



Université du Burundi
Institut de Pédagogie Appliquée
Département de Mathématiques
Master en Sciences / Master en Sciences fondamentales et appliquées

Syllabus du cours de Théorie des fibrés

Master I

Master en Sciences / Master en Sciences fondamentales et appliquées

Volume horaire: 60 heures

Titulaire: Prof Aboubacar Nibirantiza

Bujumbura, Février 2026

Préface

0.1 Contenu-matière

Dans ce syllabus, on traite la théorie générale des fibrés. Explicitement, on étudie les notions relatives aux

- espaces fibrés, spécialement les fibrés tangent et cotangent,
- formes différentielles et connexions,
- fibrés principaux

sur les variétés différentielles afin de maîtriser les outils fondamentaux de la géométrie différentielle et leurs applications en physique mathématique, en géométrie riemannienne et en mécanique analytique.

On décrit également le rôle géométrique des champs de vecteurs: celui d'assigner à chaque point une direction de déplacement et que le fibré cotangent possède une structure symplectique, ce qui en fait l'espace des phases en mécanique classique. On montre comment comparer des vecteurs situés dans des fibres différents. Dans ce cas, une connexion est précisément l'outil géométrique qui permet de définir une notion de dérivée et de transport le long de la base M . La forme de connexion est la version différentielle (locale) de cette structure.

0.2 Objectif général du cours

Décrire les concepts fondamentaux du fibré tangent et cotangent sur les variétés différentielles, de les manipuler dans des cadres locaux et globaux et de les mobiliser dans des contextes avancés de géométrie différentielle, riemannienne et de physique mathématique.

0.3 Objectifs spécifiques

À la fin de l'ECUE, l'étudiant devra être capable de :

- définir une variété différentielle et ses cartes locales
- Définir l'espace tangent en un point (approche géométrique et algébrique)
- définir le fibré tangent TM et le fibré cotangent T^*M .
- expliquer la dualité entre espaces tangents et cotangents
- décrire les champs de vecteurs comme des sections du fibré tangent
- décrire les formes différentielles comme section du fibré cotangent

0.4 Compétences théoriques et mesurables visées

Dans cet ECUE, nous avons des compétences théoriques et mesurables visées entre autres

- interpréter le fibré cotangent comme espace des phases en mécanique analytique
- décrire le rôle du fibré cotangent en géométrie symplectique
- mobiliser ces notions dans des contextes de physique mathématique et de géométrie moderne.
- déterminer les sections de ces fibrés et leurs propriétés
- appliquer ces notions dans des exercices de géométrie riemannienne et de mécanique géométrique.

0.5 Méthodologie d'enseignement

0.5.1 Présentation du cours

Les grandes lignes de chaque chapitre seront présentées sur Power-Point. Ainsi, on explique le but de chaque chapitre et son utilité comme outils mathématique. On résout quelques exercices en classe et on laisse des travaux à faire pour inciter les étudiants à travailler personnellement. On combine diverses méthodes lors de l'enseignement. Il s'agit des méthodes interactive, participative et expositive.

0.5.2 Travaux pratiques et dirigés

On initie les étudiants à faire des calculs sur les exercices laissés comme des TDs dans les notes. C'est à dire qu'on leur demande de vérifier manuellement certaines assertions données dans le texte.

0.5.3 Syllabus du cours

Les étudiants seront indiqués où ils peuvent trouver le présent syllabus (numéro d'enregistrement au répertoire des publications).

0.5.4 Mode d'évaluation

L'évaluation des acquis est constitué de:

- l'évaluation formative sous forme d'interrogations, de travaux dirigés (présentation au tableau des résultats obtenus pour les exercices laissés dans les notes). Tous ces travaux représentent 40% des notes.
- un examen oral ou écrit à la fin du semestre qui vaut 60% des notes.

Chapitre 1

Les bases de la géométrie différentielle

Dans cette section, nous rappelons les notions de base de la géométrie différentielle pour pouvoir affronter les calculs ultérieurs. Le niveau mastère doit procurer aux étudiants un pouvoir calculatoire très remarquable.

