulement de cette essence soit un caractère qui n'entre pas dans l'essence, ce qui donne lieu à 5 classes:

- a. Si le prédicat contient l'essence du sujet, il indique *l'Espèce*. Ex. *Homme* dans *Socrate est un homme*;
- b. Si le prédicat est une partie de l'essence du sujet, 2 possibilités se présentent:
 - Si cette partie est commune à d'autres espèces, c'est le *Genre*. Ex. *Animal* dans *Socrate est un animal*;
 - Si cette partie est propre à l'espèce et la distingue de toute autre, c'est la *Différence spécifique*. Ex. *Raisonné* dans *Socrate est raisonnable*.
- c. Si le prédicat est un caractère qui n'entre pas dans l'essence du sujet, 2 possibilités se présentent:
 - Si le caractère découle nécessairement de l'essence, c'est le *Propre*. Ex. *capable de rire* dans *Socrate est capable de rire*;

- Si le caractère ne découle pas nécessairement de l'essence, c'est *l'accident*.
Ex. *noir* dans *Tolé* est *noir*.

Ces 5 classes s'ordonnent suivant leur généralité décroissante: le Genre, l'Espèce, la Différence spécifique, le Propre, l'Accident. Tout prédicat se range dans l'une de ces 5 classes.

3.5. Les catégories

Quand on parle de la relation entre le Sujet et le Prédicat en se situant du côté du *Sujet*, on parlera de *catégories*. Celles-ci sont les différentes déterminations qu'un prédicat peut apporter à un sujet ou les différentes classes de prédicats que l'on peut affirmer d'un sujet quelconque. Il y en a 10⁷:

- a. **La substance:** « *l'être subsistant en soi, qui n'a point son être dans un autre, et en qui résident les accidents* » (Nève de Mévergnies, 1939: 24). Ex. homme;
- b. **9 espèces d'accidents:** la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, la position, la tenue, l'action, la passion.

3.6. Caractères des termes

Deux caractères s'observent chez les termes: l'*extension* et la *compréhension*.

3.6.1. L'extension d'un terme

Elle décrit la grandeur de la collection correspondante. On distingue des :

- a. *Termes singuliers*: Ce sont les termes dont l'extension est égale à l'unité. Ex. *Umwana w'ikinege*;
- b. *Termes multiples et finis*; ex. *Afise abana bane*;
- c. *Termes indéfinis*, c'est-à-dire des termes dont l'extension est égale à un nombre entier non connaissable. Ex. *Une foule* de gens; des *milliers* de personnes; *ikiguri* c'intozi; *umugina* w'iswa, etc.

Ainsi, le terme *Socrate* est *singulier*; le terme *planète* est *multiple et fini*; le terme *grain de sable* est *indéfini*; le terme *nombre entier* est *infini*. Le terme de plus grande extension possible, c'est le terme *être*: il s'étend à tout ce qui existe.

3.6.2. La compréhension d'un terme

C'est l'ensemble de tous les caractères communs à tous les individus appartenant à la classe désignée par le terme.

Plus l'extension d'un terme est grande, plus sa compréhension est petite et inversement. Ainsi, l'extension et la compréhension d'un terme varient en raison inverse l'une de l'autre. Ex. *être*: grande extension, c'est-à-dire la définition de l'*être* est plus difficile, *être* est d'une compréhension très réduite. Toutefois, la logique aristotélicienne ne se réduit pas à la logique des termes. Il est question aussi des propositions.

⁷ Kant Emmanuel, 1986. *Critique de la raison pure*. Traduit par Tremesaygues A. et Pacaud B., p. 94

CHAPITRE 4. LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Définition

«Une proposition est un énoncé déclaratif susceptible de vérité ou de fausseté» (Salem, 1987: 11). Ainsi, les propositions sont des énoncés mais ceux-ci ne sont pas tous des propositions. Ex. *Il pleut*: proposition; *Lève-toi et marche*: énoncé et non une proposition car il n'est pas déclaratif et l'on ne peut pas lui attribuer une valeur de vérité ou de fausseté.

Selon Aristote, une proposition possède 2 propriétés principales: la qualité et la quantité. La qualité d'une proposition, c'est d'être affirmative ou négative. La quantité d'une proposition, c'est le fait d'être universel ou particulier. En combinant ces 2 caractères, on obtient 4 types de propositions possibles:

- Universelle et **affirmative**. Ex. Tous les oiseaux sont des animaux;
- Universelle **négative**. Ex Tout ce qui brille n'est pas de l'or;
- Particulière et **affirmative**. Ex. Ma classe est nombreuse;
- Particulière **négative**: Mes chaussures ne sont pas neuves.

Ces propositions ont été désignées depuis le Moyen-Âge par les lettres: **A, E, I, O**

A: Universelle et **affirmative**; on dit aussi proposition en **A**;

E: Universelle **négative**; proposition en **E**;

I: Particulière **affirmative**; proposition en **I**;

O: Particulière **négative**; proposition en **O**.

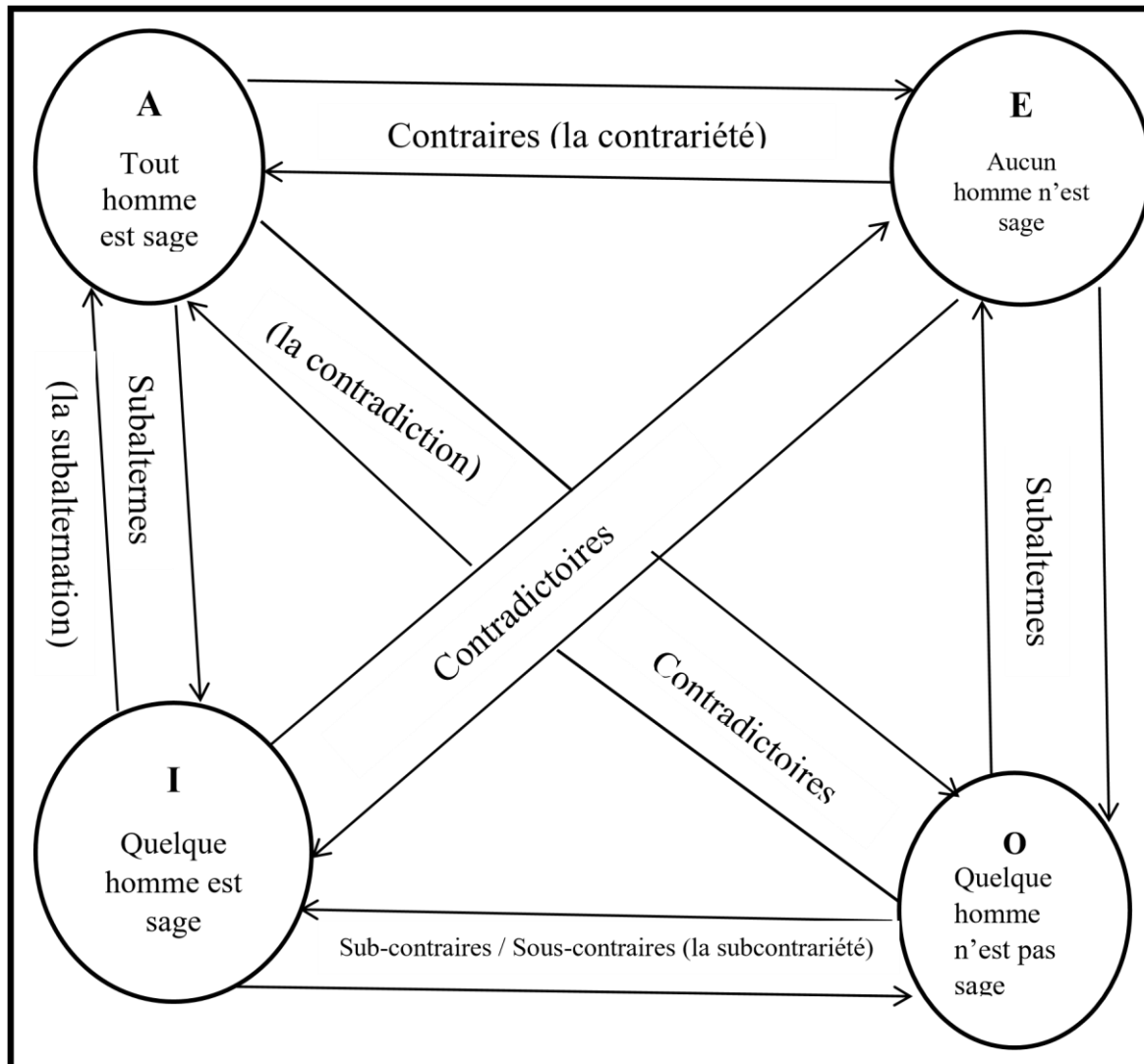
La logique s'occupe uniquement des seuls énoncés au sujet desquels on peut se prononcer en termes de Vrai ou de Faux, c'est-à-dire des propositions auxquelles on peut attribuer la valeur de vérité. La logique formelle enseigne qu'il faut éviter de confondre la validité d'un raisonnement avec la vérité matérielle des propositions qui composent ce raisonnement.

