



UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
B.P. 2700

Syllabus du cours :

Introduction à l'optique guidée

Code : Phy3636

Niveau : Bac 3 Physique

Volume horaire : 45 heures

Titulaire: Dr HAVYARIMANA Claver

Année Académique 2024-2025



Table des matières

Fiche signalétique	4
Avant-propos	6
Introduction	7
Chapitre I: GUIDAGE DIELECTRIQUE	8
I.1. Structure du guide d'onde optique plan	8
I.2. Formation des modes guidées	9
I.3. Equations de Maxwell	13
I.4. La puissance propagée	16
I.5. Guide d'onde optique plan bidimensionnel	17
a) Equations fondamentales	17
b) Equations de dispersion pour les modes TE et TM	19
I.6. Guides d'onde rectangulaires	22
a) Equations fondamentales	22
b) Equations de dispersion pour les modes E_{pq}^x et E_{pq}^y	23
CHAPITRE II: LES FIBRES OPTIQUES	25
II.1 STRUCTURE, PRINCIPE ET TYPES DE LA FIBRE OPTIQUE	25
A. Approche géométrique	27
B. Approche ondulatoire	30
C. Fibres monomodes	39
II.2. ATTENUATION ET DISPERSION DE LA FIBRE	40
A. Atténuation	40
B. Dispersion	43
CHAPITRE III. Théorie de couplage de modes	46
III.1 Couplage à l'entrée	46
III.2 Couplage entre guides d'onde	48
III.3 Couplage contradictoire dans les guides d'ondes ondulés	53



CHAPITRE IV. Modélisation numérique des guides d'onde optiques	55
IV.1. Méthode des différences finies dans le domaine temporel	55
IV.1.1. Equation de base 3D	55
IV.1.2. Equation de base en 2D	58
IV.1.3 La stabilité et les conditions aux limites de FDTD	60
IV.2 La Méthode d'expansion de modes propres ou MMM	62
IV.2.1 Introduction	62
IV.2.2 Modes propres en milieu invariant en Z	64
IV.2.3 Diffusion à une interface entre deux couches	65
IV.2.4 Diffusion à un empilement de couches	67
a) Le modèle en matrice de transfert	67
b) Le modèle de la matrice de diffusion	68
IV.2.5 Champs à l'intérieur de l'empilement	69
a) dans le modèle en T	69
b) dans le modèle en S	69
Exercices	71



Fiche signalétique

Objectifs

Objectif général: A la fin de l'ECUE, l'étudiant sera capable de concevoir différents types de guides d'ondes optiques.

Objectifs spécifiques: A la fin de l'ECUE, l'étudiant sera en mesure de :

- ✓ Expliquer les concepts et les paramètres liés à la propagation de la lumière dans un guide diélectrique
- ✓ Expliquer les concepts et les paramètres liés à la propagation de la lumière dans une fibre optique
- ✓ Appliquer la théorie de couplage de mode
- ✓ Modéliser avec la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) des guides d'onde plans
- ✓ Simuler avec un logiciel donné par l'enseignant la propagation guidée de la lumière dans différents types de guides d'ondes optiques plans.

Prérequis

- ✓ Électricité et magnétisme
- ✓ Ondes
- ✓ Introduction à l'informatique

Conditions générales

- ✓ . Supports : Syllabus de l'ECUE, Ordinateurs, matériel d'illustration comme les fibres optiques
- ✓ Modalités d'organisation : Enseignement magistral (30 heures) ,Travaux Dirigés (15 heures)

Motivation

L'ECUE constitue une des ressources importantes pour un futur physicien. En effet, les physiciens s'intéressent depuis longtemps dans leurs recherches à la nature de la lumière, à sa génération et à sa détection. le domaine qui s'occupe de cela est l'optique. Si l'on se limite à la propagation guidée de la lumière, c'est l'optique guidée. Ce domaine a d'importantes applications en télécommunication, dans la fabrication de composants miniaturisés pour l'optique et pour l'opto-électronique et l'imagerie médicale.

Évaluation

Suivant le règlement académique en vigueur, il y aura les évaluations suivantes :

- ✓ Évaluation diagnostique des ressources au début de l'enseignement-apprentissage de l'ECUE ;



- ✓ Évaluation formative des compétences en développement au cours de l'enseignement-apprentissage (40%) ;
- ✓ Évaluation sommative des compétences développées à la fin de l'enseignement-apprentissage (60%).

Organisation pédagogique

Le cours alterne exposés théoriques (cours magistraux) et séances de travaux dirigés (TD) pour favoriser l'assimilation des concepts. Des simulations numériques seront introduites progressivement. Les étudiants sont invités à participer activement, à poser des questions, et à faire des travaux en groupe. La plateforme Moodle sera utilisée pour le dépôt des ressources et la remise des devoirs.

Références bibliographiques

- ✓ Katsunari Okamoto, "Fundamentals of optical waveguides, second edition", Elsevier Inc, ISBN 13: 978-0-12-525096-2, 2006
- ✓ Chen, Chin-Lin., "Foundations for guided-wave optics", ISBN-13 978-0-471-75687-3, 2006
- ✓ Taflove, S.C. Hagness, "Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method", MA: Artech House Publishers, Boston, 2005
- ✓ John B. Schneider, "Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method", www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010



Avant-propos

Ce cours d'Introduction à l'optique guidée s'inscrit dans la formation des étudiants en fin de Baccalauréat de physique. Il vise à familiariser les étudiants avec un domaine de plus en plus présent dans notre quotidien : la maîtrise de la lumière dans des structures confinées, comme les fibres optiques ou les circuits photoniques intégrés.

L'optique guidée est à la base de nombreuses applications modernes, notamment dans les télécommunications, les capteurs, l'imagerie médicale ou encore les technologies quantiques. Comprendre comment la lumière peut être confinée, transportée, modifiée et utilisée dans ces dispositifs est essentiel pour tout futur physicien intéressé par la photonique, les ondes, ou la physique appliquée.

Ce cours alternera des parties théoriques, des exercices d'application et une introduction à la modélisation numérique, afin de donner une vision complète et concrète des phénomènes étudiés. Il constitue également une base solide pour les enseignements plus avancés en optique ou en physique des matériaux.



Introduction

La lumière présente une double nature, à la fois ondulatoire et corpusculaire : elle peut être décrite comme une onde électromagnétique, mais aussi comme un flux de particules appelées *photons*. En tant qu'onde électromagnétique, elle a la particularité de pouvoir se propager dans le vide, contrairement aux ondes mécaniques qui nécessitent un support matériel.

Depuis des siècles, les physiciens s'intéressent à la nature de la lumière, à sa génération, à sa détection et à sa propagation. L'ensemble des connaissances et des techniques associées à l'étude de la lumière constitue le domaine de l'optique.

Traditionnellement, les instruments et expériences d'optique manipulent la lumière sous forme de faisceaux se propageant dans l'espace libre. Pour guider ces faisceaux, on utilise des dispositifs classiques tels que les miroirs, lentilles ou prismes. Toutefois, au 19^e siècle, avec les travaux sur la réflexion totale interne, les premières bases physiques du guidage optique ont été solidement posées. Le physicien britannique John Tyndall démontra dès 1870 que la lumière pouvait être confinée dans un jet d'eau courbé, anticipant le principe fondamental des fibres optiques.

Le 20^e siècle marque un tournant décisif avec le développement de la fibre optique moderne. Dans les années 1960, Charles Kao et George Hockham montrèrent que des fibres en silice pouvaient transporter la lumière sur de longues distances, si les pertes pouvaient être réduites. Cela valut à Kao le prix Nobel de physique en 2009. Cette avancée a révolutionné les télécommunications, permettant l'essor d'Internet à haut débit.

Outre les fibres cylindriques, d'autres structures planaires ou en ruban permettent également le guidage de la lumière. L'étude des propriétés de ces dispositifs constitue le domaine de l'optique guidée. Ce domaine est devenu incontournable dans les télécommunications, l'optoélectronique et la photonique intégrée. Du fait de la taille comparable des guides à la longueur d'onde de la lumière, les phénomènes de polarisation et les conditions aux frontières électromagnétiques jouent un rôle essentiel.

Pour analyser la propagation lumineuse dans ces milieux confinés, une approche fondée sur la théorie ondulatoire — ou optique physique — s'impose. Ce cours vise à poser les bases théoriques et pratiques nécessaires pour comprendre ces phénomènes et explorer leurs nombreuses applications technologiques.



Chapitre I: GUIDAGE DIELECTRIQUE

Le guidage diélectrique est un principe fondamental de l'optique guidée qui permet de confiner et de diriger la lumière dans des structures transparentes de petite dimension, appelées guides d'onde optiques. Ces structures reposent généralement sur une configuration à cœur et gaine : un cœur de matériau diélectrique à indice de réfraction élevé, entouré d'une gaine à indice plus faible. Ce contraste d'indice permet le confinement de la lumière par réflexion totale interne, assurant sa propagation sur de longues distances sans perte significative.

Dans un guide d'onde, la lumière ne se propage pas comme dans l'espace libre mais sous forme de modes guidés, qui sont des solutions stables des équations de Maxwell compatibles avec la géométrie du guide. Ces modes correspondent à des distributions spécifiques du champ électromagnétique transversal et longitudinal, chacun transportant une partie bien définie de l'énergie lumineuse. Leur existence et leur forme dépendent des dimensions du guide, de la longueur d'onde et du contraste d'indice.

L'étude du guidage diélectrique implique donc de comprendre : la structure géométrique du guide (planaire, rectangulaire, cylindrique...), la formation des modes à partir des équations de Maxwell avec conditions aux limites, la notion de mode fondamental et de modes d'ordre supérieur, la puissance propagée par chacun de ces modes, et les conditions de guidage telles que l'angle critique et le critère de V-number (paramètre normalisé).

Ce chapitre présente les bases théoriques du guidage dans les structures diélectriques, en s'appuyant sur des modèles simples (guide planaire symétrique et asymétrique), pour introduire progressivement les concepts essentiels à la compréhension des dispositifs photoniques modernes.

I.1. Structure du guide d'onde optique plan

Les guides d'ondes optiques sont formés par un cœur, dans lequel la lumière est confinée et la gaine qui entoure le cœur (voir Fig.1.1). L'indice de réfraction du Cœur n_1 est supérieur à celui de la gaine n_0 . Ainsi le faisceau lumineux qui est couplé à la face du gauche est confiné dans le cœur par la réflexion totale.

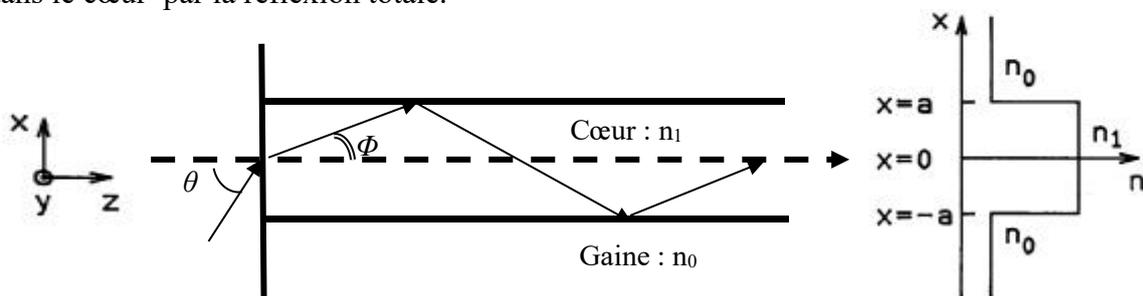


Fig.1.1 Structure de base d'un guide d'onde optique et la distribution de l'indice de réfraction

La condition pour la réflexion totale interne à l'interface Cœur – gaine est donnée par

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \geq n_0$$



Sachant que ϕ est un angle relié à l'angle d'incidence θ par $\sin \theta = n_1 \sin \phi \leq \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$, nous obtenons la condition critique pour la réflexion totale interne

$$\theta \leq \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2} \equiv \theta_{max} \quad (I.1)$$

La différence entre l'indice de réfraction du Cœur et celui de la gaine est de l'ordre de $n_1 - n_0 = 0,01$. Ainsi θ_{max} dans l'eq. (I.1) peut-être approximativement donné par

$$\theta_{max} = \sqrt{n_1^2 - n_0^2} \quad (I.2)$$

θ_{max} est l'angle maximale d'acceptance de lumière du guide d'onde est connu comme l'ouverture numérique (numerical aperture) (ON)

L'indice de réfraction relative entre n_1 et n_0 est définie comme :

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_0}{n_1} \quad (I.3)$$

Qui est communément exprimé en %. L'ouverture numérique (ON) est reliée à l'indice de réfraction relative par $ON = \theta_{max} \cong n_1 \sqrt{2\Delta}$ (I.4)

L'angle maximal pour la propagation de la lumière à l'intérieur du Cœur est de donné par $\theta_{max} \cong \frac{\theta_{max}}{n_1} \cong \sqrt{2\Delta}$

I.2. Formation des modes guidés

Nous venons de montrer le mécanisme de confinement de mode et l'angle limite ϕ . Cependant, même si l'angle est inférieur à l'angle limite ϕ , les rayons de lumière avec l'angle d'incidence arbitraires ne sont pas nécessairement guidés. Chaque mode est associé à un rayon de lumière à des angles discrets pour la propagation comme cela est expliqué dans l'analyse des ondes électromagnétiques. Ici nous décrivons la formation des modes avec le model des rayons dans un guide d'onde plan comme le montre la fig.1.2.

Considérons une onde plane se propageant le long de l'axe z avec angle d'inclinaison ϕ . Les fronts d'onde des ondes planes sont perpendiculaires aux rayons de lumière. La longueur d'onde et le nombre d'onde de la lumière dans le cœur sont respectivement $\frac{\lambda}{n_1}$ et kn_1 ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

où λ est la longueur d'onde dans le vide et la constante de propagation le long de z et x sont exprimés ($x \perp z$) par

$$\beta = kn_1 \cos \theta \quad (1.5)$$

$$K = kn_1 \sin \theta \quad (1.6)$$



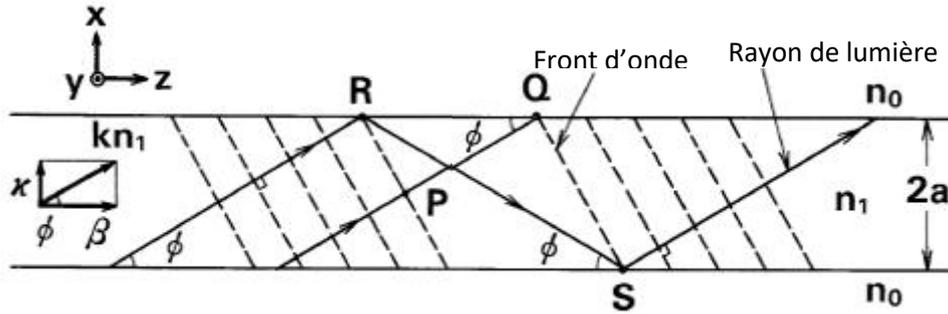
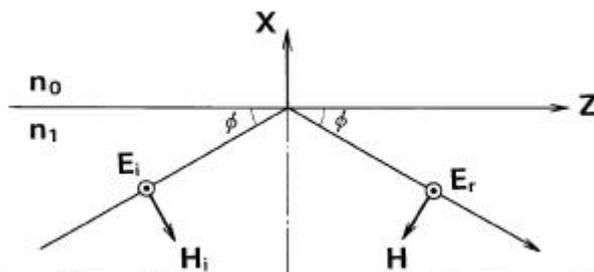


Fig.1.2. Rayons de lumière et leurs fronts de phase dans le guide d'onde

Parlons du changement de phase de rayon de lumière lorsqu'il y a réflexion totale. Le coefficient de réflexion de la lumière réfléchié totalement qui est polarisé perpendiculairement à l'onde plane incidente (Fig.1.3) est donné par :

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{n_1 \sin \phi + j \sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}}{n_1 \sin \phi - j \sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}} \quad (1.7)$$



Lumière incident A_i

Lumière réfléchi A_r

Figure 1.3 Réflexion totale d'une onde plane à une interface diélectrique

Si nous exprimons le coefficient de la réflexion $r = \exp(-j\phi)$, le montant du changement

$$\text{de phase est } \phi = -2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}}{n_1 \sin \phi} \quad (1.8)$$

$$\phi = -2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\Delta}{\sin^2 \phi} - 1} \quad \text{où (1.3) a été utilisée.}$$

Le changement de phase pour la réflexion totale de la lumière est appelé le changement Goos-Hänchen. Réflexion totale d'une onde plane à l'interface d'un diélectrique. Considérons la différence de phase entre deux rayons du même onde plane dans la figure 1.2. Le rayon PQ qui se propage de P à Q n'est pas influencé par la réflexion. D'un autre côté, le rayon RS, se propageant de R à S est réfléchié 2 fois aux interfaces en haut et en bas. Sachant que les points P et R ou les points Q et S sont dans le même front d'onde, les chemins optiques PQ et RS (incluant le changement Goos-Hänchen de phase causé par les deux réflexions totales) seront égaux ou leur différence sera un intégral multiple de 2π . Sachant que la distance entre les points Q et R est $\frac{2a}{\tan \phi} - 2a \tan \phi$ et celle entre P et Q est

$$l_1 = \left(\frac{2a}{\tan \phi} - 2a \tan \phi \right) \cos \phi = 2a \left(\frac{1}{\sin \phi} - 2 \sin \phi \right) \quad (1.9)$$

$$\text{Aussi la distance entre R et S est donnée par } l_2 = \frac{2a}{\sin\phi} \quad (1.10)$$

La condition d'égalité de phase (phase matching) pour les chemins optiques PQ et RS devient :
 $(kn_1 l_2 + 2\phi) - kn_1 l_1 = 2m\pi$ où $m \in \mathbb{N}$ (1.11)

Substituant (1.8) – (1.10) dans (1.11), nous obtenons la condition pour l'angle de propagation ϕ comme :

$$\tan\left(kn_1 a \sin\phi - \frac{m\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\Delta}{\sin^2\phi} - 1} \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) montre que l'angle de propagation d'un rayon de lumière est discret et est déterminé par la structure du guide d'onde (rayon du Cœur a , l'indice de réflexion n_1 et la différence des indices de réfraction Δ) et la longueur d'onde λ de la lumière de la source (le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$). La distribution du champ qui satisfait la condition de « phase matching » l'éq. (1.12) est appelée **mode**. La valeur permise de la constante de propagation β [éq. (1.5)] est aussi numérique et noté comme valeur propre. Le mode qui a l'angle minimal ϕ en éq. (1.12) ($m = 0$) est le *mode fondamental* ; les autres modes ayant des angles plus élevés sont ceux de l'ordre supérieur ($m \geq 1$). La figure 1.4 montre Schématiquement la formation des modes (modes stationnaires) pour a) le mode fondamental et b) les modes supérieurs respectivement par les interférences des ondes lumineuses. Sur la figure, les lignes planes représentent les fronts d'onde (+) et pointillés ceux (-) respectivement. L'amplitude du champ électrique devient maximum (minimum) au point où deux fronts d'onde positifs (négatifs) interfèrent. L'amplitude du champ électrique devient proche de zéro à l'interface cœur -gaine car les fronts d'ondes positifs et négatifs s'annulent.

Ainsi, la distribution du champ le long de la direction perpendiculaire devient ondes stationnaires et varie périodiquement le long de la direction de z avec la période

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{n_1 \cos\phi} = 2\pi/\beta$$



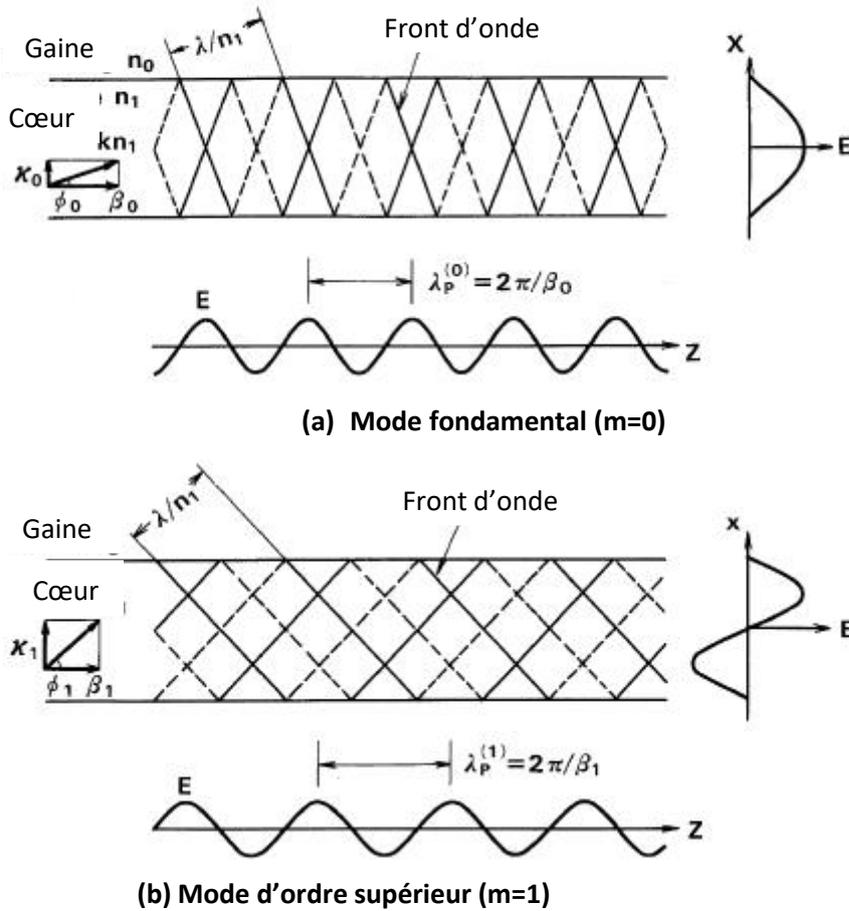


Fig.1.4. Formation des modes : a) mode fondamental, b) mode d'ordre supérieur

De la fig.1.1, $n_1 \sin \phi = \sin \theta \leq \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$, les équations (1.1) et (1.3) donnent l'angle de propagation comme $\sin \phi \leq \sqrt{2\Delta}$

Introduisons le paramètre $\xi = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2\Delta}}$ (1.13)

qui est normalisé à 1, l'égalité de phase (1.12) peut être réécrite comme

$$kn_1 a \sqrt{2\Delta} = \frac{\cos^{-1} \xi + m\pi/2}{\xi} \quad (1.14)$$

Le premier membre de (1.14) est connu comme la fréquence normalisée et est exprimée comme

$$v = kn_1 a \sqrt{2\Delta} \quad (1.15)$$

Quand nous utilisons la fréquence v , les caractéristiques de propagation des guides d'ondes peuvent être traitées en généralité (indépendamment de la structure du guide d'onde). La relation entre v et ξ (constante de propagation), l'équation (1.14) est appelée **l'équation de dispersion**. La fig.1.5 montre les courbes de dispersion d'un guide d'onde plan. Les points d'intersection entre $\eta = \left(\cos^{-1} \xi + \frac{m\pi}{2}\right)/\xi$ et $\eta = v$ donnent ξ_m pour chaque mode de nombre m de constante de propagation β_m et obtenu des éq. (1.5) et (1.13). De la figure 1.5, le mode fondamental avec $m = 0$ existe si $v < V_c = \frac{\pi}{2}$. V_c détermine la condition du guide monomode,

en d'autres termes, la condition dans laquelle les modes d'ordre supérieur sont limités (coupés) (**cut off**).