1.1 Variétés différentielles

Dans ce qui suit, nous rappelons la définition et donner quelques exemples de variétés différentielles. Nous partons d'un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.1.1. Soit M un espace topologique séparé à base dénombrable. On appelle structure de variété sur M , la donnée d'une collection $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de cartes locales appelée atlas, où pour tout α , $x_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de \mathbb{R}^m et $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow x_\alpha(U_\alpha)$ est un homéomorphisme tel que :

(i) les domaines de cartes de \mathcal{A} recouvrent M , i.e. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$;

(ii) si (U_α, x_α) et (U_β, x_β) sont deux cartes locales telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ alors l'application

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est un homéomorphisme de classe C^∞ .

On appelle l'application $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ des fonctions de transition ou encore changement de variables

Nous rappelons que si l'on note $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application coordonnée en $p \in M$, alors les applications

$$x^i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

sont appelées des fonctions coordonnées.

Exemple 1.1.2. Nous pouvons vérifier sans difficultés:

1. que $M = \mathbb{R}^2$ avec $x = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donne l'atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, \text{Id}_{\mathbb{R}^2})\}$. Le couple (M, \mathcal{A}) est une variété différentielle de dimension deux. On généralise en disant que les espaces euclidiens \mathbb{R}^n sont des variétés différentielles de dimension n .
2. L'espace topologique

$$M = \mathbb{S}^2$$

est une variété différentielle de dimension 2.

Pour le montrer, nous allons construire explicitement un atlas différentiable à l'aide des projections stéréographiques.

Rappelons que

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

On considère :

$$\begin{aligned} N &= (0, 0, 1) && \text{(pôle nord),} \\ S &= (0, 0, -1) && \text{(pôle sud).} \end{aligned}$$

Nous définissons les ouverts :

$$U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \quad U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}.$$

1. Projection stéréographique depuis le pôle nord

Soit

$$P = (x, y, z) \in U_N.$$

On considère la droite passant par :

- le pôle nord $N = (0, 0, 1)$,
- le point $P = (x, y, z)$.

Cette droite coupe le plan

$$z = 0$$

en un unique point.

Écrivons l'équation paramétrique de la droite :

$$\gamma(t) = N(1 - t) + tP = N + t(P - N).$$

Comme

$$P - N = (x, y, z - 1),$$

on obtient

$$\gamma(t) = (tx, ty, 1 + t(z - 1)).$$

Nous cherchons l'intersection avec le plan $z = 0$:

$$1 + t(z - 1) = 0.$$

Donc

$$t = \frac{1}{1 - z}.$$

Ainsi le point d'intersection est

$$\left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right).$$

On définit donc la carte :

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

par

$$\boxed{\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)}.$$

2. Projection stéréographique depuis le pôle sud

De manière analogue, pour

$$P = (x, y, z) \in U_S,$$

la droite passant par

$$S = (0, 0, -1)$$

et P coupe le plan $z = 0$ en

$$\left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right).$$

On obtient la seconde carte :

$$\psi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\psi_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

3. Les applications réciproques

Montrons que ces cartes sont des homéomorphismes.

Posons

$$(u, v) = \varphi_N(x, y, z).$$

Alors

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}.$$

Donc

$$x = u(1-z), \quad y = v(1-z).$$

Comme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on obtient

$$u^2(1-z)^2 + v^2(1-z)^2 + z^2 = 1.$$

Factorisons :

$$(u^2 + v^2)(1-z)^2 + z^2 = 1.$$

Après simplification, on trouve :

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Puis

$$1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Ainsi :

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1},$$

$$y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Donc

$$\varphi_N^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Cette application est lisse sur \mathbb{R}^2 .

De même,

$$\psi_S^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

4. Fonction de transition

Les deux cartes se recouvrent sur

$$U_N \cap U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}.$$

Calculons la fonction de transition :

$$\psi_S \circ \varphi_N^{-1}.$$

Soit

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

On utilise l'expression précédente de $\varphi_N^{-1}(u, v)$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, & y &= \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \\ z &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + z &= 1 + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \\ &= \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \psi_S \circ \varphi_N^{-1}(u, v) &= \left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right) \\ &= \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi_S \circ \varphi_N^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right).$$

Cette application est lisse sur

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Donc les fonctions de transition sont différentiables.

Par conséquent,

$$\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \psi_S)\}$$

est un atlas différentiable de \mathbb{S}^2 .

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{S}^2 \text{ est une variété différentielle de dimension } 2.}$$

5. Généralisation à \mathbb{S}^n

On considère

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

En retirant le pôle nord

$$N = (0, \dots, 0, 1),$$

la projection stéréographique donne une carte :

$$\varphi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

On construit de même la carte depuis le pôle sud.