« La validité ou l'invalidité d'un raisonnement dépend...uniquement de sa forme: elle est indépendante du contenu des propositions qui le composent et, par suite, de leur vérité ou de leur fausseté; les propositions peuvent être vraies ou fausses; le raisonnement ne peut être que valide ou invalide » (ROURE, 1967: 4) En effet, certaines opérations sont faites sur les propositions.

4.1. Opérations sur les propositions

Au Moyen-Âge, des philosophes avaient résumé l'ensemble des relations entre les propositions dans un graphique rectangulaire appelé *le carré logique*. Celui-ci est un graphique qui représente l'ensemble des relations inférentielles entre les propositions. Ce carré résume les différents types d'oppositions (Virieux Raymond, 1962: 43).

Le carré logique



Les opérations possibles sur les propositions sont les **oppositions** et les **conversions**.

4.1.1. Oppositions.

On obtient l'opposition d'une proposition en changeant la qualité de celle-ci et en niant le prédicat. Il existe ainsi 4 types d'oppositions:

- Contradictaires**: L'opposition de *contrariété* existe entre 2 propositions qui diffèrent à la fois par la quantité et par la qualité, avec un même sujet et un même prédicat. Lorsque l'une est universelle, l'autre est particulière; quand l'une est affirmative, l'autre est négative.
- Contraires**: La *contrariété* est entre des propositions qui ne diffèrent que par la qualité. Si l'une est affirmative, l'autre est négative. Selon que la

quantité commune est universelle ou particulière, les jugements sont contraires ou sous-contraires.

- c. **Subalternes:** *La subalternation* existe lorsqu'on passe d'une proposition en A ou en E vers une proposition en I ou en O. Les 2 jugements ayant même sujet et même prédicat différent seulement par la quantité: l'un est universel, l'autre est particulier.
- d. **Sous contraires:** *La sub-contrariété* est l'opposition entre des propositions en I et en O.

4.1.2. Conversions

On obtient la conversion d'une proposition en inversant le sujet et le prédicat pour les nier ensuite tous les deux. Ainsi, la conversion est possible sans modification de la quantité ou de la qualité d'une proposition à partir des propositions en E ou en I. Si la proposition de départ est en A, la converse est en I. Dans le cas d'une proposition en O, on la remplace par une proposition indéfinie en I sur laquelle on fait une conversion simple. Ex. *Tout carré (S) est rectangle(P)*.

Il est possible de construire une autre proposition en intervertissant le sujet et le prédicat. On aura: *Quelques rectangles (S) sont carrés(P)*. Cette opération réalisée s'appelle *une conversion par accident*.

En cas d'une proposition en I, on la transforme en une proposition en O. Ex. *Quelques étudiants ne sont pas présents en classe*. On aura: *Quelques étudiants sont présents en classe*.

L'opération ainsi faite s'appelle la *conversion* ou la *contraposition*.

4.2. Le syllogisme

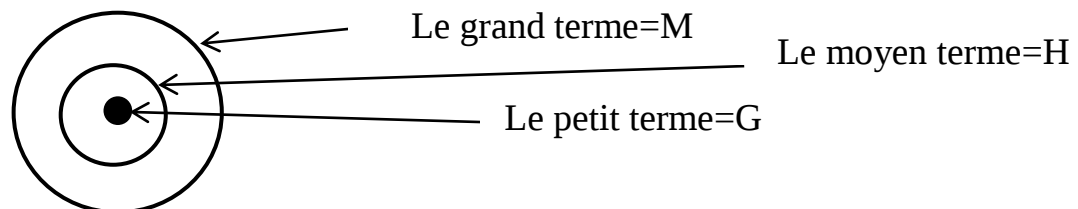
Le syllogisme est un raisonnement dans lequel, après avoir comparé successivement 2 termes à un même 3^{ème}, on énonce, conformément au résultat de cette double comparaison, que les 2 premiers termes se conviennent ou ne se conviennent pas. Aristote dit que le syllogisme « *est un discours dans lequel certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données* » en résulte nécessairement.

Le syllogisme est un raisonnement qui, à partir de propositions données (prémisses), établit une conclusion nécessaire, sans recourir à d'autres éléments que les données de départ. Autrement-dit, **le syllogisme est un type de raisonnement qui permet de mettre en rapport dans une conclusion deux termes, le majeur et le mineur, à l'aide d'un moyen terme.** Le syllogisme comprend 3 termes d'inégales extensions et 3 propositions. Les 2 termes que l'on compare à un même 3^{ème} s'appellent les extrêmes. *Le grand extrême* (terme), c'est-à-dire le terme le plus étendu, se retrouve dans la prémisse majeure, il est le

prédicat de la proposition qui doit être la conclusion. Le terme dont l'extension est petite est le petit extrême (terme), il est sujet de la conclusion. Le terme dont l'extension est intermédiaire est le moyen extrême (terme), c'est lui dont on compare les 2 autres.

Le syllogisme est figuré par le *diagramme de l'Euler*.

Diagramme de l'Euler



Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse représentait les raisonnements syllogistiques par des diagrammes. Ex: le syllogisme Barbara:

Les hommes sont **mortels**;

Les grecs sont des **hommes**;

Les **grecs** sont mortels (Thiry, 2004:165).

Des 3 propositions que comprennent le syllogisme, les 2 premières sont appelées les *prémisses* (antécédents) du syllogisme: ce sont les propositions dans lesquelles on établit une comparaison entre les termes. La proposition dans laquelle on compare le grand extrême (terme) au terme moyen est la **prémisse majeure**. La prémisse qui contient le petit terme est la **prémisse mineure**. Les 2 prémisses constituent l'**antécédent** du syllogisme. La 3^{ème} proposition énonce un rapport d'inclusion ou d'exclusion entre le grand terme et le petit terme. Il est le **conséquent** ou la **conclusion** du syllogisme.

On appelle **matière du syllogisme** les prémisses et la conclusion, et la forme du syllogisme est le lien qui gît entre les prémisses et la conclusion. Ce lien confère au syllogisme sa valeur démonstrative et s'exprime par la particule donc appelée la conséquence du syllogisme.

Ex.

Antécédents ou prémisses	Majeure	Tout <i>bien</i>	terme moyen
		est <i>aimable</i>	grand terme
	Mineure	Or la <i>vertu</i>	petit terme
		est un <i>bien</i>	terme moyen
Conséquent	Conclusion	Donc la <i>vertu</i>	petit terme
		est <i>aimable</i>	grand terme

Le syllogisme a une valeur démonstrative car elle rattache une proposition moins connue à des prémisses mieux connues. C'est à ce titre que Schopenhauer (1912: 1110) définit le syllogisme ainsi:

« Le syllogisme est une opération qui, de 2 jugements, par leur simple comparaison et sans recours d'aucune autre connaissance, on tire un 3^{ème}, avec cette condition que les 2 jugements en question doivent avoir un concept qui leur soit commun, sans quoi ils seraient étrangers l'un à l'autre et sans point de contact »

Il peut arriver que les 3 propositions constitutives du syllogisme ne soient pas officiellement visibles.

C'est le cas d'un **enthymème**: C'est un syllogisme où l'une des prémisses est sous-entendue; quant à l'**épichérème**, il s'agit d'un syllogisme où l'une des prémisses ou les 2 sont suivies de leurs preuves selon le schéma suivant: A car...; Or B car...; Donc C car...; Un **sorite** est un **polysyllogisme** qui entraîne plusieurs syllogismes de manière que la conclusion du 1^{er} serve de prémisses au suivant, et ainsi de suite. Ex. Tout A est B, or B est C et tout A est C, mais tout C est D et tout D est E et donc tout C est E.