Ainsi, V_c est appelée la **valeur de coupure** (cut off value). Si nous réécrivons la condition de coupure en termes de longueur d'onde, nous avons :

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{v_c} a n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (1.16)$$

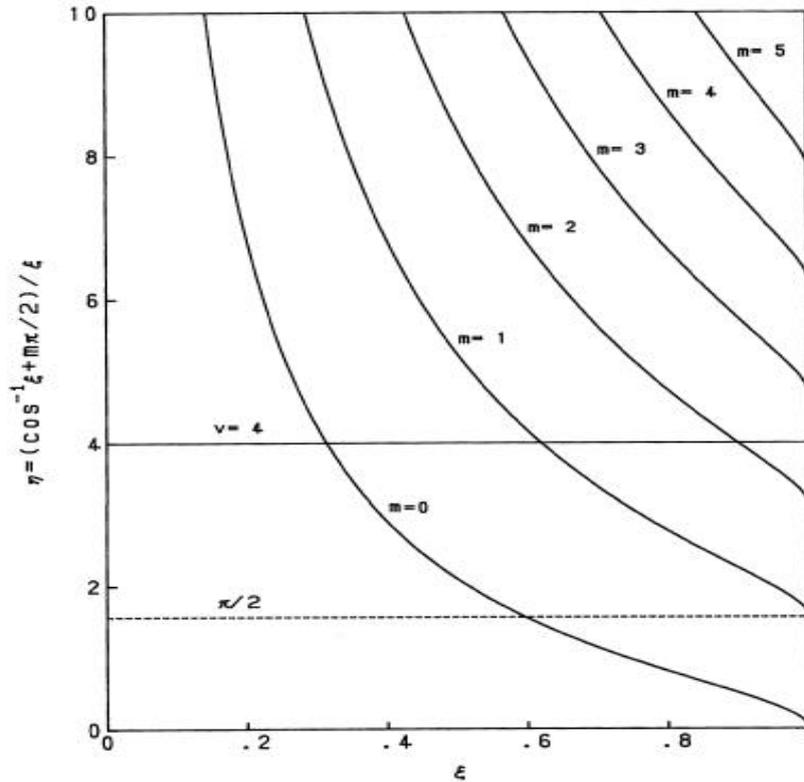


Fig.1.5. Courbes de dispersion d'un guide d'onde plan.

λ_c est appelé longueur d'onde de coupure.

I.3. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique homogène sont écrites en termes des champs électrique E et magnétique H comme :

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.18)$$

Où ε et μ représentent permittivité et perméabilité du milieu respectivement. ε et μ sont reliés aux valeurs correspondantes au vide : $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} [F/m]$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$



$$\text{par } \varepsilon = \varepsilon_0 n^2 \quad (1.19a)$$

$$\mu = \mu_0 \quad (1.19b)$$

Où n est l'indice de réfraction. Le nombre d'onde de la lumière dans le milieu est exprimé comme :

$$K = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega n \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = kn \quad (1.20)$$

Dans (1.20), ω est la fréquence angulaire des champs électromagnétiques variant sinusoïdalement par rapport au temps, k est le nombre d'onde dans le vide qui est relié à la fréquence angulaire ω par

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (1.21)$$

En (1.21), c est la vitesse de la lumière dans le vide donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (1.22)$$

des unités de ε et μ , vérifier l'unité m/s
si λ est la fréquence de l'onde,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{K} \text{ où } \omega = 2\pi f \quad (1.23)$$

Si les champs électromagnétiques E et H sont des fonctions sinusoïdales dans le temps, ils sont généralement représentés par des amplitudes complexes. Comme exemple, le vecteur champ électrique

$$E(t) = |E| \cos(\omega t + \phi) \quad (1.24)$$

où $|E|$ est l'amplitude et ϕ la phase initiale.

En définissant l'amplitude complexe comme :

$$E = |e| e^{j\phi} \quad (1.25)$$

(1.24) peut être réécrit comme

$$E(t) = R_e \left\{ E e^{j\omega t} \right\}. \quad (1.26)$$

Nous allons représenter le champ électrique par

$$E(t) = E e^{j\omega t} \quad (1.27)$$

Tout en gardant en mémoire que nous considérons la partie réelle de $E e^{j\omega t}$. Dans les manipulations mathématiques, le remplacement de (1.26) par (1.27) ne pose pas de problème sauf les manipulations qui considèrent le produit des fonctions sinusoïdales. Dans ce cas, on utilise la forme réelle de (1.24) ou les complexes conjugués.



Si nous considérons une onde électromagnétique ayant une fréquence angulaire ω et se propageant dans la direction z avec constance de propagation β , les champs sont exprimés par

$$E(r, t) = E(r)e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.28)$$

$$H(r, t) = H(r)e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.29)$$

Où r représente la position dans le plan perpendiculaire à z .

Substituant (1.28-1.29) dans (1.17-1.18), on a le système d'équations suivant en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \\ -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_y = -j\omega\varepsilon_0 n^2 E_x \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Ces équations ci-haut sont la base pour l'analyse des guides d'onde plan et rectangulaire. Pour l'analyse de la propagation d'onde dans les fibres optiques, qui sont symétriques, les équations de Maxwell sont écrites dans les coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + j\beta E_\theta = -j\omega\mu_0 H_r \\ -j\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + j\beta H_\theta = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_r \\ -j\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Les équations (1.30) – (1.31) ne représentent pas complètement le champ électromagnétique. Dans les différentes solutions possibles des équations de Maxwell, nous devons sélectionner celles qui satisfont les conditions aux bords du problème particulier. Les conditions aux bords



les plus communs ont lieu lorsqu'il y a discontinuités des constantes diélectriques (ou n) comme le montre Fig.1.1. Les composantes tangentielles des champs (électrique et magnétique) à l'interface satisfont les conditions.

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \quad (1.32)$$

$$H_t^{(1)} = H_t^{(2)} \quad (1.33)$$

Où t représente les composantes tangentielles dans les milieux 1 et 2 respectivement. Ces équations montrent que les composantes tangentielles sont continues aux interfaces des 2 milieux. Les conditions limites naturelles exigent que les champs électrique et magnétique s'annulent à l'infini.

I.4. La puissance propagée

Considérons le théorème de Gauss pour le vecteur A dans un volume V

$$\iiint_V \nabla A dV = \iint_S A \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.34)$$

Où \mathbf{n} est un vecteur unité sur la normale sortant du volume. Si nous supposons $A = E \times H$ en (1.34) et utilisant l'identité

$$\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H \quad (1.35)$$

Nous obtenons l'équation suivante pour les champs électromagnétiques

$$\iiint_V (H \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H) dV = \iint_S (E \times H) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.36)$$

Substituant équation (1.17) et (1.18) dans (1.36), on a :

$$\iiint_V \left(\epsilon E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dV = - \iint_S (E \times H) \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.37)$$

Le premier terme de l'équation (1.37)

$$\epsilon E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E \cdot E \right) \equiv \frac{\partial W_e}{\partial t} \quad (1.38)$$

représente le taux de croissance d'énergie électrique emmagasinée

$$W_e \text{ et le 2nd terme } \mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} H \cdot H \right) \equiv \frac{\partial W_h}{\partial t} \quad (1.39)$$

(1.39) représente le taux de croissance d'énergie magnétique W_h emmagasinée.

La puissance totale émergeant du volume à travers la surface S est exprimée par

$$P = \iint_S - (E \times H) \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S (E \times H) \cdot \mathbf{u}_z ds \quad (1.40)$$

L'équation (1.40) veut dire que $E \times H$ est le vecteur représentant la puissance s'écoulant, et sa composante normale à la surface $(E \times H) \cdot \mathbf{u}_z$ donne la quantité par unité de surface.

Ainsi le vecteur $E \times H$ représente la densité de puissance et



$$S = E \times H \quad (1.41)$$

est appelée **vecteur de Poynting**

Ici E et H représentent les champs à l'instant t. La moyenne de densité de puissance est trouvée dans les champs alternant. Les champs électrique et magnétique complexe sont comme ;

$$E(t) = \text{Re}\{Ee^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\{Ee^{j\omega t} + E^*e^{-j\omega t}\} \quad (1.42)$$

$$H(t) = \text{Re}\{He^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\{He^{j\omega t} + H^*e^{-j\omega t}\}$$

Où * représente le complexe conjugué. La moyenne temporelle de la composante normale du vecteur de Poynting est

$$\langle S \cdot \mu_z \rangle = \langle (E \times H) \cdot \mu_z \rangle \quad (1.43)$$

$$= \frac{1}{4} \langle [(Ee^{j\omega t} + E^*e^{-j\omega t}) \times (He^{j\omega t} + H^*e^{-j\omega t})] \cdot \mu_z \rangle$$

$$= \frac{1}{4} (E \times H^* + E^* \times H) \cdot \mu_z = \frac{1}{2} \text{Re}\{(E \times H^*) \cdot \mu_z\}$$

Où $\langle \rangle$ représente la moyenne temporelle. Ainsi la puissance moyenne est donné par :

$$P = \iint_S \frac{1}{2} \text{Re}\{(E \times H^*) \cdot \mu_z\} ds \quad (1.44)$$

Sachant que $E \times H^*$ devienne réel dans l'analyse de guide d'onde optique, la moyenne propagée dans (1.44) est exprimée par

$$P = \iint_S \frac{1}{2} (E \times H^*) \cdot \mu_z ds \quad (1.45)$$

I.5. Guide d'onde optique plan bidimensionnel

a) Equations fondamentales

L'analyse de l'onde faite ici concerne le guide d'onde bidimensionnel de la fig.1.6 dont les caractéristiques de propagation ont été expliquées.



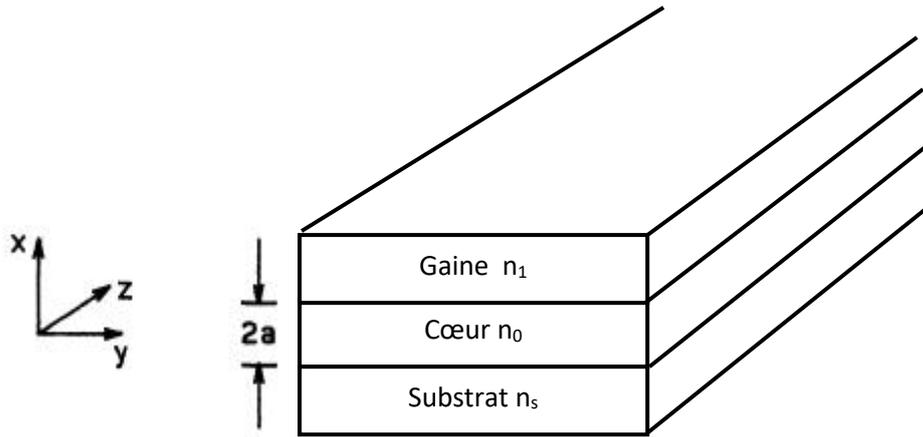


Fig.1.6 Guide d'onde optique plan

Tenant compte du fait que nous traitons le guide d'onde optique, considérons $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ et $\mu = \mu_0$ dans les équations de Maxwell (1.17-1.18).

$$\text{Comme } \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad (1.46a)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (1.46b)$$

Où n est l'indice de réfraction. Nous nous intéressons à la propagation d'une onde plane de la forme

$$\tilde{\mathbf{E}} = E(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.47a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = H(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.47b)$$

Substituant (1.47 a) et (1.47 b) dans (1.46a et 1.46 b), nous obtenons le système d'équation suivant pour les composantes du champ électromagnétique.

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \\ -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \end{cases} \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_x \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{cases} \quad (1.49)$$

Dans le guide d'onde bidimensionnel (Fig.1.6), les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{H} ne dépendent pas de l'axe y . Ainsi, nous prenons $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$. Ces relations dans (1.48) et (1.49) donnent deux modes électromagnétiques indépendants notés mode TE et mode TM respectivement.

Le mode TE satisfait l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (1.50a)$$

$$\text{Où } H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y \quad (1.50b)$$

$$H_z = -\frac{j}{\omega \mu_0} \frac{dE_y}{dx} \quad (1.50c)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (1.50d)$$

Aussi les composantes tangentielles E_y et H_z devront être continues à l'interface de deux milieux différents. Comme indiqué dans (1.50d) $E_z = 0$. Sachant que le champ électrique est dans le plan perpendiculaire à l'axe z , cette la distribution du champ électromagnétique est appelée mode TE (transverse électrique).

Le mode TM satisfait l'équation d'onde suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^2} \frac{dH_y}{dx} \right) + \left(k^2 - \frac{\beta^2}{n^2} \right) H_y = 0 \quad (1.51a)$$

$$\text{Où } E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 n^2} H_y \quad (1.51b)$$

$$E_z = \frac{j}{\omega \epsilon_0 n^2} \frac{dH_y}{dx} \quad (1.51c)$$

$$E_y = H_x = H_z = 0 \quad (1.51d)$$

Comme le montre (1.51d) le champ magnétique le long de l'axe z $H_z = 0$. Comme le champ magnétique est dans le plan perpendiculaire à l'axe z , la distribution du champ électromagnétique est appelée mode TM (Transverse magnetic)

b) Equations de dispersion pour les modes TE et TM

Les constantes de propagation et les champs électriques pour les modes TE et TM peuvent être obtenus en résolvant les équations (1.50 ou 1.51). Ici nous montrons la méthode de Calcul de l'équation de dispersion (ou équation de valeur propres) et les distributions du champ électromagnétique. Le profil de distribution de n est uniforme (Fig.1.7).

Considérant le fait que les champs électromagnétiques guidés sont confinés dans le cœur et décroissent exponentiellement dans la gaine, la distribution du champ électrique est exprimée comme

$$E_y = \begin{cases} A \cos(Ka - \phi) e^{\sigma(x-a)} & (x > a) \\ A \cos(Kx - \phi) & (-a \leq x \leq a) \\ A \cos(Ka + \phi) e^{\xi(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (1.52)$$

Où k , σ et ξ sont des nombres d'ondes le long de l'axe x dans le cœur et la gaine et sont donné par :



$$\begin{cases} K = \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \\ \sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_0^2} \\ \xi = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_s^2} \end{cases} \quad (1.53)$$

La composante E_y dans (1.52) est continue aux interfaces cœur-gaines ($x = \pm a$). Il y a une autre condition aux limites : H_z est continue aux interfaces. H_z donné en (1.50c).

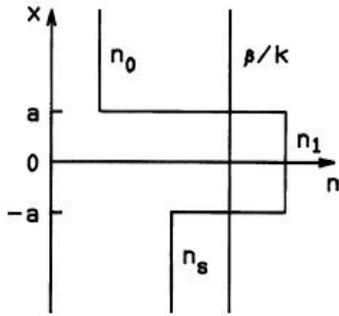


Fig.1.7. Distribution d'indice de réfraction

Négligeant les termes indépendants de x , la condition aux limites H_z est traitée par la condition de continuité de $\frac{dE_y}{dx}$:

$$\frac{dE_y}{dx} = \begin{cases} -\sigma A \cos(Ka - \phi) e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ -KA \sin(Kx - \phi) & (-a \leq x \leq a) \\ \xi A \cos(Ka + \phi) e^{\xi(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (1.54)$$

Des conditions où $\frac{dE_y}{dx}$ sont continues à $x = \pm a$, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} KA \sin(Ka + \phi) = \xi A \cos(Ka + \phi) \\ \sigma A \cos(Ka - \phi) = KA \sin(Ka - \phi) \end{cases}$$

Eliminant A , nous avons :

$$\tan(u + \phi) = \frac{w}{u} \quad (1.55a)$$

$$\tan(u - \phi) = \frac{w'}{u} \quad (1.55b)$$

où

$$\begin{cases} u = Ka \\ w = \xi a \\ w' = \sigma a \end{cases} \quad (1.56)$$

De (1.55) nous obtenons les équations aux valeurs propres :

$$u = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w'}{u} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.57)$$

$$\phi = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w'}{u} \right) \quad (1.58)$$

Les nombre d'ondes transverse normalisée u , w et w' ne sont pas indépendants. Utilisant (1.53) et 1.56), on a les équations

$$u^2 + w^2 = k^2 a^2 (n_1^2 - n_s^2) \equiv v^2 \quad (1.59)$$

$$w' = \sqrt{\gamma v^2 + w^2} \quad (1.60a)$$

$$\gamma = \frac{n_s^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_s^2} \quad (1.60b)$$

Où v est la **fréquence normalisée** définie comme en (eq. 1.15) et γ est la mesure de l'asymétrie des indices de réfraction des gaines. Si la longueur d'onde du signal lumineux et les paramètres géométriques du guide d'onde sont déterminés, les fréquences normalisées v et γ sont déterminés. Ainsi u , w , w' et ϕ sont déterminés en résolvant les équations à valeurs propres (1.57) et (1.58) sous les contraintes des équations (1.59) – (1.60). Dans le guide asymétrique $n_s > n_0$ comme le montre la fig.1.7, l'indice de réfraction élevé n_s , utilise comme indice de la gaine qui est considéré pour la définition de la fréquence normalisée v . Il est préférable d'utiliser l'indice de réfraction élevé n_s car les conditions de coupure (cut off condition) sont déterminées lorsque la constante de propagation normalisée $\frac{\beta}{k}$ coïncide avec l'indice de réfraction élevé.

Les équations (1.57), (1.59) et (1.60) sont les équations de dispersion ou équation à valeurs propres pour les modes TE_m .

Lorsque la longueur d'onde du signal lumineux et les paramètres géométriques du guide d'onde sont données, en d'autres termes si la fréquence normalisée et le paramètre asymétrique sont donnés, la constante de propagation β peut être déterminée à partir de ces équations. De la fig.1.7 et équations (1.52) et (1.53) le nombre d'onde transverse k sera un nombre réel pour que la partie principale du champ optique soit confinée dans la région de cœur . Ainsi la condition suivante sera satisfaisante.

$$n_s \leq \frac{\beta}{k} \leq n_1' \quad (1.61)$$

$\frac{\beta}{k}$ est une valeur sans dimensions et est en soit un indice de réfraction pour l'onde plane. Donc il est appelé indice effectif et est généralement exprimé comme.

$$n_e = \frac{\beta}{k} \quad (1.62)$$

Si $n_e < n_s$, le champ électromagnétique dans la gaine devient oscillatoire le long de la direction transverse ; c'est-à-dire, le champ est dissipée comme **mode de radiation**. Sachant que $\beta = kn_s$ représente la condition critique sous laquelle le champ est coupé et devient mode non guidé (mode de radiation), elle est appelée **condition de coupure**.



I.6. Guides d'onde rectangulaires

a) Equations fondamentales

Dans cette section, nous décrivons la méthode dite de Marcatili pour traiter le guide d'onde optique tridimensionnel. La supposition importante dans cette onde est que le champ électromagnétique dans la zone hachurée dans la fig.1.8 peut être négligé car le champ électromagnétique du mode bien guidée décroît rapidement dans la région de la gaine. Donc nous n'imposons pas des conditions aux limites du champ électromagnétique de la région hachurée.