Les fonctions de transition sont lisses, donc

$$\boxed{\mathbb{S}^n \text{ est une variété différentielle de dimension } n.}$$

Pour plus d'informations sur les exemples de variétés différentielles, on peut consulter le premier chapitre du livre [4].

Dans ce qui suit, nous allons étudier en détail quelques exemples de variétés différentielles munies d'une structure groupe (une structure supplémentaire à celle de variété) appelées groupes de Lie.

Définition 1.1.3. Un groupe de Lie est une variété différentielle G qui est munie en plus d'une structure de groupe telle que les applications de multiplication et d'inversion soient différentiables, i.e

- l'application $\varphi : G \times G \rightarrow G$, appelée multiplication,
- l'application $i : G \rightarrow G$, appelée inverse

sont différentiables

Exemple 1.1.4. Soit

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 = \{(x, y, u) ; x, y \in \mathbb{R}, u \in S^1 \subset \mathbb{C}\},$$

muni de la loi de composition

$$(x_1, y_1, u_1) \cdot (x_2, y_2, u_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1y_2}u_1u_2).$$

Alors G est un groupe de Lie.

Démonstration 1.1.5. Nous allons vérifier successivement :

- que G est un groupe ;
- que les applications de multiplication et d'inversion sont différentiables.

1. Fermeture

Soient

$$(x_1, y_1, u_1), (x_2, y_2, u_2) \in G.$$

On a :

-

$$x_1 + x_2 \in \mathbb{R}, \quad y_1 + y_2 \in \mathbb{R},$$

- comme

$$u_1, u_2 \in S^1,$$

on a

$$|u_1| = |u_2| = 1.$$

Or

$$|e^{ix_1y_2}| = 1.$$

Donc

$$|e^{ix_1y_2}u_1u_2| = 1.$$

Ainsi

$$e^{ix_1y_2}u_1u_2 \in S^1.$$

Donc le produit appartient encore à G .

2. Associativité

Considérons trois éléments

$$g_1 = (x_1, y_1, u_1), \quad g_2 = (x_2, y_2, u_2), \quad g_3 = (x_3, y_3, u_3).$$

Calculons d'abord

$$(g_1g_2)g_3.$$

On a

$$g_1g_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1y_2}u_1u_2).$$

Donc

$$(g_1g_2)g_3 = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, e^{i(x_1+x_2)y_3}e^{ix_1y_2}u_1u_2u_3).$$

Or

$$e^{i(x_1+x_2)y_3}e^{ix_1y_2} = e^{i(x_1y_3+x_2y_3+x_1y_2)}.$$

Ainsi

$$(g_1g_2)g_3 = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, e^{i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3)}u_1u_2u_3).$$

Calculons maintenant

$$g_1(g_2g_3).$$

D'abord :

$$g_2g_3 = (x_2 + x_3, y_2 + y_3, e^{ix_2y_3}u_2u_3).$$

Alors

$$g_1(g_2g_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, e^{ix_1(y_2+y_3)}e^{ix_2y_3}u_1u_2u_3).$$

Comme

$$e^{ix_1(y_2+y_3)}e^{ix_2y_3} = e^{i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3)},$$

on obtient

$$g_1(g_2g_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, e^{i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3)}u_1u_2u_3).$$

Ainsi

$$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3).$$

La loi est associative.

3. Élément neutre

Cherchons un élément

$$e = (a, b, v)$$

tel que

$$e \cdot (x, y, u) = (x, y, u).$$

On calcule :

$$(a, b, v) \cdot (x, y, u) = (a + x, b + y, e^{iay}vu).$$

Pour obtenir (x, y, u) pour tout (x, y, u) , il faut :

$$a = 0, \quad b = 0, \quad v = 1.$$

Donc l'élément neutre est

$$e = (0, 0, 1).$$

4. Inverse

Cherchons l'inverse de

$$g = (x, y, u).$$

Soit

$$g^{-1} = (a, b, v).$$

Nous voulons

$$g \cdot g^{-1} = e.$$

On calcule :

$$(x, y, u) \cdot (a, b, v) = (x + a, y + b, e^{ixb}uv).$$

Il faut donc :

$$a = -x, \quad b = -y,$$

et

$$e^{-ixy}uv = 1.$$

Ainsi

$$v = e^{ixy}u^{-1}.$$

Donc

$$(x, y, u)^{-1} = (-x, -y, e^{ixy}u^{-1}).$$

Nous avons donc montré que G est un groupe.