Le syllogisme nous permet de passer d'une connaissance latente à une connaissance claire et nette. La vérité était implicite dans les prémisses, elle est explicite dans la conclusion.

Ex. Tous les diamants sont des pierres;
Tous les diamants sont combustibles;
Donc, quelques pierres sont combustibles (Schopenhauer, 1912: 1110).

Ces prémisses sont ou bien évidentes par elles-mêmes ou doivent être démontrées. Mais la démonstration ne peut être que circulaire, c'est-à-dire qu'elle ne peut consister que dans une justification mutuelle des 2 propositions, car alors, on aboutirait à cette contradiction que chacune de celles-ci est à la fois mieux connues et moins connues que l'autre. Il y a donc des propositions qui sont indémonstrables et qui d'ailleurs ne doivent pas l'être. Ce sont des propositions d'évidence immédiate qui sont à la base de chaque science particulière. Ex. les principes d'identité, de contradiction et du tiers exclu, etc.

Cependant, en disant que le syllogisme est composé de 3 termes et de 3 propositions, l'on doit signaler que tout ensemble de 3 propositions ne constitue pas obligatoirement un syllogisme. Pour qu'un syllogisme soit concluant, il doit respecter des règles entre les termes et les propositions qui interviennent pour sa constitution.

4.2.1. Les règles du syllogisme

Huit règles du syllogisme s'appliquent d'une part aux termes et d'autre part aux propositions qui entrent dans la formation du syllogisme:

1. Il n'y a que 3 termes dans un syllogisme : le grand, le moyen et le petit (Virieux-Raymond. 1962: 47-48);
2. Le moyen terme ne doit jamais apparaître dans la conclusion;
3. Une fois au moins le moyen terme doit être pris universellement, c'est-à-dire dans une proposition en A ou en E;
4. Les termes ne doivent pas avoir une plus grande extension dans la conclusion que dans les prémisses.

Le non-respect de ces règles entraîne de raisonnements inadéquats.

Ex. Tout ce qui est rare est *cher*

Or, un cheval **beau-marché** est rare

Donc un cheval **beau marché** est *cher*.

Cette conclusion est manifestement contradictoire. Cela vient du fait que le terme moyen (rare) n'a pas le même sens dans les 2 prémisses= le terme rare a 2 sens distincts. La règle n° 1 n'a pas été observée; ainsi au lieu d'un syllogisme nous avons un paralogisme.

5. De 2 prémisses négatives, on ne peut rien conclure;
6. 2 prémisses affirmatives donnent nécessairement une conclusion affirmative;
7. La conclusion suit toujours le sort de la prémisses la plus faible: elle sera particulière si l'une des prémisses est particulière; elle sera négative si l'une des prémisses est négative;
8. De 2 prémisses particulières, on ne peut rien conclure.

4.2. 2. Les modes et figures du syllogisme

Le mode du syllogisme est la forme que prend ce syllogisme suivant la variation de la quantité et de la qualité des prémisses.

La figure du syllogisme est la position qu'occupe le moyen terme dans la prémisses majeure et dans la prémisses mineure.

En considérant les 4 types de propositions A, E, I, O et en les arrangeant 3 par 3 avec des répétitions possibles, on obtient **256 arrangements possibles** de la forme AAA, AII, etc. **Ce sont les modes possibles du syllogisme.**

Parmi ces 256 modes, **24 seulement respectent les règles précédemment énoncées**, ce sont les modes concluants, les seuls à retenir.

Ces modes concluants sont répartis en 4 figures d'après la position du moyen terme dans les prémisses comme sujet ou comme prédicat.

Dans la 1^{ère} figure par exemple, le moyen terme est sujet dans la prémisse majeure et **prédicat** dans la prémisse mineure, ce qu'on traduit par la formule **SP** (Sujet-Prédicat).

Tableau des figures du syllogisme

Figure	Place du moyen terme		formule	Ex :
	La majeure	La mineure		
I	Sujet	Prédicat	SP	Tous les <i>Rwandaïs</i> sont des <i>Africains</i> ; Or Mbogo est <i>Rwandaïs</i>
II	Prédicat	Prédicat	PP	Tout Burundais est <i>africain</i> ; or Aucun Français n'est <i>africain</i>
III	Sujet	Sujet	SS	Tous les <i>hommes</i> sont bipères; or quelques <i>hommes</i> sont bornes
IV	Prédicat	Sujet	PS	Aucun Rwandais n'est <i>européen</i> ; or tout <i>européen</i> vit dans l'hémisphère nord

Chaque figure contient 6 modes que l'on désigne par la nature des propositions qui la composent.

Avec les 64 modes possibles pour chaque figure et comme chaque mode comporte les 4 figures, on aura au total 64 x 4, c'est-à-dire 256 modes; tout en sachant que ce sont seuls 24 modes qui doivent être tenus en considération en tant qu'ils sont constitués en respectant les règles à la fois en rapport avec les termes et les propositions qui interviennent lors de leurs formulations.

Ex. Le mode AAA est un syllogisme dans lequel les 2 prémisses et la conclusion sont toutes des propositions en A.

Tableau des modes concluants

Figure	Modes					
I	AAA	AAI	EAE	EOA	AII	EIO
II	EAE	EOA	AEE	AEO	EIO	AOO
III	AAI	IAI	AII	EOA	OOA	EIO
IV	AAI	AEE	AEO	IAI	EOA	EIO

Pour se souvenir de ces 24 modes, les logiciens du Moyen-Âge avaient inventé des mots mnémotechniques qui sont des mots artificiels de consonances latines composés de 3 syllabes, chacune ayant comme voyelle les lettres de propositions.

Ex. le syllogisme AAA de la 1^{ère} figure, 1^{er} mode est désigné par le mot **Barbara**.

On a le tableau suivant:

Figure	Modes					
I	Barbara	Barbari	Cerarent	Ceraront	Dariri	Ferio
II	Cesare	Cesaro	Camestres	Camestrop	Festino	Baroco
III	Darapti	Disamis	Datisi	Felapton	Borcado	Ferison
IV	Bramantip	Camenes	Camenop	Dimatis	Fesapo	Fresison

Par ailleurs, à considérer les 4 modes du tableau ci-dessus, on constate que certains n'ont pas d'intérêt. En effet, dans une même figure, comment justifier que les mêmes prémisses donnent lieu à des conclusions distinctes ?

Ex. le mode AAI de la 1^{ère} figure fournit une conclusion qui est une proposition en I alors que les mêmes prémisses(AA) auraient pu donner une conclusion en A, c'est-à-dire une conclusion universelle qui contient en particulier une conclusion en I.

Nous dirons que ce mode AAI de la 1^{ère} figure ne présente pas d'intérêt.

Si nous éliminons ces syllogismes, valables logiquement mais moins puissant que les modes concluant qu'on peut obtenir avec les mêmes prémisses, il nous reste 19 modes qui sont les suivants:

Figure	Modes					
I	Barbara	Barbari	Cerarent	Ceraront	Dariri	Ferio
II	Cesare	Cesaro	Camestres	Camestrop	Festino	Baroco
III	Darapti	Disamis	Datisi	Felapton	Borcado	Ferison
IV	Bramantip	Camenes	Camenop	Dimatis	Fesapo	Fresison

Pour réaliser ces divers types de modes du syllogisme, on lie des propositions, c'est-à-dire qu'il y a des opérations qui sont effectuées sur les propositions. Il s'agit du calcul logique. Ce calcul fournit les moyens de combiner n'importe quel type de proposition pour parvenir à des conclusions valables logiquement.

L'usage des symboles avec lesquels on opère sur les propositions comme on opère en algèbre confère au calcul logique un caractère automatique.

On distingue ainsi le calcul propositionnel et le calcul des prédicats.

CHAPITRE 5. LE CALCUL LOGIQUE

5.1. Le recours au symbolisme

La logique contemporaine est formelle et symbolique. Il y a en effet une nécessité de substituer aux grammaires de nos langues naturelles une grammaire où les formes du discours sont calquées sur les formes logiques. Ainsi, prenant modèle sur le raisonnement algébrique, le raisonnement logique est plus tributaire des imprécisions du langage et fait place depuis le 19^{ème} siècle avec Boole à un pur calcul des signes.