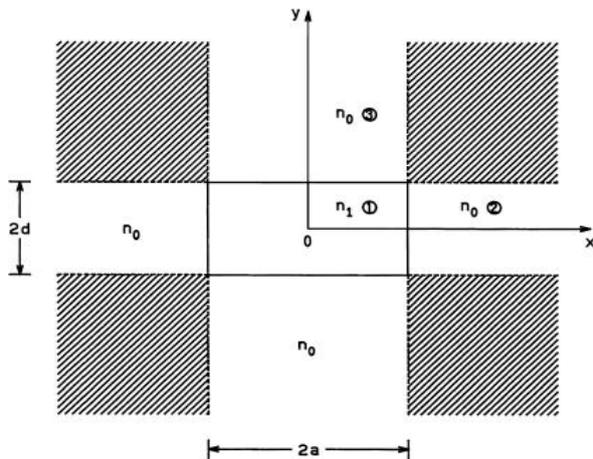


Fig.1.8. Guides d'onde rectangulaires 3 D

Nous considérons évidemment le mode électromagnétique dans lequel E_x et H_y sont prédominants. Selon le traitement de Marcatili, on pose $H_x = 0$ dans les équations (1.48) et (1.49). Donc l'équation d'onde et la représentation du champ électromagnétique sont obtenues comme :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (1.63)$$

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ E_x = \frac{\omega \mu_0}{\beta} H_y + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \\ E_y = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{-j}{\omega \varepsilon_0 n^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x} \\ H_z = \frac{-j}{\beta} \frac{\partial H_y}{\partial y} \end{cases} \quad (1.64)$$

D'un autre côté, nous posons $H_y = 0$ dans les équations (1.48) et (1.49) pour considérer le champ électromagnétique dans lequel E_x et H_y sont prédominants. L'équation d'onde et la représentation des champs électrique sont données par :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_x = 0 \quad (1.65)$$

$$\begin{cases} H_y = 0 \\ E_x = -\frac{1}{\omega \varepsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \\ E_y = -\frac{\omega \mu_0}{\beta} H_x - \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \\ E_z = \frac{j}{\omega \varepsilon_0 n^2} \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ H_z = \frac{-j}{\beta} \frac{\partial H_x}{\partial x} \end{cases} \quad (1.66)$$

Les modes dans les équations (1.63) et (1.64) sont décrits comme E_{pq}^x (p et $q \in N$) Sachant que E_x et H_y sont prédominants. D'un autre côté, les modes dans les équations (1.65) et (1.66) sont appelés E_{pq}^y sachant que E_y et H_x sont prédominants. Dans la section suivante, la méthode de résolution de l'équation de dispersion est décrite en détail pour E_{pq}^x et seuls les résultats pour le mode E_{pq}^y sont donnés.

b) Equations de dispersion pour les modes E_{pq}^x et E_{pq}^y

Sachant que le guide d'onde rectangulaire dans la fig.1.8 est symétrique par rapport aux axes x et y , nous analysons seulement les régions (1)-(3). Nous exprimons d'abord les champs solutions qui satisfont l'équation d'onde comme :

$$H_y = \begin{cases} A \cos(k_x x - \phi) \cos(k_y y - \psi) & \text{region 1.} \\ A \cos(k_x a - \phi) e^{-\gamma_x(x-a)} \cos(k_y y - \psi) & \text{region 2.} \\ A \cos(k_x x - \phi) e^{-\gamma_y(y-d)} \cos(k_y d - \psi) & \text{region 3.} \end{cases} \quad (1.67)$$

Où les nombres d'onde k_x , k_y , γ_x et γ_y et les phases optiques ϕ et ψ sont donnés par :

$$H_y = \begin{cases} -k_x^2 - k_y^2 + k^2 n_1^2 - \beta^2 = 0 & \text{region 1} \\ -\gamma_x^2 - k_y^2 + k^2 n_0^2 - \beta^2 = 0 & \text{region 2} \\ -k_x^2 + \gamma_y^2 + k^2 n_0^2 - \beta^2 = 0 & \text{region 3} \end{cases} \quad (1.68)$$

$$\begin{cases} \phi = (p-1) \frac{\pi}{2} \quad (p = 1, 2, \dots) \\ \psi = (q-1) \frac{\pi}{2} \quad (q = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (1.69)$$

Nous noterons ici que les entiers p et q commencent par 1 parce que nous suivons la définition de mode de Marcatili ; par contre le nombre de mode m dans l'équation (1.59) pour le guide d'onde bidimensionnel commence par zéro. Par la définition conventionnelle de mode, le mode le plus bas dans le guide bidimensionnel et $TE_m = 0$ (fig.1.9) qui a un seul pic de champ électrique. D'un autre côté, le plus bas mode dans le guide rectangulaire et $E_{p=1,q=1}^x$ qui a seulement champ électrique le long des directions x et y . Ainsi dans la définition de mode selon Marcatili, les entiers p et q représentent les nombres de pics de champs électriques le long des axes x et y . Si nous appliquons les conditions aux limites où le champ électrique $E_z \propto \frac{1}{m^2} \frac{\partial H_y}{\partial y}$ sera continue à $x = a$ et le champ magnétique $H_z \propto \frac{\partial H_y}{\partial y}$ sera continue à $y = d$, nous obtenons les équations de dispersions.

$$k_x a = (p-1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^2 \gamma_x}{n_1^2 k_x} \right) \quad (1.70)$$



$$k_y d = (q - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_y}{k_y} \right)$$

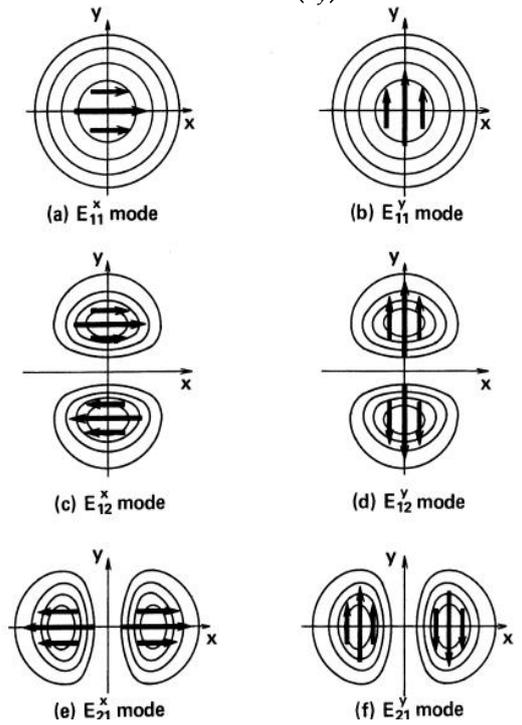


Fig.1.9 Définition de mode et distribution du champ électrique selon la méthode Marcatili.

Le nombre d'onde k_x, k_y, γ_x et γ_y sont reliés par l'équation (1.68) comme

$$\gamma_x^2 = k^2(n_1^2 - n_0^2) - k_x^2 \quad (1.71)$$

$$\gamma_y^2 = k^2(n_1^2 - n_0^2) - k_y^2 \quad (1.72)$$

k_x est obtenu à partir des équations (1.70 a) et (1.71) et k_y est déterminé des équations (1.70 b) et (1.79) respectivement. La constante de propagation

$$\beta^2 = k^2 n_1^2 - (k_x^2 + k_y^2) \quad (1.73)$$

Dans le but de calculer l'équation de dispersion pour les modes E_{pq}^y nous exprimons le champ magnétique H_x comme

$$H_x = \begin{cases} A \cos(k_x x - \phi) \cos(k_y y - \psi) & \text{region 1.} \\ A \cos(k_x a - \phi) e^{-\gamma_x(x-a)} \cos(k_y y - \psi) & \text{region 2.} \\ A \cos(k_x x - \phi) e^{-\gamma_y(y-d)} \cos(k_y d - \psi) & \text{region 3.} \end{cases} \quad (1.74)$$

En appliquant les conditions aux limites où le champ magnétique $H_z \propto \frac{\partial H_y}{\partial y}$ sera continue à $x = a$ et le champ électrique $E_z \propto \left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{\partial H_x}{\partial y}$ sera continue à $y = d$, nous obtenons les équations de dispersions.

$$k_x a = (p - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_x}{k_x} \right) \quad (1.75)$$

$$k_y d = (q - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^2 \gamma_y}{n_0^2 k_y} \right) \quad (1.76)$$

CHAPITRE II: LES FIBRES OPTIQUES

La fibre optique constitue aujourd'hui l'un des piliers de la transmission de l'information à grande vitesse, utilisée aussi bien dans les télécommunications que dans les capteurs ou les systèmes médicaux. Il s'agit d'un guide d'onde cylindrique en matériau diélectrique, généralement en silice, permettant de transporter la lumière sur de longues distances avec très peu de pertes.

Le principe de fonctionnement repose sur la réflexion totale interne, qui assure le confinement du faisceau lumineux dans le cœur de la fibre. L'étude des fibres optiques peut être abordée à deux niveaux : par une approche géométrique, qui décrit la trajectoire des rayons lumineux dans le guide à partir des lois de Snell-Descartes, et par une approche ondulatoire, plus rigoureuse, qui repose sur la résolution des équations de Maxwell pour comprendre la formation des modes guidés.

On distingue généralement deux grandes catégories de fibres : les fibres multimodes, qui peuvent guider plusieurs modes de propagation, et les fibres monomodes, qui ne guident qu'un seul mode, utilisées pour les transmissions à longue distance et à haut débit.

Le profil d'indice de réfraction du cœur influence fortement les performances de la fibre. On distingue notamment les fibres à saut d'indice, à profil constant entre le cœur et la gaine, et les fibres à gradient d'indice, où l'indice varie continuellement dans le cœur.

Cependant, la propagation dans les fibres n'est pas parfaite. La puissance transmise diminue progressivement en raison de divers phénomènes d'atténuation (absorption, diffusion, pertes de couplage, etc.). De plus, la dispersion, qu'elle soit chromatique ou intermodale, provoque un élargissement temporel des impulsions, limitant le débit d'information transmis.

Ce chapitre présente les principes fondamentaux des fibres optiques, leur classification, leur modélisation, ainsi que les principaux phénomènes physiques affectant la propagation.

II.1 STRUCTURE, PRINCIPE ET TYPES DE LA FIBRE OPTIQUE

Une fibre optique est un guide d'onde diélectrique cylindrique de matériaux à peu de perte comme le verre en silice. Elle a un cœur dans lequel se propage la lumière et entouré par la gaine d'indice de réfraction légèrement inférieur à celui du cœur.

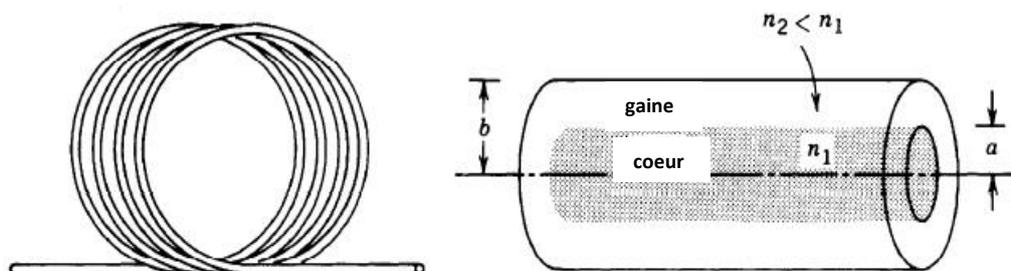


Fig.2.1 : Une fibre optique : un guide d'onde diélectrique cylindrique

Les rayons incidents sur le dioptré cœur-gaine à des angles \geq à l'angle critique subissent une réflexion totale interne et sont guidés dans le cœur sans réfraction. Les rayons de grande inclinaison par rapport à l'axe de la fibre perdent une partie de la puissance dans la gaine à chaque réflexion et ne sont pas guidés. Les applications de la fibre optique s'étendent de la communication longue distance de téléphonie et transmission des données au réseau local entre ordinateur.

Dans ce chapitre nous introduisons les principes de transmission de la lumière dans ces fibres optiques. Ces principes sont essentiellement les mêmes comme ceux appliqués dans les guides d'ondes plans diélectriques sauf qu'il s'agit ici de la géométrie cylindrique. Dans les deux cas, la lumière se propage sous formes de modes. Chaque mode se propage le long de l'axe du guide d'onde avec une constante de propagation, une vitesse de groupe, maintenant sa distribution spatiale transverse et sa polarisation. Lorsque le diamètre de la fibre est petit, seul un mode se propage et fibre est dite monomode. Les fibres à large diamètre sont dites multimodes.

Un des problèmes liés à la propagation de la lumière dans une fibre multimode réside dans le fait que les modes se propagent avec des vitesses de groupe différentes ceci résulte dans la variation de temps de propagation tel que les pulses de signaux s'élargissent en se propageant dans la fibre.

Cet effet appelé dispersion modale limite la vitesse à laquelle les pulses adjacents peuvent être transmis sans se superposer et ainsi limite la vitesse d'opération d'un système de communication à fibre optique. La dispersion modale peut-être réduite, en utilisant (une fibre à gradient d'indice. Les fibres conventionnelles sont à saut d'indice c'est à dire fibre avec indice de réfraction constant dans le cœur et dans la gaine. Celle à gradient d'indice, l'indice est maximal au centre du cœur et minimale à l'interface cœur-gaine. (Voir fig.2.2)



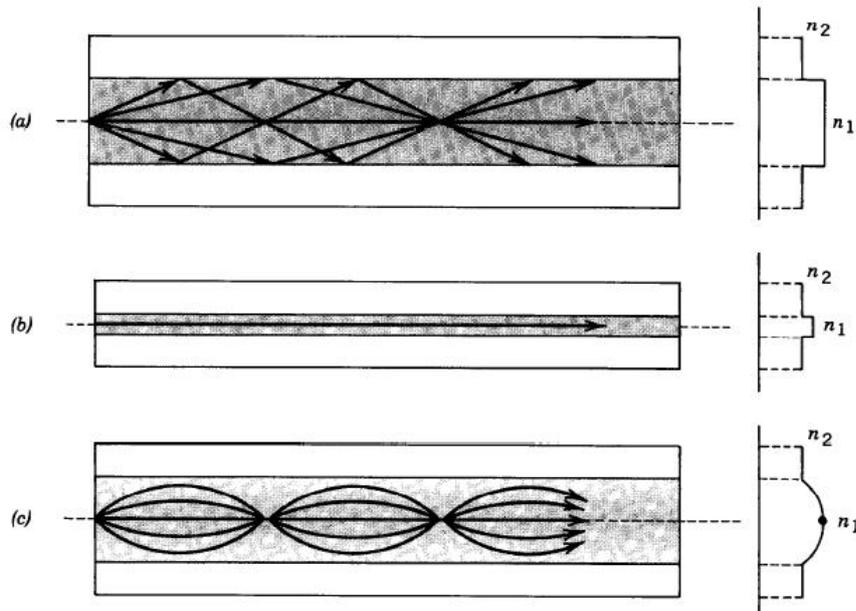


Fig.2.2 la Géométrie, le profil de l'indice de réfraction et les rayons dans a) une fibre multimode à saut d'indice, b) une fibre monomode à saut d'indice et c) une fibre multimode à gradient d'indice

Fibre à saut d'indice

Une fibre à saut d'indice est un guide d'onde cylindrique et diélectrique caractérisée par les indices n_1 et n_2 du cœur et la gaine respectivement et les rayons a et b du cœur et de la gaine. Les indices de réfraction diffèrent de peu.

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (2.1)$$

est petit ($\Delta \ll 1$)

Presque toutes les fibres utilisées dans les systèmes de télécommunication sont faites de verre de silice (SiO_2) avec une pureté élevée. La différence en indice de réfraction faite par l'ajout de faibles concentrations de matériaux dopants (titane, germanium, ou le bore, par exemple). L'indice de réfraction n_1 est compris entre 1,44 et 1,46 dépendant de la longueur d'onde et Δ est compris entre 0.001 et 0.02.

A. Approche géométrique

Un rayon optique est guidé par réflexion interne totale dans le cœur de la fibre si son angle d'incidence à l'interface cœur-gaine est supérieur à l'angle critique.

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \text{ et reste ainsi pendant la propagation}$$

La condition de guidage est simple à voir pour les rayons dans les plans passant par l'axe de la fibre (rayons méridionale comme le montre la (fig.2.3). Ces rayons coupent l'axe de la fibre et réfléchissant dans le même plan sans changer leur angle d'incidence comme s'ils étaient

dans un guide d'onde plan. Les rayons méridionaux sont guidés. Si leur angle avec l'axe de la fibre est inférieur au complément de l'angle critique.

$$\bar{\theta}_c = \frac{\pi}{2} - \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Comme $n_1 \approx n_2$, $\bar{\theta}_c$ est généralement petit et les rayons guidés sont approximativement puraxial.

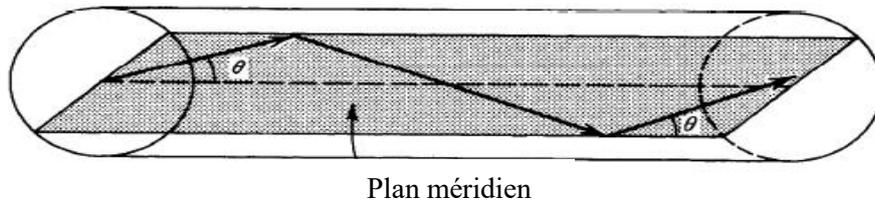


Fig.2.3. La trajectoire du rayon méridional est dans le plan passant par l'axe de la fibre. Le champ est guidé si $\theta < \bar{\theta}_c = \cos^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$

Rayon quelconque

Un rayon arbitraire est identifié par son plan d'incidence, un plan parallèle à l'axe de la fibre et passant par le rayon et par son angle avec l'axe comme illustré à la figure 2.4. Le plan d'incidence coupe l'interface cœur-gaine cylindrique à un angle ϕ avec la normale à l'interface et est à une distance R de l'axe de la fibre. Le rayon est identifié par son angle θ avec l'axe de la fibre et par l'angle ϕ de son plan. Si $\phi \neq 0$ ($R \neq 0$) Le rayon est dit quelconque. Par les rayons méridionaux $\phi = 0$ et $R = 0$.

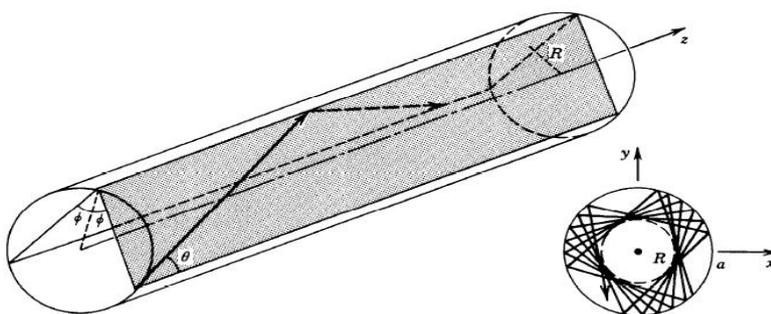


Fig.2.4 Un rayon arbitraire se réfléchit successivement sur les plans qui font même angle ϕ avec l'interface cœur-gaine et suit une trajectoire hélicoïdale confinée dans une couche cylindrique de rayon R et a . La projection du rayon sur le plan transverse (xy) est un polygone régulier, pas nécessairement fermé.

Il peut être démontré que la condition de la réflexion totale du rayon quelconque est que θ , son angle avec z , est inférieur à $\bar{\theta}_c$.

Ouverture numérique (ON)

Un rayon incident qui vient de l'air à la fibre, devient guidé si la réfraction dans le cœur, il faut un angle θ avec l'axe de la fibre inférieur à $\bar{\theta}_c$. Appliquant la loi de Snell à la région 1, $\sin \theta_a = n_1 \sin \bar{\theta}_c$ qui donne

$$\begin{aligned} \sin \theta_a &= n_1 (1 - \cos^2 \bar{\theta}_c)^{\frac{1}{2}} \\ &= n_1 \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $\theta_a = \sin^{-1} ON$ (2.2)

où $ON = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}}$ (2.3)

est l'ON de la fibre. Donc θ_a est l'angle d'acceptance de la fibre. Cet angle détermine le cône des rayons extérieurs qui sont guidés par la fibre.

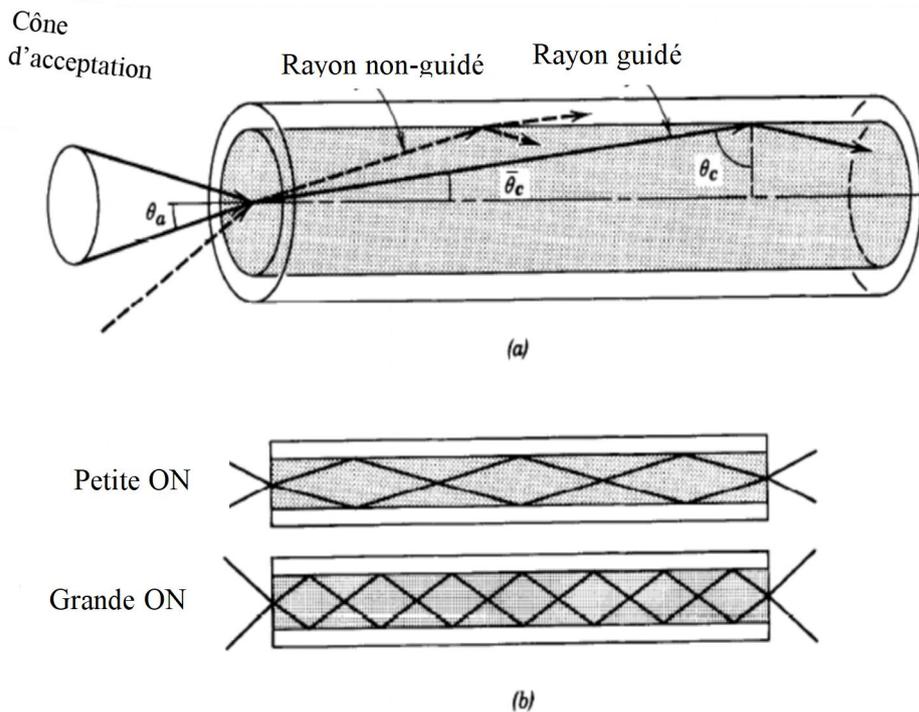


Fig.2.5 a) l'angle d'acceptance θ_a d'une fibre. Les rayons à l'intérieur du cône d'acceptance sont guidés par réflexion totale. L'ON = $\sin \theta_a$, b) la capacité de collecte de lumière pour une fibre à large ON et à petite ON. Les angles θ_a et $\bar{\theta}_c$ sont en réalité très petits.

Les rayons incidents à un angle $> \theta_a$ sont réfractés dans mais sont guidés sur une courte distance. L'ON décrit donc la capacité de la fibre à recueillir la lumière.

Exemple : Fibres avec ou sans gaines

Dans les fibres à verre de silice avec $n_1 = 1,46$, et $\Delta = \frac{(n_1 - n_2)}{n_1} = 0,01$, l'angle critique complémentaire $\bar{\theta}_c = \cos^{-1} \frac{n_2}{n_1} = 81^\circ$ et l'angle d'acceptance $\theta_a = 11,9^\circ$, correspondant à

$\overline{\text{ON}} = 0,206$. En comparaison à une fibre sans gaine, $n_1=1,46^\circ$, $n_2=1$, $\bar{\theta}_c = 46,8^\circ$, $\theta_a = 90^\circ$ et $\text{ON} = 1$. Les rayons incidents de toutes les directions sont guidés dans une fibre sans gaine car ils sont réfléchis dans un cône d'angle $\bar{\theta}_c = 46,8^\circ$ à l'intérieur du cœur. Même si la capacité de recueillir la lumière dans la fibre sans gaine est élevée, celle-ci n'est un bon guide d'onde à cause de grand nombre de modes supportés comme on le verra plus loin.

B. Approche ondulatoire

Dans cette section, nous examinons la propagation d'une onde lumineuse monochromatique dans une fibre à saut d'indice en utilisant la théorie électrique et magnétique de l'onde guidée qui satisfait les équations de Maxwell et les conditions aux limites imposées par le diélectrique cylindrique cœur-gaine comme dans tous les guides d'onde. Il y a certaines solutions spéciales, appelées modes, chacune a une constante de propagations différente, sa propre distribution du champ dans le plan transverse et deux états de polarisation indépendants.

Distributions spatiales

Chaque composante des champs électrique et magnétique doit satisfaire l'équation de Helmholtz $\Delta U + n^2 k_0^2 U = 0$ où $n = n_1$ dans le cœur ($r < a$) et $n = n_2$ dans la gaine ($r > a$) et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Nous supposons que le rayon b de la gaine est suffisamment large qu'on peut supposer infini en examinant la lumière guidée dans le cœur et proche de l'interface cœur-gaine. Dans le système des coordonnées cylindrique, l'équation d'Helmholtz est

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 U = 0 \quad (2.4)$$

où l'amplitude complexe $U = U(r, \phi, z)$ représente n'importe quelle composante cartésienne du champ électrique ou magnétique ou les composantes axiale E_z et H_z dans les coordonnées cylindriques.