5. Structure différentielle

L'ensemble

$$G = \mathbb{R}^2 \times S^1$$

est une variété différentielle de dimension 3.

En effet :

- \mathbb{R}^2 est une variété différentielle ;
- S^1 est une variété différentielle de dimension 1 ;
- le produit de variétés différentielles est une variété différentielle.

6. Différentiabilité de la multiplication

Considérons l'application

$$m : G \times G \rightarrow G$$

définie par

$$m(g_1, g_2) = g_1 g_2.$$

Explicitement :

$$m((x_1, y_1, u_1), (x_2, y_2, u_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1 y_2} u_1 u_2).$$

Vérifions la différentiabilité composante par composante :

- Les applications

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2,$$

et

$$(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$$

sont lisses.

- L'application

$$(x_1, y_2) \mapsto x_1 y_2$$

est polynomiale donc lisse.

- L'application

$$t \mapsto e^{it}$$

est lisse.

- La multiplication complexe

$$(u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2$$

sur $S^1 \subset \mathbb{C}$ est lisse.

Par composition d'applications lisses,

$$m : G \times G \rightarrow G$$

est différentiable.

7. Différentiabilité de l'inversion

Considérons

$$i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}.$$

Explicitement :

$$i(x, y, u) = (-x, -y, e^{ixy} u^{-1}).$$

Vérifions chaque composante :

-

$$x \mapsto -x$$

et

$$y \mapsto -y$$

sont lisses ;

-

$$(x, y) \mapsto e^{ixy}$$

est lisse ;

- sur S^1 ,

$$u^{-1} = \bar{u},$$

et la conjugaison complexe est lisse.

Donc l'application d'inversion est différentiable.

Finalement :

- G est un groupe ;

- la multiplication est différentiable ;
- l'inversion est différentiable.

Par conséquent,

 G est un groupe de Lie.

Définition 1.1.6. On appelle sous groupe de Lie H d'un groupe de Lie G une sous-variété différentielle qui est aussi un sous-groupe.

De manière équivalente, l'injection $H \hookrightarrow G$ est un plongement de groupes de Lie.

Le type d'exemples de groupes de Lie qui nous intéresse de plus, sont des groupes de Lie matriciels. On commence par donner la définition d'un groupe de Lie matriciel.

Définition 1.1.7. On appelle le groupe général linéaire sur les nombres réels, noté $GL(n, \mathbb{R})$ le groupe de toutes les matrices de taille $n \times n$ inversibles avec des entrées dans \mathbb{R} .

Le groupe général linéaire sur les nombres complexes, noté $GL(n, \mathbb{C})$ le groupe de toutes les matrices de taille $n \times n$ inversibles avec des entrées dans \mathbb{C} .

Soit $M_n(\mathbb{C})$ l'espace de toutes les matrices de taille $n \times n$ avec des entrées complexes. On peut identifier l'espace $M_n(\mathbb{C})$ avec \mathbb{C}^{n^2} et utiliser la notion standard de convergence dans \mathbb{C}^{n^2} . Explicitement, ceci revient à utiliser les définitions qui suivent.

Définition 1.1.8. Soit A_m une suite de matrices complexes dans $M_n(\mathbb{C})$. On dit que A_m converge sur la matrice A si toute entrée de A_m converge sur l'entrée correspondante de A quand $m \rightarrow \infty$, i.e. si $(A_m)_{jk}$ converge sur A_{jk} pour tout $1 \leq j, k \leq n$.

Nous pouvons maintenant considérer les sous groupes G de $GL(n, \mathbb{C})$, i.e. des sous-espaces de $GL(n, \mathbb{C})$ tels que la matrice identité est dans G et que pour toutes les matrices A et B dans G , la matrice AB et A^{-1} sont aussi dans G .

Définition 1.1.9. Un groupe de Lie matriciel est un sous groupe G de $GL(n, \mathbb{C})$ satisfaisant la propriété suivante: si A_m est toute suite de matrices dans G et A_m converge sur une matrice A , alors soit la matrice A est un élément de G ou A est non inversible.