Dès lors, la logique apparaît comme un véritable langage formel où l'on se donne:

- a. Un alphabet de signes;
- b. Des règles de formation de mots qui sont susceptibles d'appartenir à ce langage;
- c. Certains énoncés de départ, c'est-à-dire des *axiomes*;
- d. Des règles de dérivation de nouveaux énoncés (les *théorèmes*) à partir d'autres énoncés vrais.

Dériver un énoncé d'un ou de plusieurs énoncés par application d'une règle, c'est procéder à une *déduction* ou à une *inférence*.

5.2. Le Vrai et la Faux

La logique formelle admet 2 valeurs: la valeur *Vraie* et la valeur *Fausse*. Elle est *binaire*.

*«Les propositions ne comprennent que les énoncés qui sont vrais et ceux qui sont faux. Ces 2 propriétés des propositions, la vérité et la fausseté, sont appelées **valeurs de vérité**. Ainsi, on dit que la valeur de vérité d'une proposition est la vérité ou la fausseté suivant que cette proposition est vraie ou fausse»⁸.*

Soient, p et q, 2 propositions quelconques. Le calcul classique n'admet sur ces propositions que 2 valeurs: le vrai V 1 et
le faux F 0

C'est le *postulat de bivalence*.

5.3. Atomes et molécules

Soit la proposition: *Il pleut*. C'est une proposition élémentaire plus simple; c'est une *proposition atomique*; c'est un *atome propositionné*.

Soit la proposition: *S'il pleut, alors je m'abstiendrai de sortir*. C'est une proposition composée ou complexe; c'est une *proposition moléculaire*; c'est une

⁸ Quine. *Logique élémentaire*, p. 29

molécule. Cette proposition complexe est obtenue à partir d'un nombre **n** de propositions atomiques reliées entre elles par des mots tels que, *et*, *ou*, *si...alors*, etc. qu'on appelle *connecteurs logiques* ou encore *foncteurs logiques*, ou encore *connecteurs propositionnels*.

Ainsi, la valeur de vérité d'une proposition moléculaire dépendra:

- a. De la valeur de vérité de chacune des propositions atomiques qui la composent;
- b. Du mode de composition de ses divers atomes, c'est-à-dire de la manière dont les atomes sont assemblés. Il s'agit du *postulat d'extensionnalité* qui énonce que la valeur de vérité d'une proposition complexe est fonction de la valeur de vérité des propositions atomiques qui la composent.

5.4. Les connecteurs propositionnels

Ces connecteurs (opérateurs, foncteurs, articulations) sont notamment: la *négation*, la *conjonction*, la *disjonction inclusive*, la *disjonction exclusive* (exclusion réciproque), *l'implication*, la *bi-implication* (l'équivalence, le double conditionnel), *l'incompatibilité* (la barre de Scheffer), *le rejet*.

Ces connecteurs sont de 3 types:

- a. Certains opèrent sur une seule proposition; ex. la négation;
- b. D'autres opèrent sur 2 propositions et
- c. D'autres s'appliquent sur 3 propositions.

N.B. Les Stoïciens sont les premiers à avoir utilisé les foncteurs binaires de la logique des propositions. Ils ont découvert 3 types de connecteurs, à savoir:

- L'implication matérielle: *si...alors*;
- La conjonction: *et*;
- La somme logique (liaison de disjonction: *ou*. Ils sont les 1^{ers} à avoir utilisé les tables de vérités (TV) pour étudier ces liaisons.

5.5. Inventaire et figuration des connecteurs propositionnels

5.5.1. La négation

Propriété fondamentale: Si *p* est une proposition, on appelle *négation de p* la proposition notée $\neg p$ qui est vraie ssi *p* est fausse et fausse ssi *p* est vraie, d'où cette table de vérité:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Ex. *p*: *il pleut*; $\neg p$: *il ne pleut pas* (plus)

N.B. La *négation* est un connecteur bien qu'elle ne lie pas 2 propositions mais s'applique à une seule. C'est un *connecteur unaire* portant sur une proposition.

5.5.2. La conjonction

Propriété fondamentale: Si p et q sont des propositions, on appelle *conjonction de p et de q* , la proposition notée $p \wedge q$, p , q , qui est vraie si et seulement si les 2 propositions sont simultanément vraies.

Ex: *Il pleut et pourtant (cependant, mais) il fait chaud.* **TV:**

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

5.5.3. La disjonction inclusive

Propriété fondamentale: Si p et q sont des propositions, on appelle *disjonction inclusive de p et de q* , la proposition notée $p \vee q$ qui est fausse si ou seulement si les 2 propositions p et q sont simultanément fausses.

Ex: *Nous voulons un secrétaire parlant français ou kiswahili.*

TV:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

5.5.4. La disjonction exclusive

Propriété fondamentale: Si p et q sont des propositions, on appelle *disjonction exclusive de p et de q* , la proposition notée $p \veebar q$ qui est fausse chaque fois que p et q ont la même valeur de vérité.

Ex: *Le travail convient à tout jeune ou bien Fille ou bien Garçon.* **TV:**

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

5.5.5. L'implication

Propriété fondamentale: Si p et q sont des propositions, on appelle *p implication q* , la proposition notée $p \rightarrow q$, $p \implies q$ qui est fausse dans le cas où p vraie et q est fausse. La proposition p est appelée antécédent; q est le conséquent.

Il y a une véritable implication matérielle lorsque la relation d'antécédent à conséquent est rigoureuse, c'est-à-dire que tous les énoncés de la forme *si...alors* ne sont pas des implications matérielles.

Ex: *S'il pleut, alors la chaussée est humide*: C'est une implication matérielle car il ne peut pas arriver que la route ne soit pas mouillée quand il y a eu de la pluie. *S'il pleut, alors je reste à la maison*: ce n'est pas une implication matérielle car je peux rester à la maison pour une autre raison non liée au fait de la pluie. *S'il y a du feu du bois, alors il y a de la fumée*: C'est une implication matérielle. **TV:**

P	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5.5.6. L'équivalence

Propriété fondamentale: Si p et q sont des propositions, on appelle p *bi-implication* q , la proposition notée $p \equiv q$, $p \leftrightarrow q$, qui est vraie chaque fois que p et q ont la même valeur de vérité.

Ex: L'on corrigera les exercices ssi vous les aurez préalablement résolu à domicile. **TV:**

P	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5.5.7. L'incompatibilité

Propriété fondamentale: Si p et q sont 2 propositions, on appelle p *est incompatible avec* q la proposition notée $p \uparrow q$ ou $p \mid q$, proposition qui est fausse ssi p et q sont simultanément vraies. **TV:**

p	q	$p \uparrow q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Il y a incompatibilité entre 2 arguments mais un 3^{ème} argument est possible. C'est pour cette raison que la valeur de vérité de l'incompatibilité a la valeur 0 ssi les 2 arguments ont la valeur 1, c'est-à-dire si p est vraie et q est vraie.

Ex. *Il est assis*(p) ou *il est debout* (q).

Généralement, les 2 positions sont incompatibles, mais une 3^{ème} possibilité peut se présenter (la personne peut être couchée), *conclusion*.

NB. Le connecteur d'incompatibilité ou barre de Scheffer permet à lui seul d'exprimer la négation.

Ex. si p est vraie, $p \uparrow p$ est faux et si p est faux, $p \uparrow p$ est vrai.

5.5.8. Le rejet

Propriété fondamentale: Si p et q sont 2 propositions, on appellera *ni p ni q*, la proposition notée $p \downarrow q$, qui est vraie ssi p et q sont simultanément fausses, d'où la TV:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ex: Il est ni riche ni travailleur

Tableau synthétique

p	q	Incompatibilité	Implication		Disjonction inclusive	Equivalence
		$p \uparrow q$	$p \rightarrow q$		$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
1	1	1			0	0
1	0	0			0	1
0	1	0			0	1
0	0	0			1	0
		$p \wedge q$			$p \downarrow q$	$p \vee q$
		Conjonction			Rejet	Disjonction exclusive

La langue usuelle étant distincte de la langue formelle, certaines expressions françaises expriment des connecteurs bien précis. D'où le tableau suivant:

Connecteurs	Expressions permettant de les rendre
Négation: $\neg p$	Non p; p n'est pas réalisé; on n'a pas p; il n'est pas vrai que p; etc.
Conjonction: $p \wedge q$	p et q; p mais q; p croit que q; à la fois p et q; non seulement p mais encore q; p et pourtant q; p tandis que q; etc.
Disjonction inclusive: $p \vee q$	p ou q; p à moins que q; p sauf si q; p ou les deux; etc.
Disjonction exclusive: $p \vee\vee q$	p ou q jamais les deux; ou bien p ou bien q; soit p soit q; etc.
Implication (Conditionnel): $p \rightarrow q$ suff. $\rightarrow$ néc.	Si p alors q; lorsque p alors q; q pourvu que p; q si p; q lorsque p; p seulement si q; p seulement lorsque q; q au cas où p; p est condition suffisante de q; q est condition nécessaire de p; etc.
Bi-implication (biconditionnelle): $p \equiv q$	p bi-implication q; p si et seulement si q; p si q et q si p; p exactement si q; si p alors q et réciproquement; p est condition nécessaire et suffisante de q; etc.
Rejet: $p \downarrow q$	Incompatible avec; ni p ni q

5.6. Les expressions bien formées (EBF)

Lorsqu'on considère des propositions complexes, la langue usuelle devient ambiguë.