Nous sommes intéressés dans la solution qui prend la forme d'ondes se propageant dans la direction z avec une constante de propagation β tq la dépendance de U en z est de la forme $e^{-j\beta z}$. Sachant que U doit être une fonction périodique d'angle ϕ avec période 2π , nous supposons que la dépendance sur ϕ est harmonique, $e^{-jl\phi}$, où l est un entier. Substituant

$$U = U(r, \phi, z) = u(r) e^{-jl\phi} e^{-j\beta z}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

dans (2.4), une équation différentielle ordinaire pour $u(r)$ est obtenu :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0 \quad (2.6)$$



L'onde est guidée si $\beta < n_1 k_0$ et $\beta > n_2 K_0$. Nous définissons donc

$$k_T^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2 \quad (2.7a)$$

et

$$\gamma^2 = \beta^2 - n^2 k_0^2 \quad (2.7b)$$

Tel que pour les ondes guidées k_T^2 et γ^2 sont > 0 et $k_T, \gamma \in \mathbb{R}$

L'équation (2.6) peut donc être écrite séparément dans le cœur et la gaine comme :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(k_T^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0 \quad (r < a) \quad \text{cœur} \quad (2.8a)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0 \quad (r > a) \quad \text{gaine} \quad (2.8b)$$

Les équations (2.8) sont des équations différentielles connus dont les solutions sont une famille des fonctions de Bessel. Excluant les fonctions qui approchent l'infini à $r = 0$ dans le cœur ou $r = a$ dans la gaine, nous obtenons les solutions limites :

$$u(r) \propto \begin{cases} J_l(k_T r), & r < a \quad (\text{cœur}) \\ k_l(\gamma r), & r > a \quad (\text{gaine}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Où $J_l(x)$ est la fonction de Bessel du 1^{er} type, et d'ordre l , et $k_l(x)$ est la fonction de Bessel modifiée du 2nd type d'ordre l . La fonction $J_l(x)$ oscille comme les fonctions sinus et cosinus mais avec une amplitude décroissante.

$$\text{A la limite } x \gg 1, J_l(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos \left[x - \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right], x \gg 1 \quad (2.10a)$$

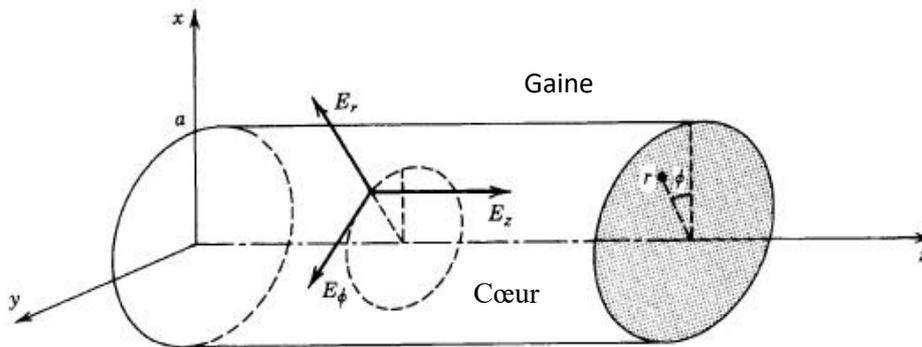


Fig.2.6 système à coordonnées cylindriques

Dans la même limite, $k_l(x)$ décroît avec x croissant à un taux exponentiel,

$$k_l(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{4l^2 - 1}{8x} \right) \exp(-x), x \gg 1 \quad (2.10b)$$

Les paramètres k_T et γ déterminent le taux de changement de $u(r)$ dans le cœur et dans la gaine respectivement une grande valeur de k_T veut dire une oscillation rapide de la distribution radiale dans le cœur. Une grande valeur γ veut dire décroissance rapide et petite

pénétration de l'onde dans la gaine. Comme on peut le voir dans (2.7), la somme des carrés de k_T et de γ est une constante,

$$k_T^2 + \gamma^2 = (n_1^2 - n_2^2)k_0^2 = ON^2 \cdot k_0^2 \quad (2.11)$$

Tel que lorsque k_T augmente, γ décroît et le champ pénètre plus en profondeur dans la gaine.

Comme $k_T > ON \cdot k_0$, γ devient imaginaire et l'onde d'être coincé (gardé) dans le cœur.

Le paramètre V

Il est convenable de normaliser k_T et γ en définissant

$$X = k_T a, \quad Y = \gamma a \quad (2.12)$$

$$\text{De (2.11), } X^2 + Y^2 = V^2 \quad (2.13)$$

Où $V = ON \cdot k_0 a$, d'où on a :

$$V = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} ON \text{ paramètre V} \quad (2.14)$$

V est un important paramètre qui gouverne le nombre de modes de la fibre et ses constantes de propagation. Il est appelé paramètre de la fibre ou paramètre V. Il convient de rappeler que une onde est guidée si $X < V$

Modes

Nous considérons maintenant les conditions aux limites. Nous écrivons d'abord les composantes axiales des amplitudes complexes des champs électrique et magnétique E_z et H_z dans la forme (2.5). La condition que les composantes doivent être continuées à l'interface cœur-gaine ($r = a$) établie la relation entre

Les coefficients de propagation dans (2.9) tel que nous avons un seul inconnu de E_z et de 1 seul inconnu de H_z . En utilisant les équations de Maxwell

$$\int \omega \epsilon_0 n^2 E = \nabla \times H \text{ et } -j\omega \mu_0 H = \nabla \times E.$$

Les 4 composantes restantes E_ϕ , H_ϕ , E_r et H_r sont déterminées en terme de E_z et H_z . La continuité de E_ϕ et H_ϕ à $r = a$ donne deux autres équations. Une équation en rapport avec 2 coefficients de proportionnalité inconnus en E_z et H_z ; une autre donne la condition plus que la constante de propagation β doit être satisfaite. Cette condition appelée équation caractéristique ou relation de dispersions, est une équation par β avec le rapport $\frac{a}{\lambda_0}$ et les

indices de la fibre n_1, n_2 comme paramètre inconnus.

Pour chaque indice l'azimutal, l'équation caractéristique a des solutions multiples impliquant des constantes de propagations β_{lm} , $m = 1, 2, \dots$ chaque solution représentant un mode. Les valeurs correspondantes k_T et γ qui gouverne les distributions spatiales dans le cœur et la



gaine respectivement sont en utilisant (2.7) et sont dénoté k_{Tlm} et γ_{lm} . Un mode est alors décrit par les indices l et m caractérisant sa distribution. La fonction $u(r)$ dépend de l et m ; $l = 0$ correspond aux rayons méridionale. Il y a deux configurations indépendantes des vecteurs E et H pour chaque mode, correspondant à deux à états de polarisation.

Equation caractéristique pour une fibre de guidage faible

La plupart des fibres sont de guidage faible ($n_1 \sim n_2 \Delta \ll 1$) tel que les rayons guidés sont paraxial (approximativement perpendiculaire à l'axe de la fibre). Les composantes longitudinales des champs électrique et magnétique sont alors plus faibles que cette transverse (TEM). La polarisation linéaire dans direction X et Y forment donc les résultats de polarisation orthogonale. La mode linéairement polarisés (l, m) est généralement noté comme LP_{lm} . Les deux polarisations de mode (l, m) se propagent avec la même constant de propagation et ont la même distribution spatiale.

Pour les fibres à guidage faible, l'équation caractéristique obtenue en utilisant la procédure précédente est approximativement équivalente à la condition tel que approximativement équivalente à la condition tel que la fonction scalaire $u(r)$ dans (2.9) est continue et a une dérivée continue à $r = a$.

Ces deux conditions ont satisfait si

$$\frac{(k_T a) J_l(k_T a)}{J_l(k_T a)} = \frac{(\gamma a) K_l(\gamma a)}{K_l(\gamma a)} \quad (2.15)$$

Les dérivées J_l et K_l des fonctions de Bessel satisfont les identités

$$J_l'(x) = \pm J_{l\mp 1}(x) \mp l \frac{J_l(x)}{x}$$

$$K_l'(x) = -K_{l\pm 1}(x) \mp l \frac{K_l(x)}{x}$$

En substituant ces identités dans (2.15) et utilisant les paramètres normalisés $X = k_T a$ et $Y = \gamma a$, nous obtenons l'équation caractéristique

$$X \frac{J_{l\pm 1}'(x)}{J_l'(x)} = \pm Y \frac{K_{l\pm 1}'(y)}{K_l'(y)} \quad (2.16)$$

$X^2 + Y^2 = V^2$ équation caractéristique

Etant donné V et l , l'équation caractéristique équation caractérisé viable inconnue X (comme $Y^2 = V^2 - X^2$). Notez que $J_{-l} = (-1)^l J_l(x)$ et $J_{-l}(x) = K_l(x)$, tel que s'il l est remplacé avec $-l$, l'équation reste inchangée. L'équation caractéristique peut être résolue graphiquement en dessinant ses **membres** de gauche et de droite par rapport à x et en trouvant



les intersections. Comme le montre la fig.2.7 pour $l = 0$, le membre de gauche a des branches multiples et membre de droite décroît monotonement avec x jusqu'à s'annuler à $x = V$ ($y = 0$). Il y a donc multiples intersections dans l'intervalle $0 < X \leq V$. Chaque point d'intersection correspond à un mode de la fibre avec valeur différente de X . Une fois X_{lm} trouvé, les constantes de propagation correspondantes K_{Tlm} , les paramètres, de décroissance γ_{lm} , les constantes de propagation β_{lm} , et les fonction de distribution radiales $U_{lm}(r)$ seraient déterminé par usage de (2.12), (2.7) et (2.9).

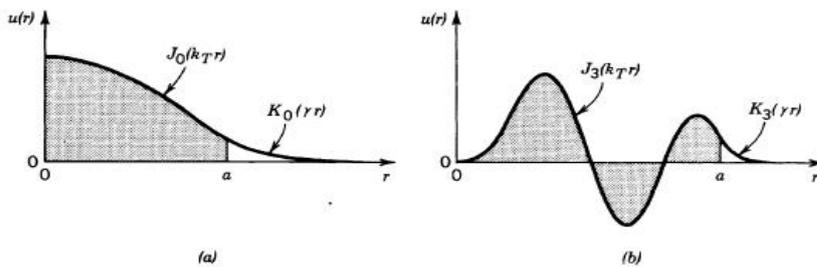


Fig.2.7 Exemples de distributions radiales de $u(r)$ donnée par éq.2.9 pour a) $l=0$ et b) $l=3$. Partie hachurée représente le cœur de la fibre et celle non hachurée la gaine. Les paramètres k et γ et les deux constantes de proportionnalité dans 2.9 ont été sélectionnées de telle manière que $u(r)$ et sa dérivée soient continués à $t=a$. Les valeurs élevées de k et γ impliquent un nombre élevé d'oscillations de $u(r)$

Chaque mode a une distribution radiale différente celle par exemple montrée à la figure 2.7 correspond au mode LP_{01} ($l = 0, m = 1$) dans une fibre avec $V = 5$ et le mode LP_{34} ($l = 3, m = 4$) dans une fibre avec $V = 25$. Comme les modes (l, m) et $(-l, m)$ ont même constante de propagation. Il est intéressant d'examine la distribution spatiale de leur superposition. La somme des amplitudes complexe est proportionnelle à $l_m \mu l_m \cos \phi \exp(-j\beta l_m z)$. L'intensité, qui est proportionnelle à $u_{lm}^2(r) \cos^2 \phi$ est illustrée à la figure 2.8 pour les modes LP_0 , les même montrée à la figure 2.7.

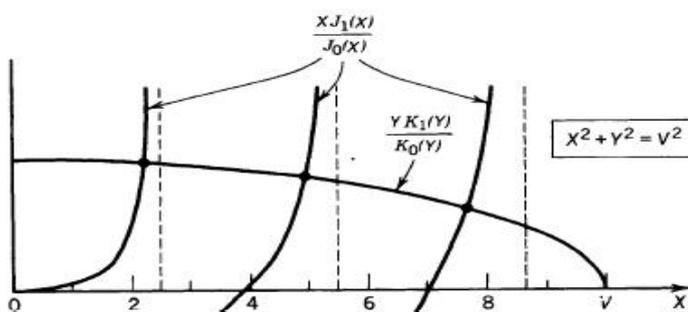


Fig.2.8 construction graphique pour la résolution de l'équation caractéristique 2.16.

Les côtés gauches et droits sont dessinés comme fonction de X et les intersections sont les solutions.

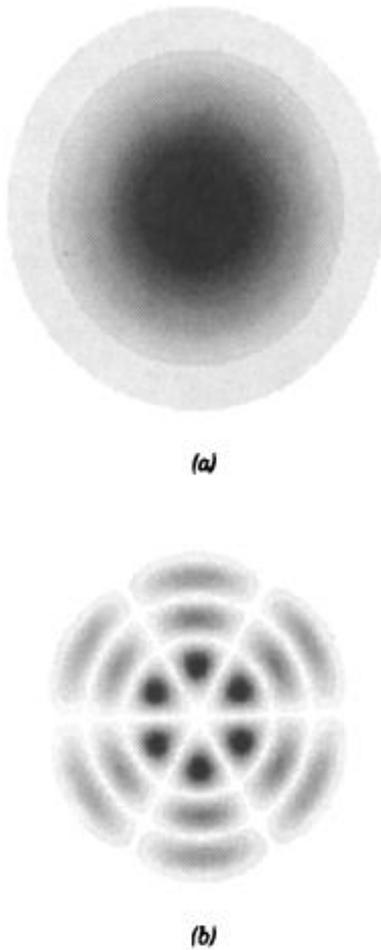


Fig.2.9 Distributions de l'intensité des modes a) LP_{01} et b) LP_{34} dans le plan transverse en supposant la dépendance azimutale de $\cos l\Phi$. Le mode fondamentale LP_{01} a une distribution similaire à celle du faisceau gaussien

Coupage de mode et nombre de modes

Il est évident que de la figure 2.8., si V augmente, le nombre d'interactions (modes) augmente sachant que le membre de gauche de l'équation caractéristique (2.16) est indépendant de V , alors que le membre de droite se déplace vers à droite si V augmente. En considérant le signe (-) de l'équation caractéristique, ce membre de gauche croise (coupe) les abscisses lorsque $J_{l-1}(x) = 0$. Ces racines sont notées x_{lm} , $m = 1, 2, \dots$

Le nombre de modes M_l est ainsi égal au nombre de racines de $J_{l-1}(x)$ qui sont $< V$. Le mode (l, m) est permis si $V > X_{lm}$. Le mode atteint donc point de coupure lorsque $V > X_{lm}$. Comme V décroît rapidement, le mode $(l, m - 1)$ atteint aussi, son point de coupure lorsqu'une nouvelle racine est atteinte, ainsi de suite. La racine la plus petite de $J_{l-1}(x)$ est $X_{01} = 0$ pour $l = 0$ et la suivante plus petite est $X_{11} = 2.405$ pour $l = 1$. Lorsque $V < 2.405$, tous les modes à l'exception du mode fondamental LP_{01} sont coupés. La fibre est alors utilisée

comme un guide monomode. La figure qui montre les modes M_l comme $f(x)$ est une fonction en escalier croissante par unité à chaque racine X_{lm} de la fonction de Bessel $J_{l-1}(x)$. Quelques racines sont données dans le tableau 2.1.

Tableau1 : Paramètre de coupure V pour ces modes LP_{0m} et LP_{1m}

L	m:	1	2	2
0		0	3.832	7.016
1		2.405	5.520	8.654

Le nombre total de modes M par rapport au paramètre V de la fibre $V = 2\pi \left(\frac{a}{\lambda_0} \right) \text{ON}$. Inclus dans le comptage, deux polarités hélicoïdale pour chaque mode avec $l > 0$ et deux polarisations pour chaque mode. Pour $V < 2.405$, il y a un seul mode, le mode fondamental LP_{01} avec deux polarisations. La courbe en pointillé est la relation $M = \frac{4V^2}{\pi^2} + 2$ qui donne une formule approximative du nombre de modes lorsque $V \gg 1$.

La décomposition du nombre total de mode M (pour tout l) est montrée sur la figure 2.9 comme fonction de V. C'est une fonction les escaliers avec saut à chaque racine de $J_{l-1}(x)$. Chaque racine doit être comptée deux fois car pour chaque mode de l'indice azimutal $l > 0$, il y a un mode $-l$ correspondant identique sauf pour une polarité opposée de l'angle ϕ (correspondant au rayon avec trajectoires hélicoïdal de sens opposés) comme on peut le voir en utilisant le signe (+) dans l'équation caractéristique. De plus, chaque mode a deux états de polarisation et doit être compté deux fois.

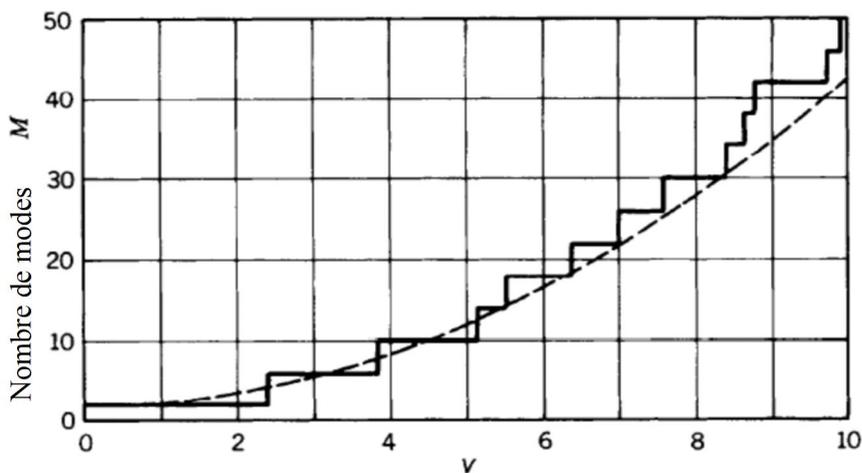


Fig.2.10 Nombre total de modes par rapport au paramètre V
Nombre de modes (fibres avec grand paramètre V)

Pour les fibres avec grands paramètres V , il y a un grand nombre de racines de $J_l(x)$ dans l'intervalle $0 < X < V$. Sachant que $J_l(x)$ est approximée par la $f(x)$ sinusoidal dans (2.109) lorsque $X \gg 1$, ses racines X_{lm} sont approximativement données par $X_{lm} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) = (2m - 1) \left(\frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire $X_{lm} = \left(l + 2m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$, tel que les points de coupures des modes l, m qui sont des racines de $J_{l\pm 1}(x)$ sont

$$X_{lm} \approx \left(l + 2m - \frac{1}{2} \pm 1\right) \frac{\pi}{2} \approx (l + 2m) \frac{\pi}{2}, \quad l = 0, 1, \dots; \quad m \gg 1 \quad (2.17)$$

Si m est grand.

Pour l fixé, ces racines sont séparées uniformément à une distance π , tel que le nombre de racines M_l satisfait $(l + 2M_l) \frac{\pi}{2} = V$ ce qui donne $M_l \approx \frac{V}{\pi} - \frac{l}{2}$. Ainsi M_l chute linéairement avec l'augmentant l , commençant avec $M_l \approx \frac{V}{\pi}$ pour $l = 0$ et terminant à $M_l = 0$ lorsque

$l = l_{max}$, où $l_{max} = \frac{2V}{\pi}$ comme le montre Fig.2.11. Donc le nombre total de mode est

$$M \approx \sum_{l=0}^{l_{max}} M_l = \sum_{l=0}^{l_{max}} \left(\frac{V}{\pi} - \frac{l}{2}\right).$$

Sachant que le nombre de termes dans la somme est supposé grand, il peut être évalué par l'approximant à l'aire de la surface du triangle dans la figure 2.11,

$M \approx \frac{1}{2} \left(\frac{2V}{\pi}\right) \left(\frac{V}{\pi}\right) = \frac{V^2}{\pi^2}$. Pour 2 degrés de liberté pour $l(+)$ et $l(-)$ et deux polarisation pour chaque indice (l, m) , nous obtenons.

$$M \approx \frac{4}{\pi^2} V^2 \quad (2.18)$$

nombre de modes $(V \gg 1)$

La figure 2.11 considère les indices des modes guidés de $m = 1$ à $m \approx \frac{V}{\pi} - \frac{l}{2}$ et de $l = 0$ à $\approx \frac{2V}{\pi}$

La constante de propagation (fibres avec paramètres V grand)

Les constantes de propagation peuvent être déterminés en résolvant l'équation (2.16) pour X_{lm} et utilisant (2.7a) et (2.12) pour obtenir

$\beta_{lm} = \left(n_1^2 k_0^2 - \frac{x_{lm}^2}{a^2}\right)^{1/2}$. Un nombre de formules approximatives pour X_{lm} applicable dans certains limites sont valables dans la littérature, mais il n'y a pas de formule, explicité.

Si $V \gg 1$, l'approximation circulaire est de supposer que X_{lm} sont égaux aux valeurs de coupure X_{lm} ceci est équivalent de supposer que les branches dans la fig.2.8 sont les lignes



approximativement verticales tel que $X_{lm} \approx X_{lm}$. Sachant que $V \gg 1$, la majorité des racines seront grandes et l'approximation dans (2.17) serait utilisés pour obtenir

$$\beta_{lm} \approx \left[n_1^2 k_0^2 - (l+2m)^2 \frac{\pi^2}{4a^2} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

$$\text{Sachant que } M \approx \frac{4}{\pi^2} V^2 = \frac{4}{\pi^2} ON^2, a^2 k_0^2 \approx \frac{4}{\pi^2} (2n_1^2 \Delta) k_0^2 a^2 \quad (2.20)$$

(2.19) et (2.20) donnent

$$\beta_{lm} \approx n_1 k_0 \left[1 - 2 \frac{(l+2m)^2}{M} \Delta \right]^{1/2}$$

Comme Δ est petit, nous utilisons l'approximation $(1+\delta)^{1/2} \approx 1 + \frac{\delta}{2}$ pour $|\delta| \ll 1$ et

Fig.2.12 : a) constantes de propagation approximés des modes des fibres avec paramètre V grand comme fonction des indices l et m .

b) La constants de propagation β_{01} du mode fondamental LP_{01} comme fonction de paramètre

$$V. \text{ Pour } V \gg 1, \beta_{01} \sim n_1 k_0. \text{ on obtient } \beta_{lm} \approx n_1 k_0 \left[1 - \frac{(l+2m)^2}{M} \Delta \right] \quad (2.22)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, \sqrt{M}$$

$$m = 1, 2, \dots, (\sqrt{M} - l)/2$$

$$v \gg 1$$

Si $l+2m$ varient entre 2 et $\frac{2V}{\pi} = \sqrt{M}/\beta_{lm}$ varient approximativement entre $n_1 k_0$ et $n_1 k_0 (1 - \Delta) \approx n_2 k_0$ comme dans la figure 2.12.