La condition sur G revient à dire que G est un sous groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$. Donc cette définition est équivalente à dire qu'un groupe de Lie matriciel est un sous groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$. La condition que G soit un sous groupe fermé, par opposition à un simple sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ doit être considéré techniquement, en ce que la plupart des sous groupes de $GL(n, \mathbb{C})$ ont cette propriété. La plupart des groupes de Lie matriciels doit avoir cette propriété forte définie par la définition 1.1.8

bien qu'on peut trouver des exemples de sous groupes de $GL(n, \mathbb{C})$ qui ne vérifient pas cette propriété (voir [1] définition 1.4 page 4 et 5).

Pour plus d'informations sur les exemples de groupes de Lie matriciels, voir [1], sur les pages de 5 à 30.

Exemple 1.1.10. Le groupe de Lie $SU(2)$ est définie par

$$SU(2) := \{U, \text{matrices carrées de tailles } 2 \times 2 : UU^* = I_2, \det(U) = 1.\}$$

Soit (3-sphere)

$$S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

On peut montrer que $SU(2)$ peut être identifié, vu comme une variété réelle, avec la 3-sphere S^3 .

(Faire cela en exercice: TD1)

Exemple 1.1.11. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. On peut montrer que H est

un groupe de Lie (appelé groupe d'Heisenberg) et par conséquent que G est un sous-groupe de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$.

(Faire cela en exercice: TD2)

Exemple 1.1.12. On peut également montrer que l'on a l'isomorphisme de groupes de Lie suivant

$$SO(2) \cong U(1) \cong S^1.$$

(Faire cela en exercice: TD3)

Exemple 1.1.13. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$. On peut montrer que

G est une sous variété différentielle et par conséquent que G est un sous-groupe de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$.

(Faire cela en exercice: TD4)

Exemple 1.1.14. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.

1. On peut prouver que G admet une structure de groupe de Lie
2. On peut vérifier que G est sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

(Faire cela en exercice: TD5)

Les exercices du livre [4], chapitre 4, peuvent nous aider à comprendre beaucoup plus les notions de groupes de Lie. Nous allons détaillé l'exemple suivant.

Exemple 1.1.15. Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\},$$

et l'application

$$\mu : G \longrightarrow GL(2, \mathbb{R})$$

définie par

$$\mu \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étudier les propriétés de μ .

Nous allons répondre successivement aux trois questions.

1. μ est-elle différentiable ?

Oui.

Un élément de G est entièrement déterminé par les paramètres

$$(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

Ainsi, on peut identifier

$$G \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

qui est une variété différentielle de dimension 2.

L'application μ s'écrit alors :

$$\mu(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les composantes de μ sont :

$$a, \quad b, \quad 0, \quad 1.$$

Autrement dit,

$$\mu : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

est donnée par

$$(a, b) \mapsto (a, b, 0, 1).$$

Ses composantes sont donc les fonctions :

$$f_1(a, b) = a,$$

$$f_2(a, b) = b,$$

$$f_3(a, b) = 0,$$

$$f_4(a, b) = 1.$$

Maintenant :

- $f_1(a, b) = a$ est une fonction polynomiale donc lisse ;
- $f_2(a, b) = b$ est lisse ;
- $f_3(a, b) = 0$ est constante donc lisse ;
- $f_4(a, b) = 1$ est constante donc lisse.

Or une application à valeurs dans \mathbb{R}^n est différentiable si chacune de ses composantes l'est.

Donc

$$\boxed{\mu \text{ est différentiable.}}$$

En fait, μ est même de classe C^∞ .

2. μ est-elle un homomorphisme de groupes de Lie ?

Oui.

Il faut vérifier :

- que μ est un homomorphisme de groupes ;
- et qu'elle est différentiable.

La différentiabilité a déjà été montrée.

Vérifions maintenant la compatibilité avec la multiplication.

Soient

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit dans G est :

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ b_1 a_2 + b_2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Appliquons μ :

$$\mu(g_1 g_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & b_1 a_2 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant

$$\mu(g_1)\mu(g_2).$$

On a

$$\mu(g_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(g_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu(g_1)\mu(g_2) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous comparons :

$$\mu(g_1 g_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & b_1 a_2 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\mu(g_1)\mu(g_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices ne sont pas égales en général.

Par exemple, si

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad b_1 = b_2 = 1,$$

alors

$$b_1 a_2 + b_2 = 4,$$

tandis que

$$a_1 b_2 + b_1 = 3.$$

Donc

$$\mu(g_1 g_2) \neq \mu(g_1)\mu(g_2).$$

Ainsi,

 μ n'est pas un homomorphisme de groupes.