Ex. *S'il fait beau, je me promènerai et j'irai faire des achats.* Cette proposition fait état de 3 actions: faire beau; se promener et faire des achats.

Si l'on ne tire pas assez d'attention, l'on peut ne pas se rendre compte de ces différentes actions et de leur ordre chronologique (on peut seulement entendre soit il fait beau, soit se promener soit faire des achats, suivant l'intérêt visé, etc.). Pour ne pas se tromper de cible, il convient d'utiliser des règles d'écriture et faire recours à la logique formelle qui résout ce souci, et utiliser un symbolisme.

Le matériel symbolique constitue l'alphabet de la langue. Cet alphabet est formé:

- De lettres de propositions ($p, q, r, s, \dots$);
- De connecteurs ($\neg, \equiv, \wedge, \rightarrow$, etc.);
- De symboles de ponctuations: (); { }; etc.

Lorsque des symboles pris dans l'alphabet sont disposés les uns à la suite des autres, on forme des suites finies ou mots (ex: $p.q$; prs , etc.) et certains d'entre eux n'ont pas de sens lorsqu'on les traduit en langue usuelle à des phrases pourvues de significations.

Ainsi, il est possible de définir, au moyen de règles conventionnelles, un sous-ensemble de mots dits EBF= Expressions Bien Formées. Tous les énoncés pourvus de sens peuvent se traduire en EBF. Cet ensemble des EBF est constitué

en appliquant les règles (= les règles de formation des EBF) suivantes: **1⁰**. Une lettre de proposition prise isolément est une EBF. Ex. p: une EBF;

2⁰a. Si p est une EBF, alors $\neg p$ est une EBF

b. Si p, q sont des EBF, alors $(p * q)$ (où le signe* désigne n'importe quel connecteur binaire) est une EBF.

3⁰ Seuls les mots formés par application des règles **1⁰** et **2⁰** sont des EBF. Ainsi donc, la règle **n⁰1⁰** fixe un stock initial d'EBF et les règles **n⁰2⁰** permettent de former de nouvelles EBF à partir d'EBF déjà construites. Enfin, la règle **n⁰3⁰** interdit l'introduction d'EBF indésirable.

Toute EBF peut être vérifiée pour se rassurer si elle est construite suivant les règles, c'est-à-dire si elle est sensée. La vérification peut être faite de 3 manières:

5.6.1. Vérification d'un mot par fractionnement

La 1^{ère} manière de vérifier un mot donné est de le décomposer pour se rassurer s'il peut être ramené à des lettres de propositions contenant un connecteur. Cette méthode permet de déterminer de façon effective si un mot donné est une EBF. Par cette méthode, l'on part de tout mot non réduit à une lettre de proposition contenant un connecteur principal et on cherche à le tester pour se rassurer s'il comporte un autre connecteur qui peut jouer ce rôle. Si on n'en trouve pas, c'est que ce mot est mal formé et il n'a pas de sens si on le traduit en langue usuelle. Ex de mot mal formé: (p.

Si on trouve un connecteur qui lie les différents mots, l'on doit vérifier le mot de nouveau. Ainsi, il est possible de démontrer qu'un mot donné est une EBF si et seulement si on applique les prescriptions ci-haut citées et que l'on parvient à l'indication « stop-EBF ».

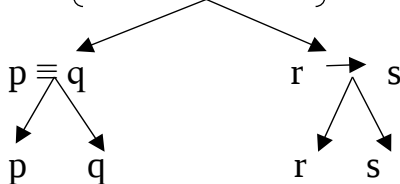
Ex. soit x une formule à tester:

a. Si $x \equiv p$ (p désigne une lettre de proposition)...stop-EBF;

b. Si $x \equiv \neg p$, alors il faut tester p...stop EBF

Tester une sous-formule pour voir si elle est bien formée revient à construire un arbre généalogique sur lequel ne figure que des EBF et dont toutes les branches se terminent par une lettre de proposition.

Ex. tester $[(p \equiv q) \vee (r \rightarrow s)]$



5.6.2. Vérification d'un mot au moyen des tables de vérité

La vérification du mot par la méthode des Tables de Vérité consiste à construire une table de vérité de l'expression à tester pour déterminer les valeurs correspondantes.

Définition:

Une table de vérité est une représentation systématique des conditions de vérité d'une proposition.

Pour construire une TV, dans un tableau où figure l'expression à vérifier ou la proposition moléculaire, on attribue une valeur à chacune des propositions atomiques qui compose la proposition complexe et par la suite l'on détermine, en fonction de la matrice de chaque opérateur logique en présence la valeur totale de la proposition à tester.

Cette méthode d'évaluation s'appelle **méthode matricienne** parce qu'elle repose sur des tables ou matrices des opérateurs. On appelle **nombre matricien d'une proposition**, le nombre formé par la juxtaposition des valeurs vrai et faux correspondant à la valeur de vérité de cette proposition.

Considérons A une proposition moléculaire:

- a. Si A contient 2 atomes, il y aura $2^2 = 4$ éventualités à examiner, c'est-à-dire 4 distributions de valeur de vérité sur les lettres de proposition;

Ex: A contient les propositions: p, q: on aura

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

- b. Si A contient 3 atomes, il y aura $2^3 = 8$ éventualités à examiner;

Ex: A: p, q, r, on aura

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

- c. D'une manière générale, si A contient n atomes, il y aura 2^n éventualités.

5.6.3. Vérification des arguments au moyen des tables de vérité

L'une des tâches importantes la logique est la vérification des arguments.

Définition:

Un *argument* est l'affirmation qu'une certaine proposition appelée « conclusion » découle d'autres propositions appelées « prémisses ».

L'argument est dit valable ssi la conjonction des prémisses entraîne la conclusion, c'est-à-dire si chaque fois que les prémisses sont toutes vraies, la conclusion l'est aussi.

EXERCICES I

I. Evaluer les formules suivantes au moyen des tables de vérité

1. $(\neg p \vee q)$
2. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

II. Traduire dans la langue formelle les expressions suivantes:

1. Pour que le nombre x soit divisible par 10, il suffit qu'il soit divisible par 20, mais il faut qu'il soit divisible par 5.
2. Si une fleur est belle sans avoir d'épines, alors elle n'est pas une rose si elle ne fleurit pas bien.
3. On ne vous croira facilement que si vous dites habituellement la vérité.
4. Quand le chat dort, les souris n'ont pas peur et dansent.
5. Un nombre est premier ssi il est divisible à lui-même et par 1.
6. Que K ne soit ni pair ni 1^{er} n'est pas une condition suffisante pour qu'il soit multiple de 3.
7. Que 42 ne soit pas à la fois multiple de 18 et de 2 n'implique pas que 42 ne soit ni multiple de 18 ni multiple de 2.

III. Traduire:

1. Puisque vous n'avez que 2 heures pour cet examen, il faut ne pas faire de brouillon et faire attention à la forme en même temps au contenu dans la rédaction, ou bien, si vous faites un brouillon, il ne faut que faire attention au contenu sans faire attention à la forme de la rédaction, mais il faut aller vite.
2. Il est nécessaire d'utiliser une encre noire si l'on veut que la photocopie soit bonne et si on utilise une encre autre que noire, la photocopie est mauvaise.
3. Si un étudiant veut réussir dans sa vie, il est nécessaire qu'il lise les signes du temps et qu'il accomplisse son devoir d'état de bien étudier.
4. La paix d'une nation nécessite l'application d'une justice et d'une équité sans faille.
5. Pour être heureux, il suffit d'être toujours attentif à la voix de son cœur et de suivre impérativement la loi que dicte la raison.
6. Pour qu'il y ait la paix dans la nation, il suffit que la justice et l'équité soient recherchées par l'appareil d'Etat.
7. Pour réussir l'examen, il suffit de l'avoir bien préparé et de le passer dans la sérénité.