Vitesse de groupe (fibre avec paramètre V grand)

Pour déterminer la vitesse de groupe, $V_{lm} = \frac{d\omega}{d\beta_{lm}}$ du mode (l, m) nous exprimons

β_{lm} comme une fonction explicite de ω en substituant

$$\begin{aligned} n_1 k_0 &= \frac{\omega}{c} \text{ et } M = \left(\frac{4}{\pi^2} \right) (2n_1^2 \Delta) k_1^2 a^2 \\ &= \left(\frac{8}{\pi^2} \right) a^2 \omega^2 \Delta / c^2 \end{aligned}$$

Dans (2.22) et que poser que c_1 et Δ sont indépendants de ω la dérivée $\frac{d\omega}{d\beta_{lm}}$ donne

$$V_{lm} \approx c_1 \left[1 + \frac{(l+2m)^2}{M} \Delta \right]^{-1}$$

Comme $\Delta \ll 1$, l'expression approximative

$$(1+\delta)^{-1} \sim 1 - \delta \text{ si } |\delta| \ll 1, \text{ donne}$$

$$V_{lm} \approx c_1 \left[1 - \frac{(l+2m)^2}{M} \Delta \right] \quad (2.23)$$



Vitesse de groupe ($V \gg 1$)

Parce que les valeurs minimales et max de $(l + 2m)$ sont $2\sqrt{M}$, respectivement, et comme $M \gg 1$, la vitesse de groupe varie approximativement entre c_1 et $c_1(1 - \Delta) = c_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Donc les vitesses de groupes des modes de petit ordre sont approximativement égales à la vitesse de phase du cœur et celles des modes d'ordre élevé sont petites.

C. Fibres monomodes

Comme on l'a déjà un précédemment, une fibres avec un rayon a et une ouverture numérique ON opère comme monomode dans le mode fondamental LP_{01} si $V = 2\pi(a/\lambda_0)ON < 2,405$. L'opération monomode est faite en utilisant un petit diamètre du cœur et petite ON ($n_2 \sim n_1$) ou par utilisation de longue longueur d'onde. Le mode fondamental a une distribution spatiale similaire à la gaussienne et une constante de propagation β qui dépende de V . Ce mode donne un grand confinement de l'énergie lumineuse dans le cœur.

Exemple : Opération monomode

Une fibre en verre de silice avec $n_1 = 1,447$ et $\Delta = 0,01$ ($ON = 0,205$) opère à $\lambda_0 = 1,3 \mu m$ comme fibre monomode si $V = 2\pi(a/\lambda_0)ON < 2,405$ c'est-à-dire si le diamètre $2a < 4,86 \mu m$. Si Δ est réduit à $0,0025$, l'opération monomode nécessite un diamètre $2a < 9,72 \mu m$.

Il y a beaucoup d'avantages d'utilisation de fibres monomodes dans les systèmes de télécommunication. Les modes dans les fibres multimodes se propageant à des vitesses de groupes différentes subissent la dispersion modale comme on le verra dans la section suivante. Ce problème n'a pas lieu dans une fibre monomode. D'autres types de dispersion qui ont lieu dans une fibre monomode mais ne sont pas aussi importantes que celle intermodale. Le problème d'atténuation que l'on verra dans la section suivante est négligeable par rapport à celui qui a lieu dans une fibre multimode. Ceci avec la petite dispersion de mode, fait qu'une fibre monomode transmet plus de données qu'une fibre multimode.

Une autre difficulté avec fibres multimode et le bruit modal causé par les interférences des modes. Les changements de phase des modes dus aux imperfections ou changement de températures causent ces interférences et préviennent des bruits. Dans une fibre monomode, il y a un seul chemin et ainsi pas de bruit modal.



A cause de leur petite taille et petite ouverture numérique, les fibres monomodes sont comptables avec la technologie de l'optique intégrée.

Et utiliser à cause de leur limite manipulation pour connecter avec les connecteurs et coupleurs d'énergie.

II.2. ATTENUATION ET DISPERSION DE LA FIBRE

L'atténuation et la dispersion limitent la performance du milieu de la fibre optique comme canal de transmission des données.

L'atténuation limite l'intensité de la puissance transmise tandis que la dispersion limite le taux de transmission des données à travers fibre sachant qu'elle est responsable de la dispersion des signaux transportant les données.

A. Atténuation

Le coefficient d'atténuation

L'intensité de la lumière qui se propage dans une fibre en verre décroît exponentiellement en fonction de la distance, résultat de l'absorption et la diffusion. Le coefficient d'atténuation est généralement défini en dB/km .

$$\alpha = \frac{1}{L} \cdot 10 \log_{10} \frac{1}{\mathcal{T}}$$

Où $\mathcal{T} = P(L)/P(0)$ est le rapport de la puissance transmise $\frac{I_t}{I_i}$ pour une fibre de longueur L en km. La relation entre α et \mathcal{T} est illustrée sur la figure suivante pour $L = 1km$.

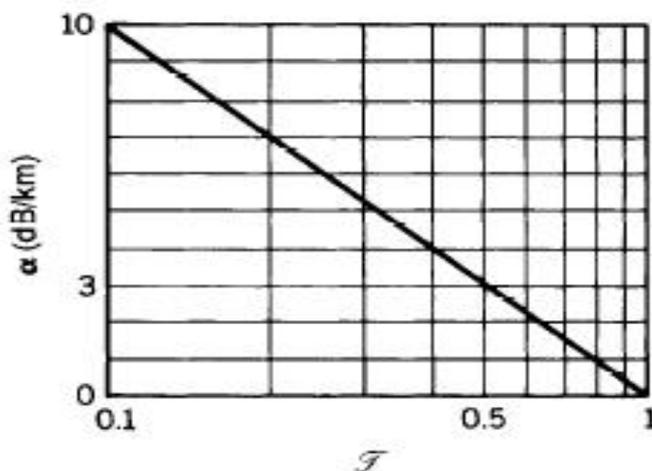


Fig. 2.11 La relation entre la transmittance \mathcal{T} et coefficient d'atténuation α en dB

Une atténuation de 3 dB par exemple correspond à $\mathcal{T} = 0,5$ au moment où 10 dB est équivalent à $\mathcal{T} = 0,1$ et 20 dB correspond à $\mathcal{T} = 0,01$ ainsi de suite.

Les pertes en dB sont additives alors que les rapports de transmission sont multiplicatives. Ainsi pour une distance de propagation de z km, la perte est αz dB et le rapport de puissance de transmission est :

$$\frac{P(z)}{P(0)} = 10^{-\alpha z/10} \approx e^{-0,23 \alpha z} \quad (2.25)$$

avec α en dB /km

Noter que si α est mesuré en km^{-1} au lieu de dB /km, alors

$$\frac{P(z)}{P(0)} = e^{-\alpha z} \quad (2.26)$$

avec $\alpha = 0,23\alpha$.

Absorption

Le coefficient du verre en silice (SiO_2) est dépendant de la longueur d'onde comme le montre la figure 2.14. Ce matériau a deux bandes de grande absorption :

- Une bande d'absorption dans l'IR moyen due aux transitions vibrationnelles.
- Une bande d'absorption dans l'UV due aux transitions électroniques et moléculaires.

Il y a une fenêtre entre ces deux bandes dans laquelle, il n'y a pas beaucoup d'absorption, c'est la région de l'IR proche.

Diffusion

La diffusion Rayleigh est un autre effet intrinsèque qui contribue à l'atténuation de la lumière dans le verre les variations de positions de molécules dans le verre.

Les variations de positions de molécules dans le verre créent des inhomogénéités de l'indice de réfraction, ce qui crée de sortes de petit centre de diffusion.

L'amplitude du champ diffusé est proportionnel à ω^2 . L'intensité diffusé est ainsi proportionnelle à ω^2 ou $\frac{1}{\lambda^4}$ tel que courtes λ sont diffusées plus que les longues λ . Ainsi la lumière bleu est plus diffusée que le rouge (un fait similaire avec la lumière du soleil qui fait que le ciel est bleu).

L'atténuation causé par la diffusion de Rayleigh décroît donc avec λ comme $\frac{1}{\lambda^4}$, une relation connu comme la loi de Rayleigh de diffusion inversement proportionnelle à la 4^{ème} puissance de la longueur d'onde. Dans la bande visible, la diffusion de Rayleigh est plus importante que



la bande d'absorption en UV, mais elle devient négligeable en comparaison avec l'absorption dans l'IR pour les $\lambda > 1,6\mu\text{m}$.

La fenêtre transparente pour le verre en silice est donc limitée par la diffusion de Rayleigh pour le côté des courtes λ et par l'absorption IR pour le côté de longueur λ (voir fig.2.14)

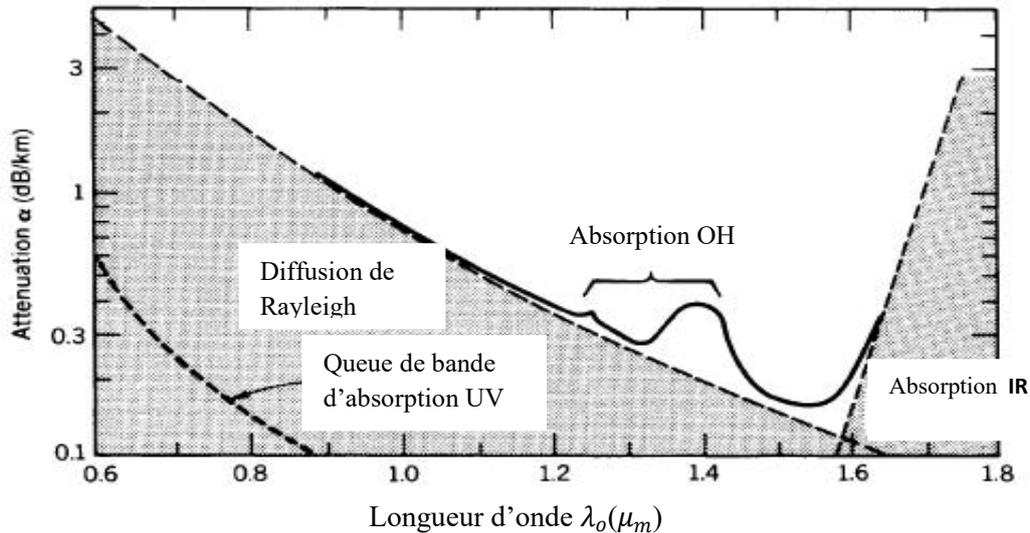


Fig.2.12 Dépendance du coefficient d'atténuation α du verre en silice sur la longueur d'onde λ_0 il y a un minimum local à 1.3 μm ($\alpha = 0.3$ dB/km) et un minimum absolue à 1.55 μm ($\alpha = 0.16$ dB/km).

Effets extrinsèques

Outre ces effets intrinsèques. Il existe des bandes d'absorption extrinsèques dues aux impuretés, principalement des vibrations OH liées à la vapeur d'eau dissoute dans le verre et des impuretés d'ions métalliques. Les progrès récents dans la technologie de fabrication des fibres a permis d'éliminer la plupart des impuretés métalliques mais les impuretés OH sont difficiles à éliminer. Les λ auxquelles les fibres en verre sont utilisées pour la communication optique sont sélectionnées pour éviter ces bandes d'absorption. Les pertes dues à la diffusion de la lumière peuvent être accentuées lorsque des dopants sont ajoutés à des fins de faire une fibre à gradient d'indice par exemple.

Le coefficient d'atténuation de la lumière guidée dans les fibres en verre dépend de l'absorption et de dispersion dans le cœur et les matériaux de la gaine, étant donné que chaque mode a une différente profondeur de pénétration dans la gaine de sorte que les rayons parcourent différentes distances effectives, le coefficient d'atténuation dépend du mode. Il est généralement plus élevé pour les modes d'ordre supérieur. Les fibres monomodes ont donc typiquement des coefficients d'atténuation plus faibles que les fibres multi modes. Les pertes

sont également introduites par de petites variations aléatoires de géométrie de la fibre et par les courbures.

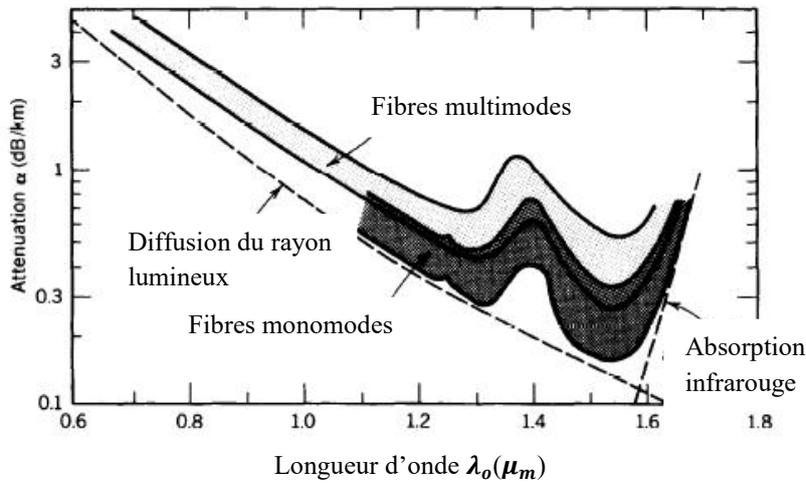


Fig.2.13 Ordre d'atténuation des coefficients des fibres monomodes et multi modes en silice

B. Dispersion

Si un pulse court de lumière traverse une fibre optique, sa puissance est dispersée dans le temps tel que le pulse s'étale sur un long intervalle de temps. Il y a quatre sources de dispersion dans les fibres optiques.

- Dispersion modale
- Dispersion matérielle
- Dispersion du guide d'onde
- Dispersion non linéaire

1° Dispersion modale (DM)

La DM a lieu dans une fibre multimode comme résultat de différences de vitesse de groupes des modes une simple impulsion de lumière entrant une fibre M-mode à $z = 0$ s'étale à M pulses avec un retard qui augmente en fonction de z pour une fibre de longueur L , le retard est dû aux modes fonctions

$\tau_q = \frac{L}{v_q}$, $q = 1, \dots, \mu$, ou v_q est la vitesse de groupe par un mode q . Si v_{min} et v_{max} sont très grand. Dès que les modes ne sont pas généralement excité de la même manière, la forme globale du signal a le profil est montrée à la figure 2.14.

$\frac{L}{v_{min}} - \frac{L}{v_{max}}$ est l'intervalle de temps où le signal va changer de forme.

Dans une fibre à saut d'indice avec un grand nombre de modes

$$V_{min} \sim c_1(1 - 0) \text{ et } V_{max} \sim c_1$$

Sachant que $(1 - \Delta)^{-1} \approx 1 + \Delta$, le temps de réponse est

$$\sigma_\tau \sim \frac{L}{c_1} \frac{\Delta}{2} \quad (2.27)$$

C'est-à-dire que c'est une fraction $\frac{\Delta}{2}$ du temps de retard $\frac{L}{c_1}$; La dispersion modale est plus réduite dans une fibre à gradient d'indice que dans celle à saut d'indice.

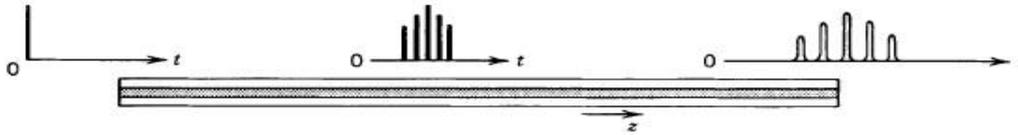


Fig.2.14 étalement de pulse causé par dispersion modale

2 Dispersion matérielle

Le verre est un milieu dispersif, son indice de réfraction est fonction de la longueur d'onde.

Un pulse optique se propageant dans un milieu dispersif d'indice de réfraction n a une vitesse de groupe $v = \frac{c_0}{N}$ où $N = n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$. Comme un pulse est un paquet d'onde composé d'un

spectre de composantes de différentes longueurs d'ondes chacune se propageant à différente V_g , sa longueur s'agrandit. La largeur temporelle du pulse optique avec largeur spectrale σ_λ (nm), après avoir parcouru une distance L , est

$$\sigma_\tau = \left| \frac{d}{d\lambda_0} \left(\frac{L}{v} \right) \right| \sigma_\lambda = \left| \left(\frac{d}{d\lambda_0} \right) \frac{dN}{c_0} \right| \sigma_\lambda \text{ qui donne } \sigma_\tau = \left| D_\lambda \right| \sigma_\lambda L \text{ où } D_\lambda = - \frac{\lambda_0}{c_0} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \quad (2.28)$$

est le coefficient de dispersion matérielle la réponse temporelle augmente linéairement avec la distance L . L est mesuré en km, σ_τ en ps et σ_λ en nm tel que D_λ a comme unités ps/km.nm.

Ce type de dispersion est appelée **dispersion matérielle**.

3. Dispersion du guide d'onde

Les vitesses de groupe des modes dépendent des longueurs d'onde même si la dispersion matérielle est négligeable. Cette dépendance, connue comme dispersion du **guide d'onde**, provient de la dépendance de la distribution du champ dans la fibre sur le rapport entre le

rayon du cœur et la longueur d'onde $\left(\frac{a}{\lambda_0} \right)$. Si le rapport est modifié par modification de λ_0 ,

les portion relatives de puissance optique dans le cœur et la gaine sont modifiées. Comme les vitesses de phase dans le cœur et la gaines sont différentes, la vitesse de groupe du mode change. La dispersion du guide d'onde est particulièrement importante dans une fibre

monomode où la dispersion modale n'est pas visible et aux longueurs d'onde où la dispersion matérielle est petite ($1.13\mu\text{m}$ pour le verre de silice).

Comme discuté dans les sections précédentes, $v = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$ (vitesse de groupe) et β sont déterminées à partir de l'équation caractéristique qui est gouvernée par le paramètre V de la fibre, V de la fibre, $V = 2\pi \frac{q}{\lambda_0} ON = \frac{a \cdot (ON)}{c_0} \omega$

En l'absence de dispersion matérielle, V est directement proportionnelle à

$$\omega, \text{ tel que } \frac{1}{v} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\beta}{dV} \frac{dV}{d\omega} = \frac{a \cdot ON}{c_0} \frac{d\beta}{dV} \quad (2.29)$$

L'élargissement du pulse associé à la largeur spectrale de la source σ_λ est reliée au retard $\frac{L}{v}$

par

$$\sigma_\tau = \left| \left(\frac{d}{d\lambda_0} \right) \left(\frac{L}{v} \right) \right| \sigma_\lambda$$

$$\text{Donc } \sigma_\tau = |D\omega| \sigma_\lambda L$$

$$\text{Où } D_\omega = \frac{d}{d\lambda_0} \left(\frac{L}{v} \right) = - \frac{\omega}{\lambda_0} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v} \right) \quad (2.30)$$

est le coefficient de la dispersion du guide d'onde. Substitution (2.29) dans (2.30),

$$D_\omega = \left(\frac{1}{2\pi c_0} \right) V^2 \frac{d^2\beta}{dV^2} \quad (2.31)$$

Remarque : 1° La dispersion matérielle et celle du guide d'onde peuvent être combinées

2° La dispersion matérielle et celle modale aussi

4. Dispersion non linéaire

Cette dispersion a lieu lorsque l'intensité de la lumière dans le cœur est suffisamment élevée de telle sorte que les indices de réfraction deviennent dépendants de l'intensité et le matériel montre un comportement non linéaire.



CHAPITRE III. Théorie de couplage de modes

Dans les systèmes optiques intégrés et les réseaux de fibres optiques, la lumière doit souvent être transférée d'un guide d'onde à un autre, ou injectée efficacement dans un guide depuis une source externe. Ces processus impliquent une interaction entre les modes guidés dans différentes régions ou structures. C'est ce phénomène que l'on désigne par couplage de modes.

Le couplage peut se produire de plusieurs manières selon la configuration du système :

- ✓ À l'entrée d'un guide, le couplage désigne l'efficacité avec laquelle un mode externe (souvent issu d'un faisceau gaussien ou d'une fibre) s'injecte dans un mode propre du guide optique.
- ✓ Le couplage directionnel concerne l'interaction entre deux guides parallèles proches l'un de l'autre, où l'énergie optique peut être transférée progressivement d'un guide à l'autre par effet d'interférence entre leurs modes. Ce type de couplage est largement utilisé dans les coupleurs optiques intégrés.
- ✓ Le couplage contradirectionnel, quant à lui, met en jeu des structures périodiques (comme les réseaux de Bragg) permettant un transfert d'énergie entre deux modes de directions opposées, par réflexion sélective.

Ces différents types de couplage sont tous fondés sur l'interférence cohérente entre les modes, et leur efficacité dépend des paramètres physiques du système (distance entre guides, longueur d'interaction, correspondance des constantes de propagation, etc.).

La théorie du couplage de modes, développée notamment par A. Yariv, fournit un cadre analytique puissant pour décrire ces interactions. Elle permet de prédire l'évolution des amplitudes modales le long du guide et d'optimiser les dispositifs de transfert de puissance optique.

Ce chapitre présente les principes fondamentaux du couplage de modes dans les guides d'ondes optiques, en introduisant les modèles mathématiques associés et les applications technologiques qui en découlent.

III.1 Couplage à l'entrée

Excitation de mode

La lumière se propage dans le guide sous forme de mode. L'amplitude complexe du champ optique est généralement la superposition de ces modes.

$$E(y, z) = \sum_m a_m u_m(y) \exp(-j\beta_m z) \quad (3.1)$$

Où a_m est l'amplitude, $u_m(y)$ est la distribution transverse (réelle) et β_m la constante de propagation du mode m .

Les amplitudes des différents modes dépendent de la nature de la source utilisée pour exciter le guide d'onde. Si la source a une distribution qui correspond parfaitement à un mode du guide, seul ce mode sera excité. Une source d'une distribution arbitraire $s(y)$ excite des



modes différents par des grandeurs différentes. La fraction de puissance transférée de la source au mode m dépend du degré de similarité entre $s(y)$ et $u_m(y)$. Nous pouvons écrire

$$s(y) = \sum_m a_m u_m(y) \quad (3.2)$$

où a_l , l'amplitude du mode excité l , est

$$a_l = \int_{-\infty}^{\infty} s(y) u_l(y) dy \quad (3.3)$$

Cette expression peut être dérivée en multipliant (3.2) par $u_l(y)$ et en intégrant par rapport à y , et utilisant l'équation d'orthogonalité

$a_l = \int_{-\infty}^{\infty} u_l(y) u_m(y) dy = 0$ pour $l \neq m$ avec la condition de normalisation. Le coefficient a_l représente le degré de similarité entre la distribution de la source et celle du mode $u_l(y)$.

- Couplage à l'entrée

La lumière peut être couplée dans un guide en dirigeant la lumière à un côté comme le montre la figure 3.1.