Par conséquent, ce n'est pas un homomorphisme de groupes de Lie.

3. μ est-elle une immersion ?

Oui.

Rappelons qu'une application différentiable

$$f : M \rightarrow N$$

est une immersion si sa différentielle est injective en tout point.

Identifions

$$G \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

Alors

$$\mu(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de μ est :

$$d\mu_{(a,b)} : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons

$$d\mu_{(a,b)}(u, v) = 0.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Ainsi,

$$\ker(d\mu_{(a,b)}) = \{0\}.$$

Donc la différentielle est injective.

Par conséquent,

 μ est une immersion.

Conclusion

•

 μ est différentiable.

•

 μ n'est pas un homomorphisme de groupes de Lie.

•

 μ est une immersion.

1.2 Espaces tangents sur les espaces euclidiens \mathbb{R}^n

On va décrire les espaces tangents sur \mathbb{R}^n . Nous décrivons les premiers exemples sur la variété \mathbb{R}^n et nous généralisons cela sur les variétés arbitraires M .

Nous donnerons deux types de définition d'un vecteur tangent: définition géométrique (qui utilise la notion de courbe paramétrée) et la définition analytique (où un vecteur tangent est vu comme un opérateur linéaire de dérivation)

1.2.1 Définition géométrique d'un vecteur tangent

Nous commençons par la définition géométrique.

Définition 1.2.1. Soit $p \in \mathbb{R}^n$. Un vecteur tangent au point p est un n -uplet de nombres réels $v_p = (v_1, \dots, v_n)$ tel qu'il existe une courbe paramétrée différentiable $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les propriétés suivantes:

- $c(0) = p$
- $c'(0) = v_p = (v_1, \dots, v_n)$.

Définition 1.2.2. Pour tout point $p \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble de tous les vecteurs tangents en p , noté $T_p\mathbb{R}^n$, est appelé espace tangent sur \mathbb{R}^n au point p .

Le théorème suivant montre que sur les variétés plates, i.e, \mathbb{R}^n , pour tout point $p \in \mathbb{R}^n$, tout n -uplet peut être vu comme vecteur tangent dans \mathbb{R}^n au point p . Cela ne sera pas toujours vrai dans le cas général, i.e; cas de variété différentielles.

Théorème 1.2.3. Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$, tout n -uplet $v = (a_1, \dots, a_n)$ peut être vu comme vecteur tangent dans \mathbb{R}^n au point p .

Démonstration 1.2.4. Pour $p = (p_1, \dots, p_n)$, on définit une courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$c(t) = (p_1 + a_1t, \dots, p_n + a_nt).$$

Donc $c(0) = p$ et $c'(0) = v$, D'où $v = v_p \in T_p\mathbb{R}^n$.

L'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.2.5. Soit $p \in \mathbb{R}^n$. L'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$ muni des opérations d'addition composante à composante et de multiplication scalaire, est un espace vectoriel.

Démonstration 1.2.6. La preuve n'est pas difficile et peut être consultée dans [3], chap.3, page 77-78.

Interprété dans le sens du théorème 1.2.5, le théorème 1.2.3 peut être reformulé en disant que l'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$ est isomorphe à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . En particulier, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.7. La dimension de $T_p\mathbb{R}^n$ est égale à $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

Dans ce qui suit, nous formalisons la notion de linéarisation d'un ensemble paramétré S . Commençons par donner sa définition.

Définition 1.2.8. Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un sous ensemble de \mathbb{R}^n . On appelle U un domaine si il possède les propriétés topologiques le permettant d'être un ensemble ouvert connexe.

Définition 1.2.9. Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un domaine et soit $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k \leq n$) une application différentiable régulière en tout point $p \in U$, i.e; telle que $D\phi(p)$ une application linéaire biunivoque pour tout $p \in U$ (ayant le rang constant et maximal k). Un ensemble paramétré $S = \phi(U)$ est définie comme image de U dans \mathbb{R}^n par ϕ .