8. Qu'il fasse beau ou qu'il ne fasse pas beau, il faut que je travaille pour réussir mon examen. Or s'il fait beau je ne travaille pas. Donc, si je ne réussis pas mon examen, c'est qu'il fait beau.
9. La vie est un mélange de peine et de joie, mais même si elle est un combat, elle vaut la peine d'être vécue

IV. Traduire et donner la négation

1. Si un nombre est divisible par 12, il est nécessaire qu'il soit divisible par 3 et par 4 mais aucune de ces conditions n'est suffisante.
2. Il est nécessaire de travailler s'il y a un examen en fin d'année ou il faut croire à la chance.
3. Il est nécessaire de suivre correctement les enseignements et de savoir écouter son cœur pour réussir dans sa vie.
4. Pour être heureux, il est nécessaire de faire l'examen de conscience chaque jour et réaliser ce que le cœur recommande.
5. Pour avoir une bonne note dans cet examen, il est nécessaire de bien répondre à chaque question et d'être serein lors de l'épreuve.
6. Il est nécessaire de penser et d'écouter son cœur pour être en harmonie avec ses voisins.
7. Il ne suffit pas de réussir en classe et d'obtenir son diplôme pour être heureux.
8. Il suffit de ne pas seulement se contenter de son diplôme et des honneurs liés à son travail pour bien se reposer.
9. Puisqu'on ne vit qu'une fois, il faut ne pas se comporter bêtement et savoir bien utiliser son cœur et sa raison.
10. Pour qu'il y ait la cohésion sociale, il est nécessaire d'être à l'écoute de son cœur et de son prochain.
11. Pour être heureux, la réussite à l'examen ne suffit pas puisque la vie comporte beaucoup d'exigences.
12. Vous ne serez utile à la nation que si vous vous en tenez à votre devoir quotidien.
13. Que tu sois homme ou que tu sois femme, il faut que tu sois honnête pour bien gagner ta vie.
14. Il ne suffit pas d'avoir bien mangé et de dormir chez soi pour avoir un bon sommeil.
15. Il n'y a pas de fumée sans feu.
16. 15 est plus grand que 7 ou que 19 mais pas à la fois plus grand que 7 et que 19.

V. Construisez les syllogismes de la forme: AAA; AII; AAI; IAI; EIO.

VI. Vérifier les arguments suivants:

1. Si le Burundi est une démocratie, alors les citoyens ont droit de vote. Or ses citoyens ont le droit de vote. Donc le Burundi est une démocratie.
2. Dans une démocratie, le 1^{er} ministre est élu. Au Burundi, le 1^{er} ministre n'est pas élu. Donc le Burundi n'est pas une démocratie.

CHAPITRE 6. LA TAUTOLOGIE

6.1. Définition

Il existe en logique formelle des formules qui sont toujours vraies, c'est-à-dire des formules dont la table de vérité ne contient que la lettre V ou le chiffre 1. Ces formules sont appelées *des formules logiquement vraies* ou *tautologies*.

Ex: p ; $\neg p$; $p \rightarrow p$

Généralement, tout discours comprend 2 aspects: l'aspect formel et l'aspect matériel. Les propositions logiques sont évidentes mais elles ne nous apprennent rien, c'est en cela qu'elles sont des tautologies.

6.2. Caractère de la tautologie

Une tautologie demeure vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la composent. Elle n'est pas réellement fonction des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

La notion de tautologie a été précisée par le calcul propositionnel. Le mot prend en logique un sens beaucoup plus rigoureux que dans le langage courant où il signifie *truisme* ou *lapalissade*.

Dans son sens logique, ce mot est, depuis Wittgenstein in *Tractatus logico-philosophicus*, accepté par l'ensemble des logiciens. Bien que le connecteur exprime une liaison entre 2 propositions, cette liaison est contingente car elle n'est vraie que pour certaines valeurs. Ex. $p \vee q$: cette proposition disjonctive n'est vraie que pour quelques cas et elle est fausse lorsque les propositions élémentaires p et q sont simultanément fausses. Or $p \vee \neg p$ est toujours vraie, c'est-à-dire que cette proposition est une tautologie.

Pourtant, si la tautologie ne nous apprend rien sur la vérité ou la fausseté de ses propositions élémentaires, elle nous renseigne sur la vérité ou la fausseté de telle ou telle combinaison. **Elle nous permet de calculer et de passer d'une formule à une autre car elle n'a pas le moindre contenu empirique qui risquerait d'y introduire des erreurs. La tautologie est utile parce qu'elle est vide.** On peut alors admettre que les tautologies ou lois logiques constituent l'ensemble des bases théoriques sur lesquelles se fondent les règles du raisonnement correct.

6.3. Les différentes EBF

L'analyse des tables de vérité nous montre 4 cas possibles.

a. Les formules valides

Une formule est valide si et seulement si elle est vraie pour tout système d'assignation de valeur de vérité à ses lettres de phrases, c'est-à-dire qu'une EBF est valide ssi le résultat d'un calcul propositionnel donne la valeur vraie.

Ex. $(p \vee \neg p)$; $(p \wedge q) \rightarrow p$

b. Les formules insatisfiables

Une EBF est insatisfiable ssi elle prend la valeur fausse quelle que soient les valeurs de vérité assignées à ses variables. Cette EBF est contradictoire, elle est identiquement fausse ou irréalisable ou antilogique. Ex. $p \wedge \neg p$

c. Les formules non valides

Une EBF est non valide ssi elle n'est pas valide, c'est-à-dire ssi elle est fausse pour au moins un système d'assignation de valeur de vérité à ses lettres de phrases.

d. Les formules satisfiables

Une EBF est satisfiable si et seulement si elle est vraie pour au moins un système d'assignation de valeur de vérité à ses lettres de phrases.

Formule valide	Formule réalisable (satisfiable)	Formules irréalisables
Rien que des 1	Quelque 1	Rien que des 0
	Quelque 0	
Tautologie	Formule non valide	Antilogie

6.4. Les trois grandes lois de la logique à double valeur

6.4.1. Le principe de non contradiction

Cette loi s'énonce ainsi: « *une même chose ne peut pas, sous le même rapport être et ne pas être* »= dès que vous affirmez quelque chose, c'est qu'elle est telle à cet instant et non pas son contraire. Autrement-dit, il est impossible d'affirmer et de nier à la fois et en même temps une même proposition. $\neg (p \wedge \neg p)$

6.4.2. Le principe d'identité

Cette loi stipule qu'une proposition est toujours identique à elle-même au moment où elle est énoncée: p n'est pas $\neg p$ ou $p \equiv \neg \neg p$.

Représentation de ce principe: $p \rightarrow p$ ou $p \leftrightarrow p$

6.4.3. Le principe du tiers exclu

Il s'énonce comme suit : « *De deux propositions contradictoires, l'une est vraie et l'autre est fausse. Il n'y a pas de 3^{ème} possibilité* ». Une même proposition est soit affirmée ou niée. Représentation de cette loi: $p \vee \neg p$.

La spécificité de cette logique est qu'elle est une logique à 2 alternatives, du tout ou rien, c'est-à-dire à valeur de vérité ou de fausseté (ex : Allumé ou éteint). Mais une logique à 3 valeurs est possible: ex. le vrai, le probable, le faux.

Dans d'autres types de logique, surtout celles d'inspiration dialectique matérialiste ou hégélienne, d'autres éléments entrent en jeu où une même proposition peut donner des passages de vérité (ex : commencer à être vrai, devenir de plus en plus vrai, vrai, terminer d'être vrai, etc.).

Ainsi, en 1964, le logicien polonais Rogowski a proposé une logique formelle dialectique de Hegel. Celui-ci pose au départ l'affirmation de l'être et du néant (non-être). Cela lui permet de penser le devenir comme néant qui passe à l'être (apparition) ou comme néant qui passe au néant (disparition). Rogowski imagine alors 4 opérateurs:

p : p est

$\neg p$: p n'est pas $p \rightarrow$: il commence à se trouver que

p (apparition)

$\leftarrow p$: il cesse de se trouver que p (disparition)

6.5. Les 16 opérateurs binaires

Dans une logique bivalente où les propositions sont vraies ou fausses, il est possible de former avec 2 propositions (simples ou complexes) 16 opérateurs binaires correspondants à tous les cas possibles de la table de vérité à 4 lignes (Thiry, 2004:18).