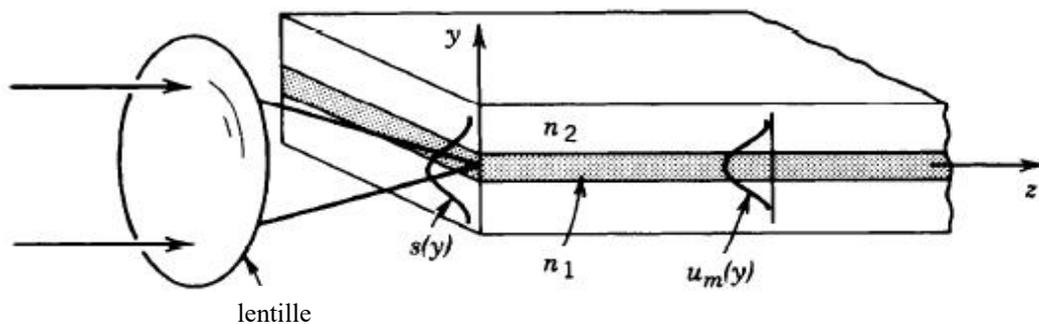


Fig.3.1 couplage d'un faisceau optique à un guide d'onde

Pour exciter un mode donné, la distribution transverse de la lumière incidente $s(y)$ devra être similaire à ce mode ; la polarisation aussi.

Dans un guide multimode, la quantité couplée peut être montrée par l'approche de l'optique géométrique (fig.3.2) (voir chapitre 2)

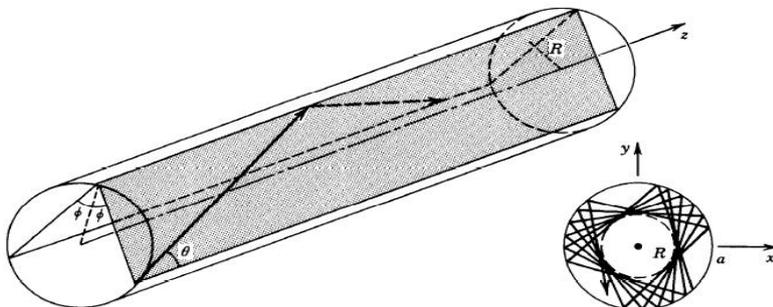


Fig.3.2 Focaliser des rayons dans un guide d'onde multimodes

III.2 Couplage entre guides d'onde

Si deux guides d'onde sont suffisamment proches de telles sortes que les champs peuvent se joindre, la lumière peut être couplée d'un guide à l'autre. La puissance optique peut être transférée entre ces guides d'onde ; cet effet peut être utilisé pour faire des coupleurs et/ou commutateurs.

Considérons deux guides plans faits par deux guides bidimensionnel de largeur d , séparés par $2a$ et d'indices n_1 et n_2 dans un milieu qui les sépare d'indice n légèrement inférieur à n_1 et n_2 comme le montre la figure 3.3.

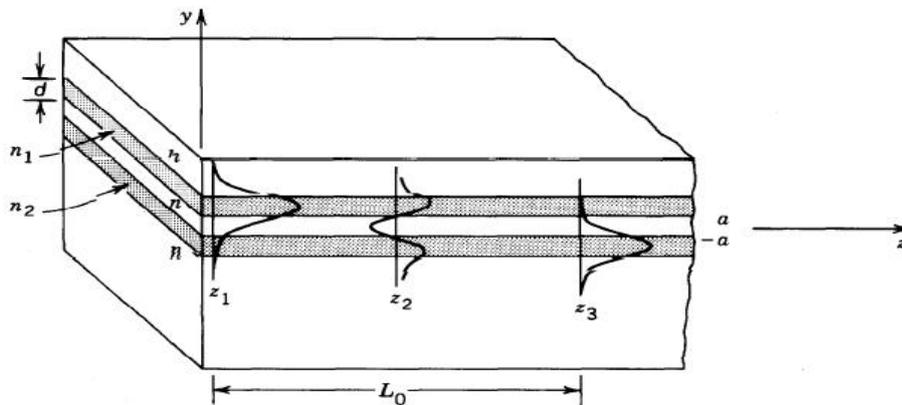


Fig. 3.3 couplage entre deux guides d'onde plan parallèles

Chaque guide est supposé monomode. La séparation des guides est telle que le champ dans un guide peut atteindre l'autre.

La théorie de couplage de modes étudiée ici est une approximation simple pour le couplage faible. Si non l'analyse rigoureuse utilise les équations de Maxwell dans les différentes régions et utilise les conditions aux limites pour trouver les modes du système.

La théorie de couplage de mode suppose que les modes de chaque guide, en l'absence de l'autre reste approximativement les mêmes, c'est-à-dire $u_1(y) \exp(-j\beta_1 z)$ et $u_2(y) \exp(-j\beta_2 z)$, et que le couplage modifie les amplitudes de ces modes sans affecter les distribution spatiales ou leur constantes de propagation. Les amplitudes des modes des guides 1 et 2 sont ainsi fonction de z , $a_1(z)$ et $a_2(z)$. La théorie a pour objectif de déterminer $a_1(z)$ et $a_2(z)$ sous les conditions aux limites appropriées. Le couplage peut être vu comme l'effet de diffusion. Le champ du guide 1 est diffusé à partir de 2, créant une source de lumière qui change l'amplitude du champ dans le guide 2, le champ du guide 2 a un effet similaire sur le guide 1. Une analyse de cette interaction mutuelle donne deux équations différentielles qui gouvernent la variation des amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$.

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dz} = -j\rho_{21}\exp(j\Delta\beta z)a_2(z) \\ \frac{da_2}{dz} = -j\rho_{12}\exp(-j\Delta\beta z)a_1(z) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{où } \Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 \quad (3.5)$$

est l'écart de phase par unité de longueur et

$$\begin{aligned} \rho_{21} &= \frac{1}{2}(n_2^2 - n^2) \frac{k_0^2}{\beta_1} \int_a^{a+d} u_1(y) u_2(y) dy \\ \rho_{12} &= \frac{1}{2}(n_1^2 - n^2) \frac{k_0^2}{\beta_2} \int_{-a-d}^{-a} u_2(y) u_1(y) dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

sont les coefficients de couplage. On voit de (3.4) que le taux de variation de a_1 est proportionnel à a_2 et vice versa. Le coefficient de couplage et le facteur d'écart de phase $\exp(j\Delta\beta z)$ supposant que l'amplitude de la lumière entrant du guide 1 est $a_1(0)$ et que pas de lumière en 2, $a_2(0)$, alors (3.4) peut être résolue dans ces conditions aux limites, et donne la solution harmonique.

$$\begin{aligned} a_1(z) &= a_1(0) \exp\left(+\frac{j\Delta\beta z}{2}\right) \left(\cos\gamma z - j\frac{\Delta\beta}{2\gamma} \sin\gamma z\right) \\ a_2(z) &= a_1(0) \frac{e_{12}}{j\gamma} \exp\left(-j\frac{\Delta\beta z}{2}\right) \sin\gamma z \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{où } \gamma^2 = \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 + \rho^2 \quad (3.8)$$

$$\text{et } \rho = (\rho_{12}\rho_{21})^{1/2} \quad (3.9)$$

Les puissances optique $P_1(z) \propto |a_1(z)|^2$ et $P_2(z) \propto |a_2(z)|^2$

Sont donc

$$P_1(z) = P_1(0) \left[\cos^2\gamma z + \left(\frac{\Delta\beta}{2\gamma}\right)^2 \sin^2\gamma z \right] \quad (\text{a}) \quad (3.10)$$

$$P_1(z) = P_1(0) \frac{|\rho_{12}|^2}{\gamma^2} \sin^2\gamma z \quad (\text{b})$$

Donc la puissance est échangée périodiquement entre les deux guides comme le montre la figure 3.5. La période est $\frac{2\pi}{\gamma}$. La conservation de la puissance exige que $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$. Si les guides sont identique $n_1 = n_2, \beta_1 = \beta_2$ et $\Delta\beta = 0$, les deux ondes guidées sont en phase et équation (3.10) deviennent.

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P_1(0) \cos^2\rho z \\ P_2(z) &= P_1(0) \sin^2\rho z \end{aligned} \quad (3.11)$$

et l'échange de puissance se fait selon la figure 3.4. Nous avons donc un instrument de couplage de puissance optique fraction voulue d'un guide à un autre. A la distance $z = L_0 = \frac{\pi}{2\rho}$ appelée longueur de transfère, la puissance est transférée complètement du guide 1 à 2



(figure 3.5). A la longueur $\frac{L_0}{2}$, la moitié de la puissance est transférée, ainsi l'instrument pour le même rôle qu'un coupleur 3-dB c'est à diviseur faisceau 50/50 (figure 3.5).

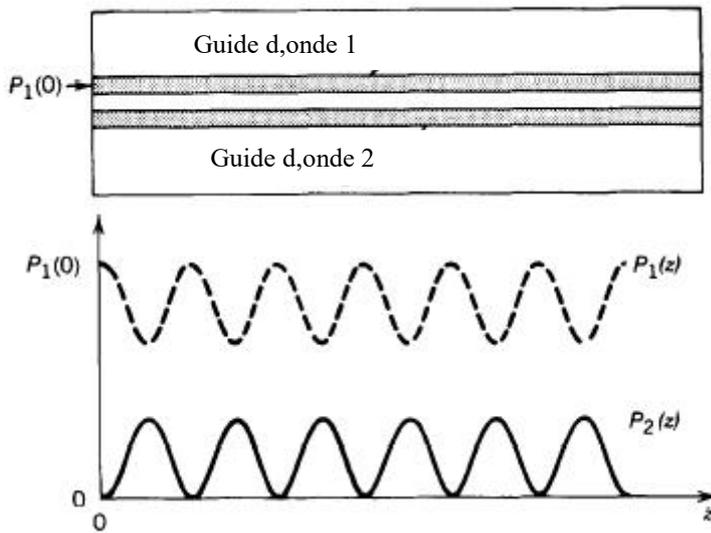


Figure 3.4 échange périodique de puissance entre guide 1 et guide 2

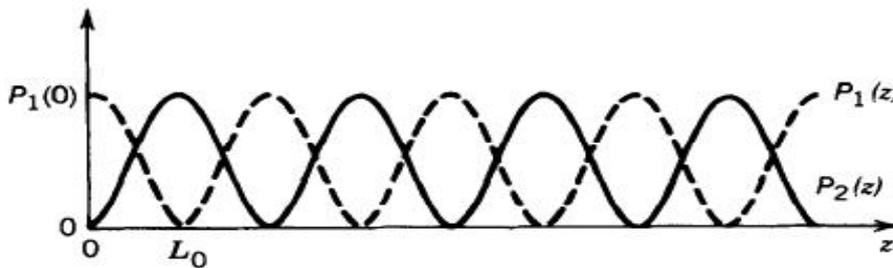


Figure 3.5 échange périodique de puissance entre guide 1 et guide 2 dans le cas en phase

Commutation par contrôle de l'écart de phase (déphasage)

Un guide d'onde coupleur de longueur fixée $L_0 = \frac{2\pi}{2\rho}$ par ex, change le taux de transfert de puissance si un petit déphasage $\Delta\beta$ est introduit utilisant (3.7b) et (3.5), le rapport de transfert de puissance $\mathcal{T} = P_2(L_0)/P_1(0)$ peut être écrit comme une fonction de $\Delta\beta$,

$$\mathcal{T} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\Delta\beta L_0}{\pi}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.12)$$

Le taux de transfert où $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. La figure 3.6 illustre la dépendance entre le taux de transfert de puissance \mathcal{T} et le paramètre d'écart de phase $\Delta\beta L_0$. Le taux a une valeur maximale d'unité à $\Delta\beta L_0 = 0$, décroît avec $\Delta\beta L_0$ et s'annule lorsque $\Delta\beta L_0 = \sqrt{3} \pi$.

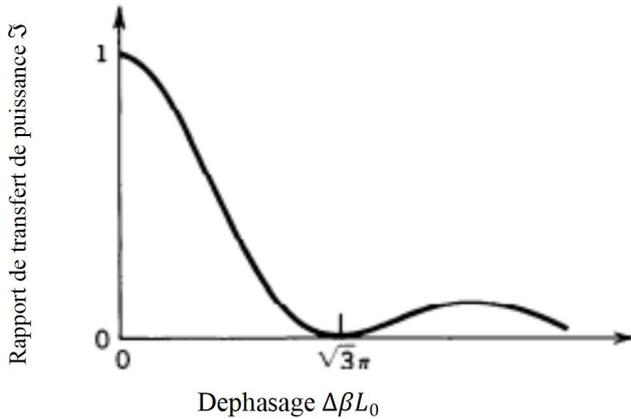


Fig.3.6. Dépendance entre le taux de transfert $\mathcal{T} = \frac{P_2(L_0)}{P_1(0)}$ et le paramètre de déphasage $\Delta\beta L_0$.

La longueur d'onde est choisie tel que $\Delta\beta = 0$, la puissance maximale est transférée du guide 1 à 2 c'est-à-dire $\mathcal{T} = 1$.

Le contrôle $\Delta\beta$ peut être fait électriquement si le matériel utilisé est électro-optique. (n peut être modifié par l'application du champ électrique).

Dérivation des équations de couplage de modes

Nous dérivons maintenant les équations différentielles (3.1) qui gouvernent les amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$ des modes couplées. Si les deux guides n'interagissent pas, ils transportent les champs optiques dont les amplitudes complexes ont pour forme :

$$E_1(y, z) = a_1 u_1(y) \exp(-j\beta_1 z) \quad (3.13.a)$$

$$E_2(y, z) = a_2 u_2(y) \exp(-j\beta_2 z) \quad (3.13.b)$$

Les amplitudes a_1 et a_2 sont constante. En présence du couplage, nous supposons que les amplitudes a_1 et a_2 deviennent fonction de z mais les fonctions transverse $u_1(y)$ et $u_2(y)$ et les constantes de propagation β_1 et β_2 ne sont pas modifiées. Les amplitudes a_1 et a_2 sont supposés variant lentement en fonction de z en comparaison avec la distance β^{-1} .

La présence du guide 2 est considérée comme une perturbation du milieu extérieur du guide 1 sous la forme d'une couche d'indice de réfraction $n_2 - n$ et de largeur d à la distance $2a$.

L'excès de l'indice ($n_2 - n$) et le champ E_2 correspond à l'excès de densité de polarisation $P = (\epsilon_2 - \epsilon)E_2 = \epsilon_0(n_2^2 - n^2)E_2$, qui crée une source de radiation optique au guide 1.

$$\varphi_1 = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \text{ avec amplitude complexe}$$

$$S_1 = \mu_0 \omega^2 P = \mu_0 \omega^2 \epsilon_0 (n_2^2 - n^2) E_2 = (n_2^2 - n^2) k_0^2 E_2 = (k_2^2 - k^2) E_2 \quad (3.14)$$



où ε_0 et ε sont les permittivités associées aux indices de réfraction du vide (1) et n_1 , et $k_2 = n_2 k_0$. Cette source est présente au guide 2. Pour déterminer l'effet de la source au champ du guide 1, nous écrivons l'équation de Helmholtz en présence de la source comme :

$$\nabla^2 E_1 + k_1^2 E_1 = -S_1 = -(k_2^2 - k^2) E_2 \quad (3.15 \text{ a})$$

De façon similaire pour le guide 2 avec source générée comme résultat dans le guide 1.

$$\nabla^2 E_2 + k_2^2 E_2 = -S_2 = -(k_1^2 - k^2) E_1 \quad (3.15 \text{ b})$$

où $k_1 = n_1 k_0$. Les équations (3.15) sont des équations à dérivées partielles couplées qui sont résolues pour déterminer E_1 et E_2 . Ce type d'analyse de perturbation est valide seulement pour les guides d'onde couplés faiblement.

Nous écrivons donc $E_1(y, z) = a_1(z) e_1(y, z)$ et $E_2(y, z) = a_2(z) e_2(y, z)$.

où $e_1(y, z) = u_1(y) \exp(-j\beta_1 z)$ et $e_2(y, z) = u_2(y) \exp(-j\beta_2 z)$

et e_1 et e_2 doivent satisfaire les équations de Helmholtz.

$$\nabla^2 e_2 + k_1^2 e_1 = 0 \quad (3.16 \text{ a})$$

$$\nabla^2 e_2 + k_2^2 e_2 = 0 \quad (3.16 \text{ b})$$

où $k_1 = n_1 k_0$ et $k_2 = n_2 k_0$ pour les points à l'intérieur des guides 1 et 2 et $k_1 = k_2 = n k_0$ ailleurs.

Substituant $E_1 = a_1 e_1$ dans (3.15 a), nous avons :

$$\frac{d^2 a_1}{dz^2} e_1 + 2 \frac{da_1}{dz} \frac{de_1}{dz} = -(k_2^2 - k^2) a_2 e_2 \quad (3.17)$$

Notons que a_1 varie lentement, alors que e_1 varie rapidement avec z , nous négligeons le 1^{er} terme de (3.17) comparé au 2nd le rapport entre ces termes est

$$\frac{\left[\left(\frac{d\psi}{dz} \right) e_1 \right]}{\left[2\psi \frac{de_1}{dz} \right]} = \frac{\left[\left(\frac{d\psi}{dz} e_1 \right) \right]}{\left[2\psi (-j\beta_1 e_1) \right]} = \frac{j \left(\frac{d\psi}{\psi} \right)}{2\beta_1 dz}$$

où $\psi = \frac{da_1}{dz}$. L'approximation est valide si $\frac{d\psi}{\psi} \ll \beta_1 dz$. Nous substituons maintenant $e_1 =$

$u_1 \exp(-j\beta_1 z)$ et $e_2 = u_2 \exp(-j\beta_2 z)$ dans (3.17) et négligeons ses 1^{ers} termes et obtenons

$$2 \frac{da_1}{dz} (-j\beta_1) u_1(y) e^{-j\beta_1 z} = -(k_2^2 - k^2) a_2 u_2(y) e^{-j\beta_2 z} \quad (3.18)$$

En multipliant aux deux membres de (3.18) par $u_1(y)$ et en intégrant par rapport à y , et en utilisant le fait que $u_1^2(y)$ est normalisé tel que son intégral est 1, nous obtenons :

$$\frac{da_1}{dz} e^{-j\beta_1 z} = -\rho_{21} a_2(z) e^{-j\beta_2 z} \quad (3.19)$$



où ρ_{21} est donné par (3.6). Une équation similaire est obtenue en répétant la même procédure par le guide 2. Ces équations donnent les équations différentielles couplées (3.4).

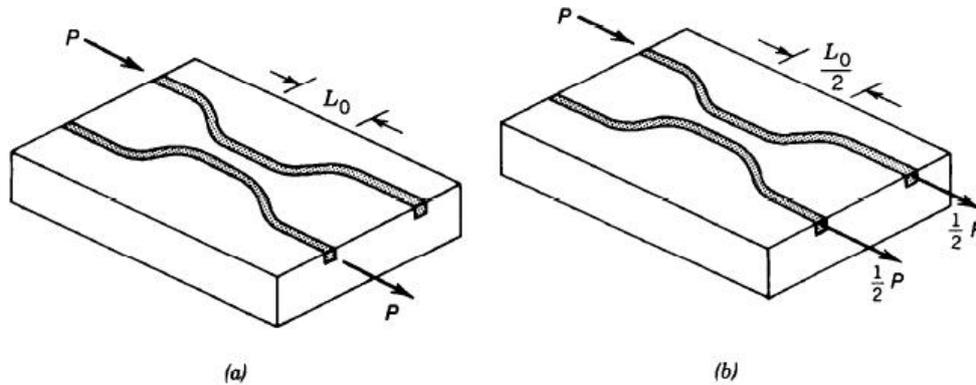
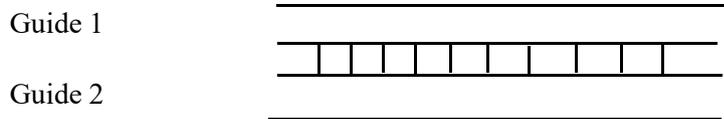


Fig.3.7 Coupleurs directionnel

III.3 Couplage contradictionnel dans les guides d'ondes ondulés

Lorsque la direction de propagation de la lumière est opposée ($\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$), la lumière ne couple pas simplement en approchant les guides d'onde 1 et 2. Considérons la configuration de couplage entre 1 et 2 lorsque le milieu est périodiquement perturbé comme le montre la figure suivante.



Nous supposons que le coefficient de couplage est exprimé par

$C_{12}(z) = K_G \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \right) z \right]$ où Λ est la mode de perturbation. Les équations de couplage de mode deviennent.

$$\frac{da_1}{dz} = -j K_G a_2 \exp \left[j \left(\Delta\beta - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) z \right] \quad (3.20 \text{ a})$$

$$\frac{da_2}{dz} = j K_G a_1 \exp \left[-j \left(\Delta\beta - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) z \right] \quad (3.20 \text{ b})$$

Pour trouver ces équations (3.20) à partir de (3.4), on utilise la relation de réciprocité $C_{21} = -C_{12}^* = -K_G \exp \left(j \frac{2\pi}{\Lambda} z \right)$ qui elle-même est obtenue à partir du thème de conservation de

puissance par $P \alpha |A|^2 - |B|^2$ se propageant le long de z .

$$\frac{d}{dz} (|A|^2 - |B|^2) = 0$$

Nous introduisons un paramètre de condition de déphasage

$$\psi = \frac{\Delta\beta - \frac{2\pi}{\Lambda}}{2} \quad (3.21)$$

Dans un guide de Bragg, la grandeur des β sont les même et (Fig. 3.6) sont opposées en signe car les guides 1 et 2 sont confondus.

$$\text{Ainsi } \beta_1 = -\beta_2 = kn_{eff} \quad (3.23)$$

La longueur d'onde satisfaisant $\psi = 0$ est appelée longueur de Bragg est exprimée comme

$$\lambda_B = 2 n_{eff} \Lambda \quad (3.24)$$

Le guide de Bragg se comporte comme un filtre car il réfléchit les longueurs d'onde de proches à celle de Bragg et laisse passer les autres. Les caractéristiques de transmission et de réflexion du guide de Bragg avec $K_G L = 2$ sont données à la figure 3.7. La transmissittance et réflectance sont données respectivement par

$$T = \frac{|a_1(L)|^2}{|a_1(0)|^2} \quad (3.25 a)$$

$$R = \frac{|a_2(0)|^2}{|a_1(0)|^2} \quad (3.26 b)$$

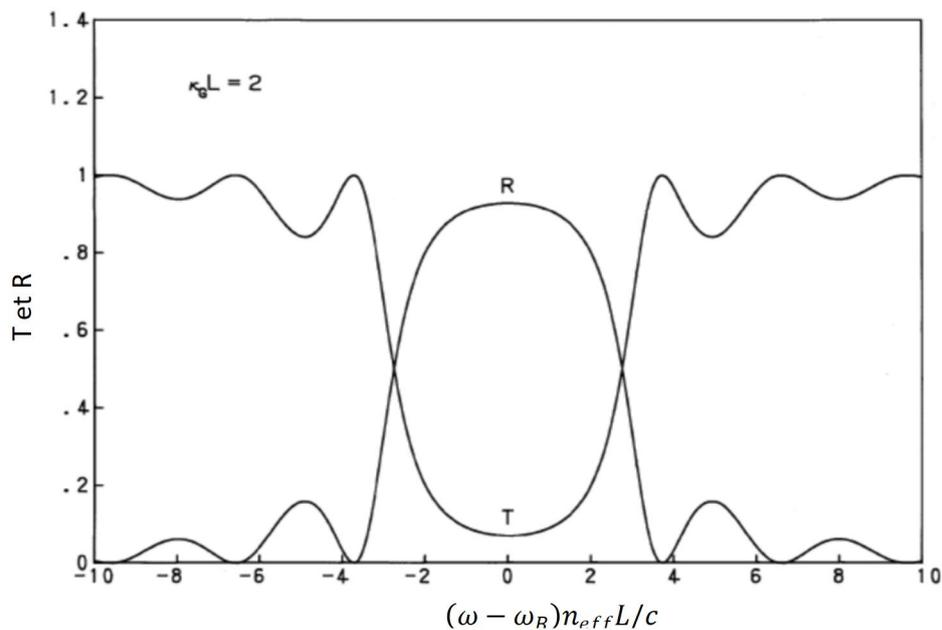
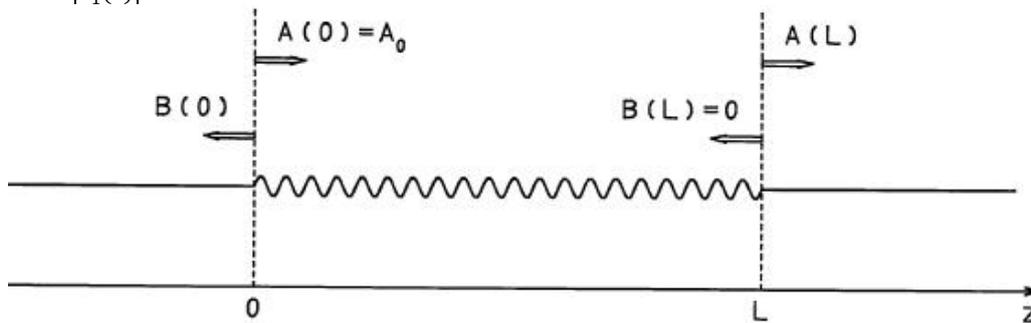


Fig.3.7 Caractéristiques de transmission et de réflexion du guide d'onde de Bragg avec $KL=2$.