Définition 1.2.10. Soit $S = \phi(U)$ un ensemble paramétré et soit $p \in S$. L'espace tangent sur S en p , noté T_pS est un sous ensemble de $T_p\mathbb{R}^n$ défini par

$$T_pS = \{v_p \in T_p\mathbb{R}^n : \exists c : I \rightarrow S \text{ lisse avec } c(0) = p, c'(0) = v_p\}.$$

Dans cette définition, nous disons que la courbe paramétrée $c : I \rightarrow S$ est lisse si il existe une fonction différentiable $\tilde{c} : I \rightarrow U$ telle que $c = \phi \circ \tilde{c}$. Ainsi, l'espace tangent T_pS est un sous espace vectoriel de $T_p\mathbb{R}^n$.

Nous illustrons la définition 1.2.10 par des exemples: le premier étant simple(linéaire) et le deuxième étant non linéaire.

Exemple 1.2.11. Soit $S = \phi(U)$ avec $U = \mathbb{R}^2$ et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\phi(u, v) = (u, v, 2u - 3v).$$

On suppose $c : I \rightarrow S$ une courbe paramétrée lisse dans S . Donc il existe une fonction lisse $\tilde{c} : I \rightarrow U$ telle que $c = \phi \circ \tilde{c}$.

En d'autres termes, pour tout $t \in I$, il existe des fonctions $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\tilde{c}(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$$

et telle que

$$c(t) = \phi(u(t), v(t)) = (u(t), v(t), 2u(t) - 3v(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Cela étant, les fonctions composantes de la courbe $c : I \rightarrow S$ données par $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ doivent satisfaire la relation

$$2x(t) - 3y(t) - z(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I \quad (1.2.1)$$

ou bien

$$z(t) = 2x(t) - 3y(t) \text{ pour tout } t \in I. \quad (1.2.2)$$

Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$, i.e; $2x_0 - 3y_0 - z_0 = 0$. Dire que $v_p = (a, b, c)_p \in T_p\mathbb{R}^3$ signifie qu'il existe une courbe $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant $c(0) = p$ et $c'(0) = (a, b, c)_p$. Dire en plus que $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$ signifie que l'on a la restriction $c : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ qui doit satisfaire l'équation (1.2.1). En différenciant l'équation (1.2.1) par rapport a t , on a

$$2x'(t) - 3y'(t) - z'(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

En particulier,

$$0 = 2x'(0) - 3y'(0) - z'(0) = 2a - 3b - c.$$

En plus, si $(a, b, c)_p \in T_p\mathbb{R}^3$ satisfait la relation $2a - 3b - c = 0$, alors la courbe définie par $c(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ est une courbe $c : I \rightarrow S$ telle que

$$2(x_0 + at) - 3(y_0 + bt) - (z_0 + ct) = (2x_0 - 3y_0 - z_0) + t(2a - 3b - c) = 0.$$

Cette discussion montre que pour tout $p \in S$, on a

$$T_pS = \{(a, b, c)_p : 2a - 3b - c = 0\} \subset T_p\mathbb{R}^3.$$

Nous illustrons maintenant la définition 1.2.10 par un exemple non linéaire.

Exemple 1.2.12. Soit S un parabolöide, i.e; $S = \phi(U)$, où

$$U = \{(r, \theta) : 0 < r < 2, -\pi < \theta < \pi \text{ et } \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est définie par } \}$$

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2).$$

Nous étudions l'espace tangent sur S au point $p = \phi(\sqrt{2}, \pi/4) = (1, 1, 2)$.

En premier lieu, nous considérons deux courbes $\tilde{c}_i : I_i \rightarrow U$, $i = 1, 2$ où $I_1 = (-1/2, 1/2)$, $I_2 = (-\pi/2, \pi/2)$ définies par

$$\tilde{c}_1(t) = (t + \sqrt{2}, \pi/4)$$

et

$$\tilde{c}_2(t) = (\sqrt{2}, t + \pi/4).$$

Géométriquement, les courbes images $\tilde{c}_1(I_1)$ et $\tilde{c}_2(I_2)$ sont parallèles aux axes de coordonnées dans U et se coupent en $(\sqrt{2}, \pi/4) = \tilde{c}_1(0) = \tilde{c}_2(0)$. Maintenant, définissons les courbes $c_1 : I_1 \rightarrow S$ et $c_2 : I_2 \rightarrow S$ par $c_1 = \phi \circ \tilde{c}_1$ et $c_2 = \phi \circ \tilde{c}_2$. Explicitement, on a

$$\begin{aligned} c_1(t) &= ((t + \sqrt{2}) \cos(\pi/4), (t + \sqrt{2}) \sin(\pi/4), (t + \sqrt{2})^2) \\ &= \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1, \frac{t}{\sqrt{2}} + 1, (t + \sqrt{2})^2 \right). \end{aligned}$$

et de même, on a

$$\begin{aligned} c_2(t) &= (\sqrt{2} \cos(t + \pi/4), \sqrt{2} \sin(t + \pi/4), 2) \\ &= (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 2). \end{aligned}$$