Signification en langage courant	Nom	Idéigramme	F	F	V	V	p
			F	V	F	V	q
	Tautologie		V	V	V	V	1
p ou q, au moins l'un	Disjonction	$p \vee q$	F	V	V	V	2
Si q, alors p	Implication converse	$q \rightarrow p$	V	F	V	V	3
p, quel que soit q		p	F	F	V	V	4
Si p, alors q	Implication directe	$p \rightarrow q$	V	V	F	V	5
q, quel que soit p		q	F	V	F	V	6
p ssi q	Equivalence	$p \equiv q$	V	F	F	V	7
p et q	Conjonction	$p \cdot q$	F	F	F	V	8
p ou q , au plus l'un	Incompatibilité	$p q$	V	V	V	F	9
p ou q, au plus et au moins l'un	Alternative	$p \vee\vee q$	F	V	V	F	10
non q, quel que soit p		$\neg q$	V	F	V	F	11
p sans q		$p \cdot \neg q$	F	F	V	V	12
non p, quel que soit q		$\neg p$	V	V	F	F	13
q sans p		$\neg p \cdot q$	F	V	F	F	14
ni p, ni q	Rejet	$\neg p \cdot \neg q$	V	F	F	F	15
	Contradiction		F	F	F	F	16

On remarquera sur le tableau que chaque opérateur a son exacte négation dans la colonne qui lui est symétriquement opposé en considérant une ligne médiane.

6.6. La réduction du nombre des opérateurs.

Dans le tableau précédemment donné, tous les connecteurs binaires sont mis apparemment sur le même plan. En réalité, ils n'ont pas tous la même importance.

a. Colonnes 1 et 16: Quelques-uns des 16 binaires doivent d'abord être considérés à part: il s'agit de la tautologie(1) et de la contradiction (16). On ne peut les considérer comme des foncteurs de vérité qu'en un sens impropre puisque la vérité de la tautologie et la fausseté de la contradiction ne dépendent pas de la vérité ou de la fausseté des propositions atomiques qui les composent.

b. Lorsque nous considérons les cas **des colonnes 4, 6, 11 et 13**, nous constatons que ce ne sont pas vraiment des binaires puisque la proposition qu'ils servent à former dépend uniquement de l'une des 2 propositions élémentaires p et q.

- c. Ces 6 connecteurs écartés, **les 10 binaires** qui restent se divisent en 2 ensembles symétriques par rapport à une ligne médiane, chacun pouvant être défini par la négation de l'autre.

3 parmi ces 10 binaires ont un caractère plus fondamental: il s'agit de la conjonction, la disjonction et *l'implication*. L'implication converse et l'équivalence se laissent en effet facilement se définir à partir de l'implication, de la conjonction et de la disjonction.

- d. **La réduction optimale:** La réduction théorique peut-être poussée plus loin.

On s'est en effet aperçu que tous les connecteurs peuvent-être définis avec l'aide de la négation par l'implication, la conjonction et la disjonction qui sont ainsi inter-définissables.

Inter-définissabilité des connecteurs ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$) associés à ($\neg$)

Définition de	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
Au moyen de : $\vee$ et $\neg$	-	$\neg (\neg p \vee \neg q)$	$\neg p \vee q$
$\wedge$ et $\neg$	$\neg (\neg p \wedge \neg q)$	-	$\neg (p \wedge \neg q)$
$\rightarrow$ et $\neg$	$\neg p \rightarrow q$ $\neg q \rightarrow p$	$\neg (p \rightarrow \neg q)$ $\neg (q \rightarrow \neg p)$	-
$\uparrow$	$(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$	$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$	$p \uparrow (q \uparrow q)$

- e. Au lieu de 2 opérateurs, un binaire et un unaire, il est possible de se contenter d'un seul, en faisant tout reposer sur un binaire sans utiliser la négation. En effet, dès 1913, Scheffer, logicien américain d'origine russe a montré que l'incompatibilité (ou barre de Scheffer) pouvait suffire à elle seule pour exprimer toutes les opérations binaires. L'incompatibilité permet donc une unification opératoire de la logique: elle est un **connecteur suffisant**. Ex: $(p \uparrow q) \equiv \neg (p \wedge q)$

6.7. Inventaire des principales tautologies

- a. Lois élémentaires portant sur une proposition unique

Représentation	Lois
$p \equiv p$	Loi d'identité
$p \rightarrow p$	
$p \equiv (p \vee p)$	Loi de l'idempotence de la $\vee$ et de la $\wedge$
$p \equiv (p \wedge p)$	
$\neg (p \wedge \neg p)$	Loi de la non-contradiction
$p \vee \neg p$	Loi du tiers -exclu
$\neg \neg p \equiv p$	Loi de la double négation

b. Commutativité, associativité, double distributivité de la $\wedge$ et de la $\vee$ et absorption.

Représentation	Lois
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Commutativité
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	
$\{(p \vee q) \vee r\} \equiv \{p \vee (q \vee r)\}$	Associativité
$\{(p \wedge q) \wedge r\} \equiv \{p \wedge (q \wedge r)\}$	
$\{p \vee (q \wedge r)\} \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Double distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$
$\{p \wedge (q \vee r)\} \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	absorption
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	

c. Lois de dualité et quelques lois de l'implication

Représentation	Lois
$\neg(p \cdot q) \equiv \neg p \vee \neg q$	Lois de dualité ou lois de De Morgan
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \cdot \neg q$	
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	Loi de contraposition
$\{(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)\} \rightarrow (p \rightarrow r)$	Loi de transitivité
$\{(p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow \neg q)\} \rightarrow \neg p$	Loi de réduction à l'absurde
$\{(p \rightarrow q) \rightarrow p\} \rightarrow p$	Loi de Pierce
$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$	Loi de Clavius

Convertibilité des 4 connecteurs: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\uparrow$

$p \vee q$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg p \uparrow \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \uparrow \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
$\neg p \vee \neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$p \uparrow q$	$\neg(p \wedge q)$
$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \uparrow q)$	$p \wedge q$
Writehead	Frege	Nicod	Breatand
Russel	Lukasiewicz		Johnson

CHAPITRE 7. LE PROBLEME DE LA DECISION ET LES FORMES NORMALES

7.1. Sommes logiques

7.1.1. Définition

Une somme logique ou disjonction continue est une formule dont les composantes sont reliées par le connecteur conjonctif **V**. Ces propositions s'appellent *termes*. $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$ se note:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i$$

7.1.2. Propriétés de la disjonction continue

- Pour que l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i$$

Soit:

- fausse, il faut que tous ses termes soient faux;
- vrai, il suffit que l'un de ses termes soit vrai.

- La somme logique est commutative et associative.

7.2. Produit logique

7.2.1. Définition

Un produit logique ou conjonction continue est une formule dont les propositions composantes sont reliées par la conjonction. Ces propositions s'appellent *facteurs*. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$ se note

$$\prod_{i=1}^{i=n} p_i$$

7.2.2. Propriétés de la conjonction continue

- Pour que l'expression

$$\prod_{i=1}^{i=n} p_i$$

Soit:

- fausse, il faut que l'un de ses facteurs soit faux;
- vraie, il faut que tous ses facteurs soient vrais.

- Le produit logique est commutatif et associatif.

7.3. Formes normales d'une EBF

Soient p, q, r , etc. des propositions atomiques. Nous appelons *forme disjonctive* la suite de diverses propositions atomiques ou de leurs négations en disjonction les unes avec les autres. Ex: $\neg p \vee q; p \vee q \vee r$; etc.

De même, nous appelons *forme conjonctive* la suite de diverses propositions atomiques ou de leurs négations en conjonction les unes avec les autres. Ex: $p \wedge q$

Remarque

Les formes disjonctives et conjonctives peuvent se réduire à un seul terme. Elles sont alors autant conjonctives que disjonctives. Ex: $p; \neg q$
Compte tenu de l'inter-définissabilité des connecteurs, il est évident que toute EBF peut - être ramenée à une expression où ne figure que les opérateurs $\neg, \vee, \wedge$.