CHAPITRE IV. Modélisation numérique des guides d'onde optiques

Avec la complexité croissante des systèmes en ingénierie optique, la modélisation et la simulation numériques sont devenues des outils incontournables pour analyser, concevoir et optimiser des dispositifs photoniques. Les approches expérimentales, bien qu'essentielles, ne permettent plus à elles seules d'explorer efficacement l'ensemble des configurations possibles, tant en raison du temps, du coût que des contraintes techniques qu'elles impliquent. Dans ce contexte, le recours à des modèles informatiques capables de simuler rapidement et avec précision le comportement de différentes structures optiques s'impose comme une solution indispensable.

La modélisation optique repose sur la résolution des équations de Maxwell, qui décrivent de manière rigoureuse la propagation des champs électromagnétiques. Pour obtenir des solutions numériques à ces équations, plusieurs méthodes ont été développées, chacune adaptée à des types spécifiques de structures ou de phénomènes. Parmi les méthodes les plus couramment utilisées figurent : la méthode des éléments finis (FEM), la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD), la méthode de propagation de faisceau (BPM), et la méthode d'expansion des modes (ou Mode Matching Method, MMM).

La méthode FDTD est aujourd'hui l'une des plus populaires en raison de sa flexibilité et de sa capacité à traiter des géométries complexes dans des régimes temporels. Ce chapitre introduira les principes fondamentaux de ces méthodes, avec une attention particulière portée à la méthode FDTD, afin de permettre aux étudiants de comprendre les bases de la modélisation optique et de se familiariser avec les outils numériques utilisés dans le domaine.

IV.1. Méthode des différences finies dans le domaine temporel

La méthode FDTD permet d'étudier de manière précise, simple et fiable de nombreux problèmes dans le domaine de l'électromagnétisme. La méthode est, comparée aux autres, simple dans l'implémentation et la conception. La méthode peut résoudre des problèmes complexes mais à un prix élevé en termes de consommation de l'espace mémoire et du temps de calculs.

La méthode FDTD utilise des approximations des différences finies pour les dérivées dans le temps et dans l'espace dans les équations de Maxwell (celles de Maxwell-Faraday et celle de Maxwell-Ampère).

IV.1.1. Equation de base 3D

a) Dans un milieu homogène non dispersif diélectrique

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\end{aligned}\tag{4.1}$$



Avec $B = \mu H$: densité du flux magnétique

$D = \epsilon E$: densité du flux électrique

$J = \sigma E$: densité de courant

Remarque : E, D, B, H sont des vecteurs en 3D et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

On réécrit les équations (1) comme

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} E + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times H \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E$$

b) Dans le vide : $\sigma = 0$; $\epsilon = \epsilon_0$ et $\mu = \mu_0$

$$(4.2) \text{ deviennent } \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times H \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E$$

c) Equations aux différences à partir des équations de Maxwell. Dans un milieu diélectrique homogène non dispersif, on développe les équations (1) et dans le vide (2) . Ainsi pour (1) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Les équations aux différences à partir de (4.4) sont exprimées comme le montre (4.5).

$$\begin{aligned} H_x \left| \begin{array}{l} n + \frac{1}{2} \\ i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. &= H_x \left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{2} \\ i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i, j + \frac{1}{2}, k + 1 \end{array} \right. - E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i, j + \frac{1}{2}, k \end{array} \right.}{\Delta z} - \frac{E_z \left| \begin{array}{l} n \\ i, j + 1, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. - E_z \left| \begin{array}{l} n \\ i, j, k + \frac{1}{2} \end{array} \right.}{\Delta y} \right] \\ H_y \left| \begin{array}{l} n + \frac{1}{2} \\ i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. &= H_y \left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{2} \\ i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z \left| \begin{array}{l} n \\ i + 1, j, k + \frac{1}{2} \end{array} \right. - E_z \left| \begin{array}{l} n \\ i, j, k + \frac{1}{2} \end{array} \right.}{\Delta x} - \frac{E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \end{array} \right. - E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i + \frac{1}{2}, j, k \end{array} \right.}{\Delta z} \right] \\ H_z \left| \begin{array}{l} n + \frac{1}{2} \\ i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \end{array} \right. &= H_z \left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{2} \\ i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \end{array} \right. + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x \left| \begin{array}{l} n \\ i + \frac{1}{2}, j + 1, k \end{array} \right. - E_x \left| \begin{array}{l} n \\ i + \frac{1}{2}, j, k \end{array} \right.}{\Delta y} - \frac{E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i + 1, j + \frac{1}{2}, k \end{array} \right. - E_y \left| \begin{array}{l} n \\ i, j + \frac{1}{2}, k \end{array} \right.}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$



$$\begin{aligned}
E_z \left| \begin{matrix} n+1 \\ i, j, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) E_z \left| \begin{matrix} n \\ i, j, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \\
&+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) \left[\frac{H_y \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. - H_y \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i-\frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right.}{\Delta x} - \frac{H_x \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i, j+\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. - H_x \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i, j-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right.}{\Delta y} \right] \\
E_x \left| \begin{matrix} n+1 \\ i + \frac{1}{2}, j, k \end{matrix} \right. &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) E_x \left| \begin{matrix} n \\ i + \frac{1}{2}, j, k \end{matrix} \right. \\
&+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) \left[\frac{H_z \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right. - H_z \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right.}{\Delta y} - \frac{H_y \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. - H_y \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \end{matrix} \right.}{\Delta z} \right] \\
E_y \left| \begin{matrix} n+1 \\ i, j + \frac{1}{2}, k \end{matrix} \right. &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) E_y \left| \begin{matrix} n \\ i, j + \frac{1}{2}, k \end{matrix} \right. \\
&+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) \left[\frac{H_x \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i, j+\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. - H_x \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i, j+\frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \end{matrix} \right.}{\Delta z} - \frac{H_z \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right. - H_z \left| \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right.}{\Delta x} \right]
\end{aligned}$$

Dans le vide et en utilisant la forme normalisée où

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E ;$$

Cette normalisation simplifie la formulation. E et H dans ce cas sont dans le même ordre de grandeur ceci simplifie aussi la formulation de condition aux limites dites PML (perfectly matched layer) on a :

$$\begin{cases}
\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) & (a) \\
\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & (b) \\
\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) & (c) \\
\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & (d) \\
\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) & (e) \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) & (f)
\end{cases} \quad (4.6)$$

De (4.6), on a les équations aux différences comme le montrent les exemples tirés en (4.6.c) et (4.6.f) qui sont dans (4.7)

$$\begin{aligned}
D_z^{n+1/2}(i, j, k + 1/2) &= D_z^{n-1/2}(i, j, k + 1/2) + \frac{\Delta t}{\Delta x \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(H_y^n(i + 1/2, j, k + 1/2) - H_y^n(i - 1/2, j, k + 1/2) \right. \\
&\left. - H_x^n(i, j + 1/2, k + 1/2) + H_x^n(i, j - 1/2, k + 1/2) \right) \quad (4.7)
\end{aligned}$$



$$H_z^{n+1}(i + 1/2, j + 1/2) = H_z^{n+1}(i + 1/2, j + 1/2) - \frac{\Delta t}{\Delta x \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} (E_y^{n+1/2}(i + 1, j + 1/2, k) - E_y^{n+1/2}(i, j + 1/2, k) - E_x^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1, k) + E_x^{n+1/2}(i + 1/2, j, k))$$

et les équations en langage machines sont

$$\begin{aligned} dx[i][j][k] &= dx[i][j][k] + 0.5 * (hz[i][j][k] - hz[i][j-1][k] - hy[i][j][k] \\ &\quad + hy[i][j][k-1]); \\ dy[i][j][k] &= dy[i][j][k] + 0.5 * (hx[i][j][k] - hx[i][j][k-1] - hz[i][j][k] \\ &\quad + hz[i-1][j][k]); \\ dz[i][j][k] &= dz[i][j][k] + 0.5 * (hy[i][j][k] - hy[i-1][j][k] - hz[i][j][k] \\ &\quad + hz[i][j-1][k]); \\ hx[i][j][k] &= hx[i][j][k] + 0.5 * (ey[i][j][k+1] - ey[i][j][k] - ez[i][j+1][k] \\ &\quad + ez[i][j][k]); \\ hy[i][j][k] &= hy[i][j][k] + 0.5 * (ez[i+1][j][k] - ez[i][j][k] - ex[i][j][k+1] \\ &\quad + ex[i][j][k]); \\ hz[i][j][k] &= hz[i][j][k] + 0.5 * (ex[i][j+1][k] - ex[i][j][k] - ey[i+1][j][k] \\ &\quad + ey[i][j][k]); \end{aligned} \tag{4.8}$$

IV.1.2. Equation de base en 2D

En 3D, on a 6 équations liées aux 6 composantes des vecteurs champs. En 2D, on a choisir entre deux groupes de 3 vecteurs chacun : le mode TE (transverse électrique) et TM (transverse magnetic).

Les équations de Maxwell normalisées, les équations aux différences et les équations en langage machine sont comme le montrent (4.9) (4.10) et (4.11) à la page suivante pour le mode TM

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_z}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ D_z(\omega) &= \omega_x^*(\omega) \cdot E_z(\omega) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les équations aux différences sont

$$\frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_y^n(i+\frac{1}{2},j) - H_y^n(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_x^n(i,j+\frac{1}{2}) - H_x^n(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \tag{4.10}$$



$$\frac{H_x^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j+1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x}$$

Les équations en langage machine sont:

$$\begin{aligned} dz[i][j] &= dz[i][j] \\ &+ 0.5 * (hy[i][j] - hy[i-1][j] - hx[i][j] + hx[i][j-1]); \end{aligned}$$

$$ez[i][j] = gaz[i][j] * (dz[i][j] - iz[i][j]);$$

$$iz[i][j] = iz[i][j] + gbz[i][j] * ez[i][j];$$

$$hx[i][j] = hx[i][j] + 0.5 * (ez[i][j] - ez[i][j+1]);$$

$$hy[i][j] = 0.5 * (ez[i+1][j] - ez[i][j]);$$

Avec

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2C_0}$$

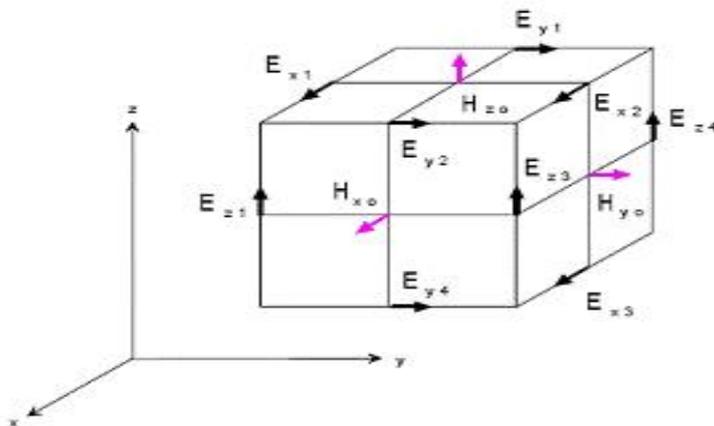
(4.11)

On peut faire de même pour le mode TE

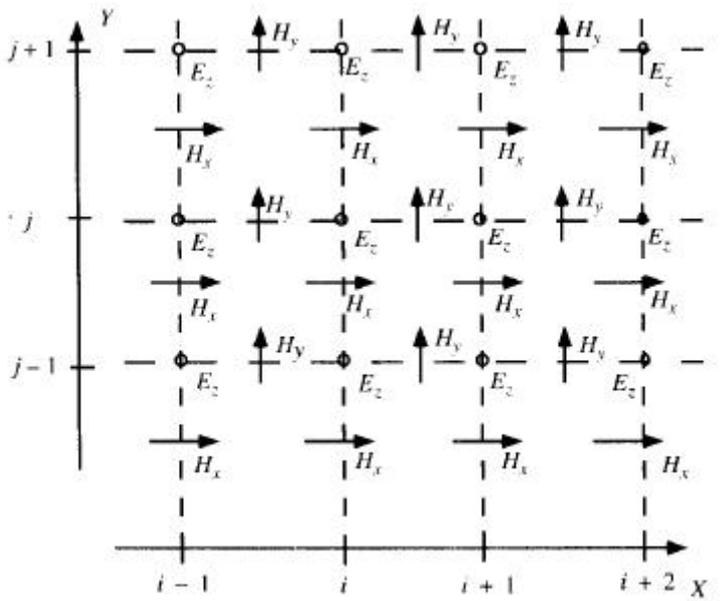
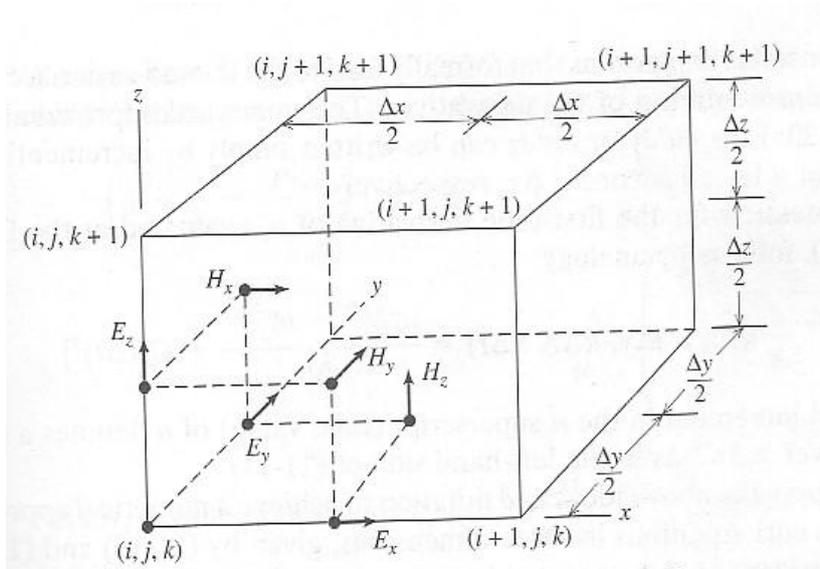
Remarque

Les composantes des vecteurs qui forment les équations en 2D (TE et TM) sont en fonction du plan contenant la direction de propagation

Le programme qui implémente les équations (4.11) est écrit en langage C (voir livre de référence).



Position des composantes des champs électrique et magnétique dans l'espace 3D discrétisé



IV.1.3 La stabilité et les conditions aux limites de FDTD

a) Stabilité

Une onde électromagnétique se propageant dans l'espace libre ne peut se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Se propager à une distance d'une seule cellule exige un temps minimal de $\Delta t = \Delta x/c_0$

Quand nous obtenons une simulation 2D, nous devons permettre la propagation dans la direction diagonale, ce qui fait que $\Delta t = \Delta x/\sqrt{2}c_0$. De plus en 3D, $\Delta t = \Delta x/\sqrt{3}c_0$. ceci en généralisant donne $\Delta t = \Delta x/\sqrt{n}c_0$.

b) Les conditions de bords absorbants (ABC)

Les conditions de bords absorbants, sont nécessaires pour empêcher les champs E et H de réfléchir dans l'espace du problème étudié.

Normalement, dans le calcul du champs E, nous avons besoin de savoir les valeurs de H autour ; c'est une supposition fondamentale de la méthode FDTD. A la limite de l'espace du problème étudié, nous n'avons qu'une valeur de H d'un seul côté.

Ainsi, le champ du bord doit se propager vers l'extérieur. Nous utilisons deux faits pour estimer la valeur à la fin en utilisant la valeur à côté du bord.

Supposons que nous cherchions les conditions de bords à $k=0$, si une onde se propage vers une limite dans l'espace libre, l'onde se propage à c_0 , la vitesse de la lumière. Donc dans le pas temporel de l'algorithme FDTD, l'onde se propage à

$$d = c_0 \Delta t = c_0 \frac{\Delta x}{2c_0} = \frac{\Delta x}{2}$$

Cette équation montre que l'onde pour traverser une cellule, il faut deux pas dans le temps.

Ainsi, l'approche nous montre que la condition de bords acceptable est

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(0) \quad (4.12)$$

c) Couche absorbante parfaitement adaptée (PML)

Les **couches absorbantes parfaitement adaptées** (en anglais *Perfectly matched layer*, **PML**) sont une amélioration de ABC.

Une **couche absorbante parfaitement adaptée** est une couche absorbante artificielle pour les équations d'ondes, couramment utilisée pour tronquer les domaines de calcul dans les méthodes numériques de simulation de problèmes à frontières ouvertes, particulièrement dans les méthodes FDTD et FEM.

La propriété essentielle d'une PML qui la distingue d'un matériau absorbant ordinaire est le fait qu'elle est conçue de telle sorte que les ondes incidentes l'atteignant depuis un matériau non PML ne se réfléchissent pas à l'interface. Cette propriété permet aux PML d'absorber fortement toutes les ondes sortant d'un domaine de calcul sans les renvoyer dans ce domaine.

L'idée de base de PML est celle-ci :

Si une onde se propage dans un milieu A et arrive à un milieu B, la quantité réfléchie est dictée par l'impédance intrinsèque des deux milieux

$$\Gamma = \frac{\eta_A - \eta_B}{\eta_A + \eta_B} \quad (4.13)$$

Qui est déterminé par la constante diélectrique ϵ et la perméabilité μ des deux milieux

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (4.14)$$

Jusqu'à présent nous avons supposé μ était constant, donc quand une impulsion se propageant de $\epsilon = 1$ à $\epsilon = 4$, l'impédance change et la quantité réfléchie est donnée selon l'équation (4.13)



Cependant si μ change avec ε alors η reste constant Γ serait zéro et pas de réflexion. Mais ceci ne résout pas le problème complètement car le signal continue de se propager dans le nouveau milieu. Nous avons besoin d'un milieu qui est absorbant où le signal n'atteint pas le bord. Ceci est accompli en faisant ε et μ de (4.14) complexes car la partie imaginaire est la cause de décroissance.

IV.2 La Méthode d'expansion de modes propres ou MMM

IV.2.1 Introduction

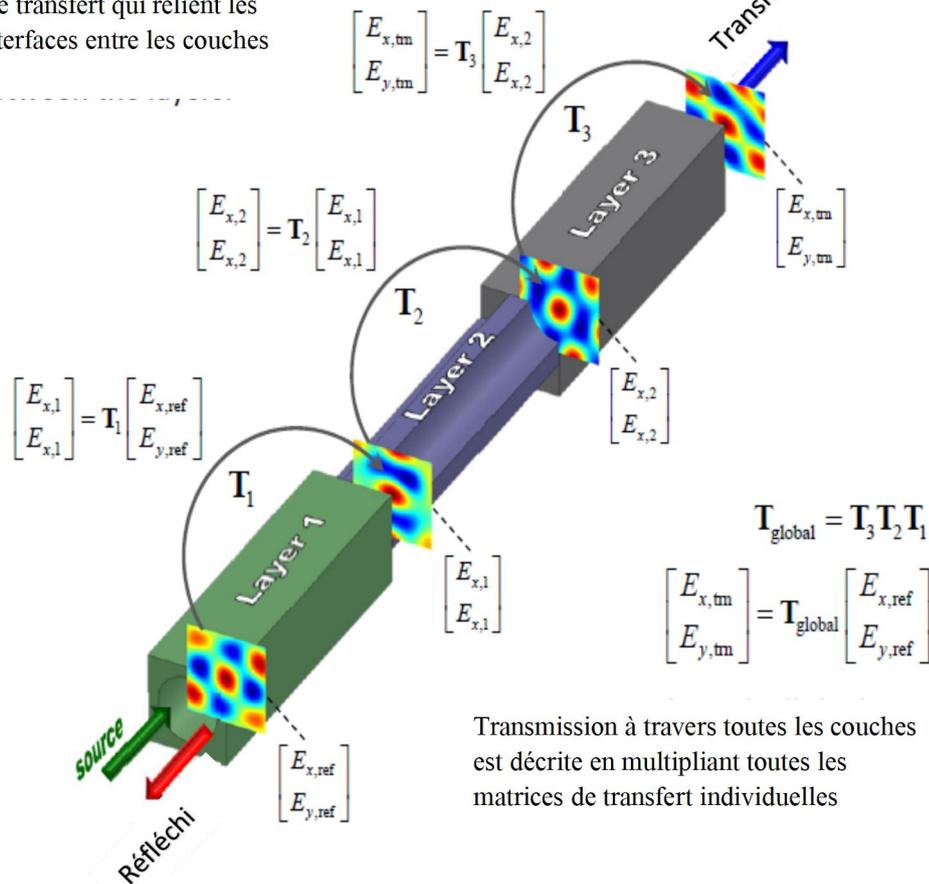
La méthode 'MMM' ou **méthode d'expansion de modes propres** est une technique de modélisation électrodynamique. C'est une méthode du domaine fréquentiel et efficace dans les structures de guidage de la lumière et avec des régions différentes. La méthode permet de calculer le champ électromagnétique réfléchi et transmis à un ensemble arbitraire de couches pour un champ incident arbitraire. On l'appelle aussi pour cela la méthodes bidirectionnelle de propagation des modes propres.

Elle commence par diviser une structure complexe de guide d'ondes en plusieurs piles suivant la direction de propagation de la lumière, de sorte que les variations de structure et d'indice de réfraction soient négligeables dans chaque pile selon l'axe de propagation. Le champ peut ensuite être étendu à un ensemble complet de fonctions d'onde vectorielles au sein de chaque pile. Ces fonctions sont généralement désignées par le terme « modes propres ». En utilisant une condition de continuité sur l'interface, une matrice de transfert ou de diffusion peut être construite pour adapter les coefficients de dilatation des modes propres dans les deux piles adjacentes. Enfin, une matrice de transfert ou de diffusion totale pour l'ensemble du dispositif peut être obtenue en combinant toutes ces matrices de transfert ou de diffusion sur l'interface et à travers la pile. La simplicité de la méthode MMM repose sur le fait que l'amplitude de tout champ lumineux se propageant à travers le dispositif peut être exprimée par ses coefficients de dilatation et résolue facilement par des opérations matricielles

Nous considérons dans ce chapitre les modes propres d'abord dans une couche et décrivons les propriétés de ces modes . ensuite en appliquant la méthode d'appariement des modes à l'interface 'MMM', nous montrons comment calculer le champs transmis entre les deux couches. La méthode décrit ensuite la diffusion sur un ensemble de couches ou de sections.



Les matrices de transfert qui relient les champs aux interfaces entre les couches



Cette méthode est bonne pour...

1. Modélisation de la transmission et de la réflexion à partir des dispositifs en couches
2. Modélisation des couches de matériaux anisotropes

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Très rapide et efficace • Rigoureux • Près à 100% de précision • Inconditionnellement stable • Robuste • Simple à mettre en œuvre • L'épaisseur des couches peut être n'importe quoi • Capable d'exploiter la périodicité longitudinale • Incorpore facilement la dispersion matérielle • Tient facilement compte de la polarisation et de l'angle d'incidence • Excellent pour les matériaux stratifiés anisotropes 	<ul style="list-style-type: none"> • Nombre limité de géométries qu'il peut moduler • Ne gère que les couches linéaires, homogènes et infinies • Ne peut pas tenir compte des effets de diffraction • Inefficace pour l'angle transitoire

IV.2.2 Modes propres en milieu invariant en Z

Equations de Maxwell

Nous considérons un champ monochromatique variant dans le temps en $\exp(j\omega t)$

$$\nabla \times E = -j\omega B \quad (4.15)$$

$$\nabla \times H = J + j\omega B$$

b) milieu invariant en Z

Considérons la structure

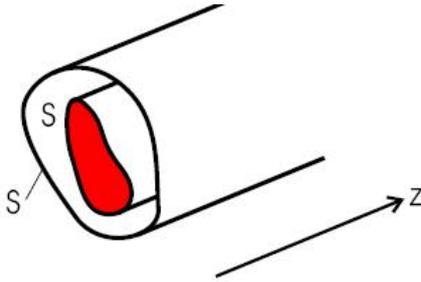


Fig 4.1 structure invariant en Z

Dans cette structure μ et ϵ sont invariants dans la direction Z et pas de source dans cette structure. Les profils du champ ont une dépendance en Z comme suit :

$$\begin{cases} E(r) = E(r_t)e^{j\beta z} \\ H(r) = H(r_t)e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (4.16)$$

Ici r est le vecteur coordonné spatiale qui peut être subdivisé en composante longitudinale Z et transverse t . l'équation précédente décrit les modes propres de la structure qui sont les champs qui se propagent en l'absence de source et qui maintiennent leur formes durant la propagation. B est la constante de propagation du mode propre. Quand cette quantité est réelle, la seule variation dépendante de Z est le facteur de phase et l'amplitude du champ reste constante. Quand elle est complexe, l'amplitude du champ augmente ou décroît exponentiellement mais sa forme est maintenue. Une quantité en sa relation est l'indice effectif du mode défini comme

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} n_{eff}$$

Ces profils de champ sont appelés modes propres car ils satisfont le problème mathématique des valeurs propres suivant, qui peut être dérivé des équations de maxwell:

$$(\nabla_t^2 + \omega^2)E = \beta^2 E$$

Ici, β^2 est la valeur propre. Une question similaire peut être dérivée pour H. Lorsque nous avons un ensemble de modes propres $\{E_i, H_i\}$ à notre disposition, nous pouvons essayer d'écrire n'importe quel champ se propageant vers l'avant comme une combinaison linéaire des modes de cet ensemble:

$$\begin{cases} E(r) = \sum A_i E_i(r_i) e^{-j\beta_i z} \\ H(r) = \sum A_i H_i(r_i) e^{-j\beta_i z} \end{cases} \quad (4.17)$$

A condition que notre ensemble de modes propres soit complet, nous pouvons représenter n'importe quel champ se propageant vers l'avant dans cette structure de z -invariant comme un vecteur algébrique de coefficients d'expansion :

$$(E(r), H(r)) \leftrightarrow A = [A_i]$$

La manière dont ces modes propres sont trouvées dépend de la géométrie de la section S . on y reviendra dans la suite du cours.

IV.2.3 Diffusion à une interface entre deux couches

Avant de traiter le problème, considérons le théorème de réciprocité de Lorentz utile pour montrer l'orthogonalité des modes

Réciprocité

$$\nabla \times E_1 = -j\omega\mu H_1 \quad (4.18)$$

$$\nabla \times H_1 = J_1 + j\omega\epsilon E_1$$

$$\nabla \times E_2 = -j\omega\mu H_2$$

$$\nabla \times H_2 = J_2 + j\omega\epsilon E_2$$

$$\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) = J_1 \cdot E_2 - J_2 \cdot E_1$$

$$\iint_S (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot dS = \iiint_V (J_1 \cdot E_2 - J_2 \cdot E_1) dV$$

$$F \equiv E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot dS_1 + \iint_{S_2} F \cdot dS_2 &= \iint_{S_1} F_z dS + \iint_{S_2} F_z dS \\ &= \iint_S (F_{z+\Delta z} - F_z) dS \end{aligned}$$

$$\iiint_V (J_1 \cdot E_2 - J_2 \cdot E_1) dV = \Delta z \iint_S (J_1 \cdot E_2 - J_2 \cdot E_1) dS$$

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial z} (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot u_z dS = \iint_S (J_1 \cdot E_2 - J_2 \cdot E_1) dS$$

Orthogonalité

$$\begin{cases} E_m(r) = E_m(r_t) e^{-j\beta_m z} \\ H_m(r) = H_m(r_t) e^{-j\beta_m z} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} E_n(r) = E_n(r_t) e^{-j\beta_n z} \\ H_n(r) = H_n(r_t) e^{-j\beta_n z} \end{cases}$$

$$-(\beta_m + \beta_n) \iint_S (E_m \times H_n - E_n \times H_m) \cdot u_z dS = 0$$

$$(\beta_m + \beta_n) \iint_S (E_{m,t} \times H_{n,t} - E_{n,t} \times H_{m,t}) \cdot u_z dS = 0$$

$$(E_{n,t}, E_{n,z}, H_{n,t}, H_{n,z}, \beta_n)$$



$$(E_{n,t} - E_{n,z}, -H_{n,t}H_{n,z}, \beta_n)$$

$$(\beta_m - \beta_n) \iint_S (E_{m,t} \times H_{n,t} + E_{n,t} \times H_{m,t}) \cdot u_z dS = 0$$

$$\iint_S (E_{m,t} \times H_{n,t}) \cdot u_z dS = 0$$

Modes matching

Considérons l'interface plane entre deux guides d'ondes I et II comme le montre la figure suivante

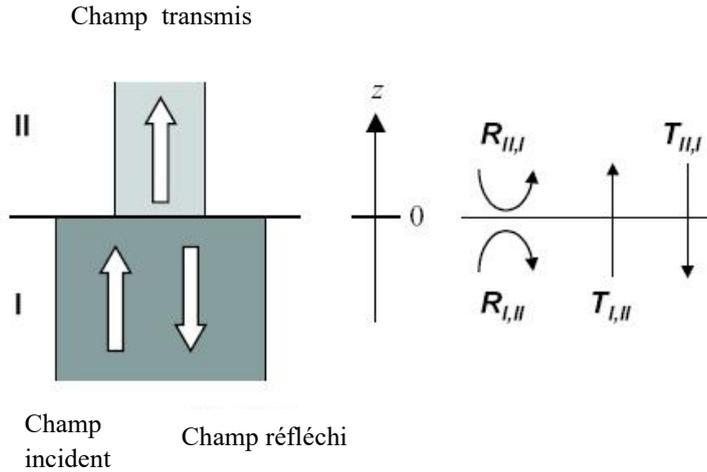


Fig 4.2 interface entre deux couches

$$\begin{aligned} E_{p,t}^I(r_t) + \sum_j R_{j,p} E_{j,t}^I(r_t) &= \sum_j T_{j,p} E_{j,t}^{II} \\ H_{p,t}^I(r_t) - \sum_j R_{j,p} H_{j,t}^I(r_t) &= \sum_j T_{j,p} H_{j,t}^{II} \end{aligned} \quad (4.20)$$

R et T sont des coefficients de réflexion et de transmission

$$\langle E_p^I, H_i^I \rangle + \sum_j R_{j,p} \langle E_j^I, H_i^I \rangle = \sum_j T_{j,p} \langle E_j^{II}, H_i^{II} \rangle$$

$$\langle E_t^I, H_p^I \rangle - \sum_j R_{j,p} \langle E_i^I, H_j^I \rangle = \sum_j T_{j,p} \langle E_i^{II}, H_j^I \rangle$$

$$\langle E_m, H_n \rangle \equiv \iint_S (E_m \times H_n) \cdot u_z dS$$

$$\delta_{i,p} \langle E_p^I, H_p^I \rangle + R_{i,p} \langle E_i^I, H_i^I \rangle = \sum_j T_{j,p} \langle E_j^{II}, H_i^I \rangle$$

$$\delta_{i,p} \langle E_p^I, H_p^I \rangle - R_{i,p} \langle E_i^I, H_i^I \rangle = \sum_j T_{j,p} \langle E_i^I, H_j^{II} \rangle$$

L'addition et la soustraction de ces équations donne :

$$\sum_j [\langle E_i^I, H_j^{II} \rangle + \langle E_j^{II}, H_i^I \rangle] T_{j,p} = 2 \delta_{i,p} \delta_{i,p} \langle E_p^I, H_p^I \rangle$$

$$R_{i,p} = \frac{1}{2\langle E_i^I, H_i^I \rangle} \sum_j [\langle E_j^{II}, H_i^I \rangle - \langle E_i^I, H_j^{II} \rangle] T_{j,p}$$

$$O_{I,II}(i,j) \equiv \langle E_i^I, H_j^{II} \rangle$$

$$O_{II,I}(i,j) \equiv \langle E_i^{II}, H_j^I \rangle$$

Avec T désigne le transposé, on obtient enfin:

$$T_{I,II} = 2(O_{I,II} + O_{II,I}^T)^{-1} \quad (4.21)$$

$$R_{I,II} = \frac{1}{2}(O_{II,I}^T - O_{I,II}) \cdot T_{I,II}$$

$$A_{refl} = R_{I,II} A_{inc}$$

$$A_{trans} = T_{I,II} A_{inc}$$

Il y a similarité avec les équations de Fresnel pour calculer la réflexion et transmission d'une onde plane sur une interface entre milieu semi infini

$$T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (4.22)$$

IV.2.4 Diffusion à un empilement de couches

Pour calculer les matrices de réflexion et de transmission d'un ensemble entier de couches minces empilées, nous avons besoin de deux choses :

- Pour chaque interface, calculer les matrices R et T comme dans la section précédente
- Pour chaque couche, propager le champ en utilisant les expressions qui montrent les propriétés du champ en dépendance de Z

a) Le modèle en matrice de transfert

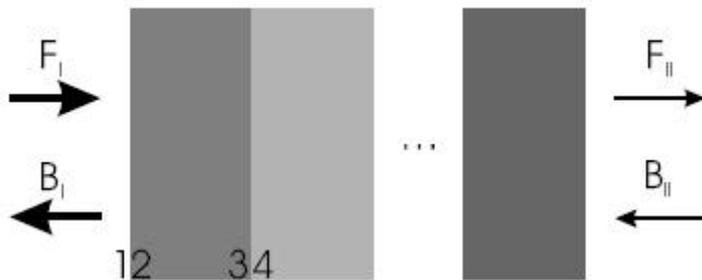


Fig 4.3 modèle en T

$$\begin{bmatrix} F_{II} \\ B_{II} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} F_I \\ B_I \end{bmatrix}$$

$$F_2 = T_{12} \cdot F_1 + R_{21} \cdot B_2$$

$$B_1 = R_{12} \cdot F_1 + T_{21} \cdot B_2$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} - R_{21} \cdot T_{21}^{-1} \cdot R_{12} & R_{21} \cdot T_{21}^{-1} \\ -T_{21}^{-1} \cdot R_{12} & T_{21}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(e^{-j\beta_i d_{23}}) & 0 \\ 0 & \text{diag}(e^{j\beta_i d_{23}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$T = I_{n-1,n} \cdot \dots \cdot P_{45} \cdot I_{34} \cdot P_{23} \cdot I_{12} \quad (4.23)$$

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

b) Le modèle de la matrice de diffusion

$$\begin{bmatrix} F_{1^+} \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1^+} & R_{1^+,1} \\ R_{1,1^+} & T_{1^+,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ B_{1^+} \end{bmatrix}$$

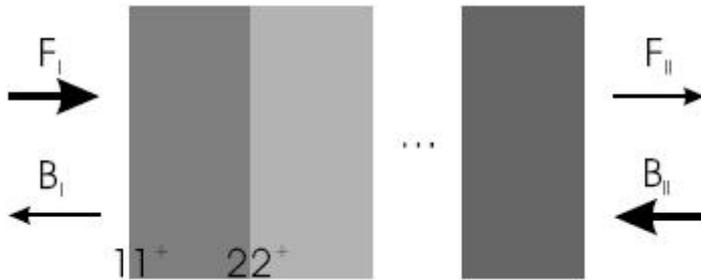


Fig 4.4 modèle S

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,2} & r_{2,1} \\ r_{1,2} & t_{2,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$t_{1,2} = \text{diag}(e^{-j\beta_i d_{12}}) \cdot T_{1,1^+}$$

$$r_{2,1} = \text{diag}(e^{-j\beta_i d_{12}}) \cdot R_{1^+,1} \cdot \text{diag}(e^{-j\beta_i d_{12}})$$

$$r_{1,2} = R_{1,1^+}$$

$$t_{2,1} = T_{1^+,1} \cdot \text{diag}(e^{-j\beta_i d_{12}})$$

$$\begin{bmatrix} F_p \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,p} & R_{p,1} \\ R_{1,p} & T_{p,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ B_p \end{bmatrix}$$

Nous voulons calculer les matrices

$$\begin{bmatrix} F_{p+1} \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,p+1} & R_{p+1,1} \\ R_{1,p+1} & T_{p+1,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ B_{p+1} \end{bmatrix}$$

$$T_{1,p+1} = t_{p,p+1} \cdot (I - R_{p,1} \cdot r_{p,p+1})^{-1} \cdot T_{1,p}$$

$$R_{p+1,1} = t_{p,p+1} \cdot (I - R_{p,1} \cdot r_{p,p+1})^{-1} \cdot R_{p,1} \cdot t_{p+1,p} + r_{p+1,p}$$

$$R_{1,p+1} = T_{p,1} \cdot (I - r_{p,p+1} \cdot R_{p,1})^{-1} \cdot r_{p,p+1} \cdot T_{1,p} + R_{1,p} \quad (4.24)$$

$$T_{p+1,1} = T_{p,1} \cdot (I - r_{p,p+1} \cdot R_{p,1})^{-1} \cdot t_{p+1,p} \quad (4.25)$$

IV.2.5 Champs à l'intérieur de l'empilement

La matrice de diffusion donne des informations du champ aux deux extrémités de l'empilement des couches. Cependant on a besoin des fois de connaître le champ à l'intérieur de l'empilement

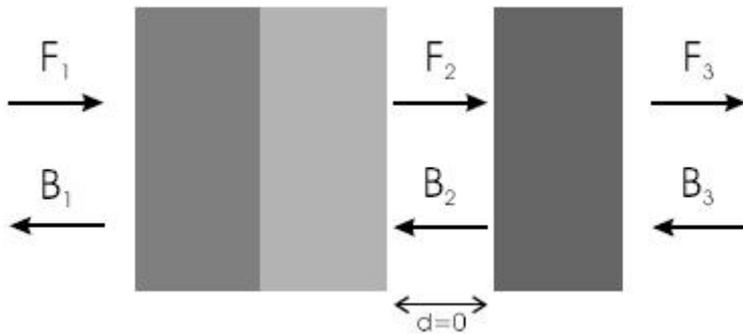


Fig 4.5 champ à l'intérieur de l'empilement

a) dans le modèle en T

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} - R_{21} \cdot T_{21}^{-1} \cdot R_{12} & R_{21} \cdot T_{21}^{-1} \\ -T_{21}^{-1} \cdot R_{12} & T_{21}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ R_{13} \cdot F_1 \end{bmatrix}$$

b) dans le modèle en S

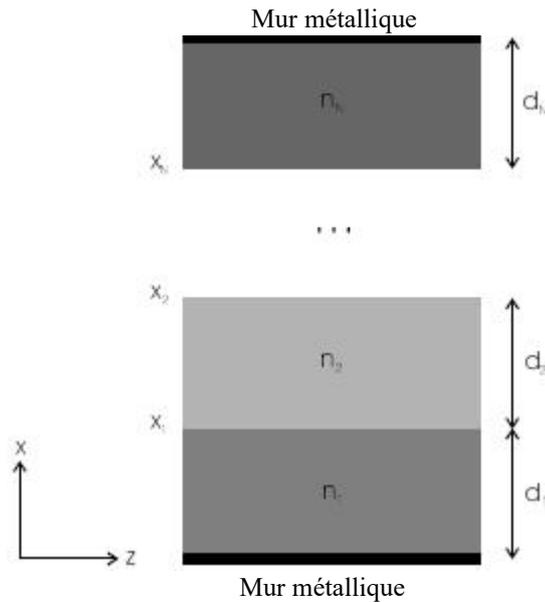
$$F_2 = T_{12} \cdot F_1 + R_{21} \cdot B_2$$

$$B_2 = R_{23} \cdot F_2 + T_{32} \cdot B_3$$

$$F_2 = [I - R_{21} \cdot R_{23}]^{-1} \cdot T_{12} \cdot F_1$$

$$B_2 = R_{23} \cdot F_2$$

Cas du guide d'onde plan



La composante transverse du vecteur d'onde dans chaque couche i est

$$k_{t,i} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_i\right)^2 - \beta^2} \quad (4.27)$$

Et le champ électrique

$$E_i(x, y, z) = u_y E_i(x) e^{-j\beta z}$$

$$E_i = F_i e^{-jk_{t,i}(x-x_i)} + B_i e^{jk_{t,i}(x-x_i)}$$

Des formules de Fresnel, on peut avoir

$$\begin{bmatrix} F_i \\ B_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + k_{t,i}/k_{t,i-1}) e^{-jk_{t,i}d_i} & (1 - k_{t,i}/k_{t,i-1}) e^{jk_{t,i}d_i} \\ (1 - k_{t,i}/k_{t,i-1}) e^{-jk_{t,i}d_i} & (1 + k_{t,i}/k_{t,i-1}) e^{jk_{t,i}d_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{i-1} \\ B_{i-1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\text{Avec } F_0 + B_0 = F_N + B_N = 0$$

Exercices

I.

1. A partir la figure 2.12, discutez de atténuation du signal dans une fibre optique en silice et l'importance des conclusions sur cette figure pour le choix de la longueur d'onde à utiliser. Quelle est cette longueur d'onde?

2. Citer et expliquer les différents types de guide d'onde optique.

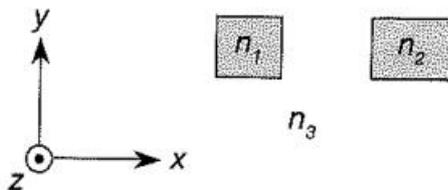
3. Deux GO de section rectangulaires sont assez proches l'un de l'autre pour être couplés. Leurs indices de réfractifs sont comme indiqués sur la figure. Les indices n_1 , n_2 sont supérieurs à n_3 .

Isolés, les guides sont monomodes et supportent les champs électriques u_1 et u_2 respectivement avec les constantes de propagation β_1 et β_2 . en régime de couplage faible, un champ électrique monochromatique dans structure possède l'amplitude

$$E(x,y,z) = a_1(z)u_1(x,y)\exp(-i\beta_1z) + a_2(z)u_2(x,y)\exp(-i\beta_2z),$$

Où les coefficients $a_1(z)$ et $a_2(z)$ varient avec z , lentement à l'échelle de β_1^{-1} et β_2^{-1}

Ecrire l'équation de Helmholtz suivie par l'amplitude $E(x,y,z)$. en déduire les équations d'évolution spatiales des coefficients $a_1(z)$ et $a_2(z)$; montrer que ces équations sont de la forme des équations de couplage vues dans le cours en précisant les expressions des constantes de couplage.



II. Simulation

1. A l'aide du logiciel optiFDTD, simuler un guide plan tel que :

Dans le cœur $n=3.24$, dans la gaine $n=2.5$

Avec une longueur de $50 \mu\text{m}$

Mettez des lignes d'observation au milieu et à la fin

Le guide est multimode dont le nombre de modes est à préciser

Longueur d'onde: $1.55 \mu\text{m}$

Polarisation: TM

2. Concevoir un guide d'onde diélectrique multimodal dont l'indice de réfraction du cœur est 1.46. L'indice de réfraction de la gaine et l'épaisseur du cœur sont choisis librement. Cependant, il faut justifier le choix. Faire le design, simuler à l'aide du logiciel optiFDTD et exporter dans un fichier Word