Définitions

7.3.1. La forme normale disjonctive distinguée

On appelle **forme normale disjonctive distinguée** (FNDD) d'une expression A « une *forme disjonctive équivalente à A dont tous les membres conjonctifs contiennent une et une fois seulement chacune des lettres de propositions figurant dans A , cette lettre étant ou non affectée du signe $\neg$* »⁹.

Pour écrire la FNDD d'une expression donnée, il suffira d'énumérer chacun des cas où l'expression prend la valeur vraie.

N.B. La FNDD est une disjonction de conjonctions élémentaires.

7.3.2. La forme normale conjonctive distinguée

On appelle **forme normale conjonctive distinguée** (FNCD) d'une expression A « une *forme conjonctive équivalente à A dont tous les membres disjonctifs contiennent une et une fois seulement chacune des lettres de propositions figurant dans A , cette lettre étant ou non affectée du signe $\neg$* »¹⁰.

Pour écrire la FNCD d'une expression donnée, il suffira d'énumérer chacun des cas où l'expression prend la valeur fausse.

N.B. La FNCD est une conjonction de disjonctions élémentaires.

Ex: chercher les formes normales de $p \leftrightarrow q$ au moyen de la méthode des tables de vérité.

⁹ Dubarle D., *Éléments de logique mathématique*, p. 33

¹⁰ *Ibidem*

p	q	$P \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pour les FNDD, on considère les cas où la proposition moléculaire est vraie et il s'agira de disjonctions de conjonctions élémentaires.

Donc: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Pour les FNCD, on considère les cas où la proposition moléculaire est fausse et il s'agira de conjonctions de disjonctions élémentaires.

Donc: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

7.4. Méthodes de mise en formes normales

7.4.1. Théorème

Toute forme propositionnelle de calcul des propositions possède des FND et des FNC qui lui sont équivalentes.

N.B. Pour une expression A donné, ni sa FNC ni sa FND n'est unique, c'est-à-dire qu'une proposition possède plusieurs formes normales. Ex:

p

$p \vee (q \wedge \neg q) \equiv p$

$p \wedge (q \vee \neg q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Toutes ces expressions ont la même table de vérité.

7.4.2. Méthodologie de mise en formes normales

Il existe deux méthodes d'établissement des formes normales d'une EBF donnée: la méthode des tables de vérité et celle de transcription.

7.4.2.1. Méthode des tables de vérité

Cette méthode a été expérimentée précédemment: elle procède par la construction de la table de vérité de la formule donnée et par la détermination des formes normales suivant les valeurs vraies ou fausses de la proposition moléculaire donnée. Voir l'exemple suivant:

Déterminer les formes normales de $\neg \{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$

p	r	$p \wedge r$	$p \vee r$	$\neg (p \vee r)$	$\{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$	$\neg \{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1

Les FNDD de $\neg \{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$ sont établies sur base des cas qui rendent l'expression vraie et il s'agit des disjonctions des conjonctions élémentaires:

$$(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r).$$

Les FNCD de $\neg \{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$ sont établies sur base des cas qui rendent l'expression fausse et il s'agit de conjonctions de disjonctions élémentaires:

$$(\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$$

7.4.2.2. Méthode de transcription

Cette méthode d'établissement des formes normales d'une expression consiste à transcrire les connecteurs figurant dans la formule donnée à examiner de manière à n'avoir comme connecteurs que la *conjonction*, la *disjonction* et la *négation*. Cette méthode fait ainsi recours au théorème de remplacement et des tautologies énonçant la distributivité réciproque des conjonctions et des disjonctions ainsi que les lois de De Morgan; à l'élimination de la présence des parenthèses incluses les unes dans les autres par application des lois de distributivité, de simplification et éventuellement les lois de De Morgan. Autant qu'une forme normale est déjà trouvée, la suivante peut être calculée sur base de celle-là, l'on ne doit pas faire marche arrière.

Lois de simplification et de distributivité

Lois de simplification

Simplifier	par	En vertu de la loi de
$\neg \neg p$	p	La double négation
$p \vee p$	p	L'idempotence de $\vee$
$p \wedge p$	p	L'idempotence de $\wedge$
$(p \wedge q) \vee p$	p	L'absorption de q
$(p \vee q) \wedge p$	p	L'absorption de q
$(p \vee q) \vee r$	$p \vee q \vee r$	L'associativité de $\vee$
$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge q \wedge r$	L'associativité de $\wedge$

$(p \wedge q \wedge \neg q \wedge r) \vee s$	s	L'expression entre parenthèses est une antilogie, donc fausse à cause de la présence de $q \wedge \neg q$ en son sein et il ne restera que la valeur de la proposition de s qu'il faudra considérer en lieu et place de toute l'expression.
$(p \vee q \vee \neg q \vee r) \wedge s$	s	L'expression entre parenthèses est une tautologie, donc toujours vraie à cause de la présence de $q \vee \neg q$ en son sein et seule la valeur de la proposition s sera à considérer car c'est elle qui déterminera le sort de l'expression donnée à examiner.

Lois de distribution

Remplacer	par
$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \wedge r \wedge (q \vee s)$	$(p \wedge r \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge s)$
$(p \wedge s) \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \vee q) \wedge (s \vee r)$

Exemple:

Au moyen de la méthode de transcription, déterminer les formes normales de:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$1^0 \neg (p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow \neg p) \text{ (par le fait que } (p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \text{ :}$$

Voir l'inter-définissabilité des connecteurs)

$$2^0 (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$

$$3^0 (p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \text{ (élimination des parenthèses). Il s'agit de la FNDD.}$$

$$4^0 (p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p) \text{ (par distributivité). Il s'agit de la FNCD.}$$

EXERCICES II

I. Par la méthode des tables de vérité, déterminer les formes normales des expressions suivantes:

- $p \equiv \neg q$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$
- $\neg \{(p \wedge r) \equiv \neg (p \vee r)\}$

II. Par la méthode de transcription, calculer les formes normales des expressions suivantes:

- $\{p \rightarrow (p \rightarrow q)\} \rightarrow \{(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)\}$
- $q \equiv (r \vee p)$

BIBLIOGRAPHIE

- Châtelet François (Sous la direction), 1972. *La philosophie. T1 De Platon à Saint Thomas*. Paris: Librairie Hachette.
- Destouches-Feurier, 1951. *La structure des théories physiques*. Paris: PUF.
- Diderot, *Plan d'une université. Œuvres complètes*, Ed. Garnier, tome III. - Dubarle D., *Eléments de logique mathématique*
- Frege Gottlob. 1969. *Les fondements de l'arithmétique. Recherche logicomathématique sur le concept de nombre*. Traduction et introduction de Claude Imbert, Editions du Seuil.
- Gbocho Akissi 1996. *Introduction à la logique informelle*. Abidjan: Presses universitaires de Côte d'Ivoire.
- Gbocho Akissi 1998. *Introduction à la logique moderne*. Abidjan: Editions PUSAF.
- Kant Emmanuel, 1986. *Critique de la raison pure*. Traduit par Tremesaygues A. et Pacaud B., 11^{ème} édition, Paris: PUF.
- Lalande André 1929. *Les théories de l'induction et de l'expérimentation*. Paris: Boivin.
- Leif J. et Biancheri A. 1966, *Philosophie de l'éducation. Les doctrines pédagogiques par les textes*, Librairie Delagrave.
- Meigne Maurice, 1964. *Recherches sur la Logique de la pensée créatrice en mathématique*. Paris: Blanchard.
- Nève de Mévergnies Paul 1939. *Leçons de Logique*. 5^{ème} édition. Liège : Fernand Gothier.
- Roure Marie-Louise 1967. *Eléments de logique contemporaine*. Collection sup. Paris: PUF.
- Salem Jean 1987. *Introduction à la logique formelle et symbolique*. Editions Nathan
- Thiry Philippe 2004. *Notions de Logique. Méthodes en sciences humaines*. 3^{ème} édition. Bruxelles: Editions De Boeck Université
- Schopenhauer Arthur, 1912. *Le monde comme volonté et comme représentation*; Trad. Burdeau Auguste. Paris: Librairie Félix Alcan.
- Verneaux Roger 1964. *Introduction à la philosophie. Introduction générale et Logique*. Paris: Beauchesne et ses fils.
- Virieux- Reymond Antoinette 1962. *La logique formelle*. Paris: PUF.