Les courbes images $c_1(I_1)$ et $c_2(I_2)$ sont respectivement, la courbe d'intersection du plan $x = y$ avec la parabolôïde $z = x^2 + y^2$ et la courbe d'intersection du plan $z = 2$ avec la parabolôïde $z = x^2 + y^2$.

On note que $c_1(0) = p$ et $c_2(0) = p$, ce qui fait que les vecteurs tangents $v_p = c_1'(0)$ et $w_p = c_2'(0)$ sont par définition des éléments de $T_p S$. Explicitement,

$$\begin{aligned} v_p &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})_p \\ &= 1/\sqrt{2}(1, 1, 4)_p \end{aligned}$$

et $w_p = (-1, 1, 0)_p$.

En fait, nous montrons que toute combinaison linéaire de v_p et w_p est un vecteur tangent sur S en p . Soit $x_p = s_1 v_p + s_2 w_p$, i.e.,

$$x_p = \left(\frac{s_1}{\sqrt{2}} - s_2, \frac{s_1}{\sqrt{2}} + s_2, \frac{4s_1}{\sqrt{2}} \right)_p.$$

En adoptant les notations d'intervalles utilisées dans la preuve du théorème 1.2.5, nous posons $\tilde{I}_1 = \frac{1}{s_1}(-1/2, 1/2)$, $\tilde{I}_2 = \frac{1}{s_2}(-\pi/2, \pi/2)$ et $\tilde{I} = \tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$. On définit $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow U$ et $c : I \rightarrow S$ par

$$\tilde{c}(t) = (s_1 t + \sqrt{2}, s_2 t + \pi/4)$$

et

$$\begin{aligned} c(t) &= (\phi \circ \tilde{c}(t))(t) \\ &= \left((s_1 t + \sqrt{2}) \cos(s_2 t + \pi/4), (s_1 t + \sqrt{2}) \sin(s_2 t + \pi/4), (s_1 t + \sqrt{2})^2 \right). \end{aligned}$$

On peut vérifier que $c'(0) = x_p$ et donc que $x_p \in T_p S$. On note en plus que si $y_p = (a, b, c)_p \in T_p S$ alors

$$-2a - 2b + c = 0.$$

Ceci est une conséquence du fait que si $y_p = c'(0)$, où $c : I \rightarrow S$ est donné par

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ avec } c(0) = p = (1, 1, 2),$$

alors pour tout $t \in I$, les fonctions composantes satisfont l'équation

$$z(t) = [x(t)]^2 + [y(t)]^2,$$

et en différenciant par rapport à t , on a

$$z'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t).$$

L'évaluation en $t = 0$ donne l'équation

$$-2a - 2b + c = 0.$$

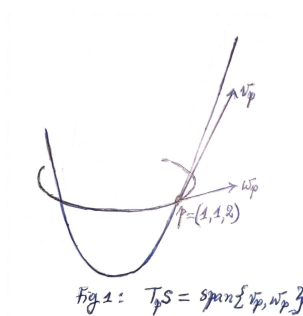
En comparant les ensembles $T_p S$ et

$$W = \{(a, b, c)_p : -2a - 2b + c = 0\} \subset T_p \mathbb{R}^3,$$

nous notons que les vecteurs $v_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 4)_p$ et $w_p = (-1, 1, 0)$ étudiés plus haut sont deux vecteurs linéairement indépendants dans le sous espace W et donc

$$T_p S = W = \text{Span}\{v_p, w_p\}.$$

On peut visualiser cette espace tangent sur le dessin suivant.



A l'aide de ces deux exemples développés précédemment, on peut illustrer la situation générale par le théorème et les corollaires suivants.

Théorème 1.2.13. Soient $U \subset \mathbb{R}^k$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $S = \phi(U)$. Soit $p \in S$, i.e; $p = \phi(\tilde{p})$ pour $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k) \in U$. Pour $i = 1, \dots, k$ on définit $\tilde{c}_i : I_i \rightarrow U$ par

$$\tilde{c}_i(t) = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_i + t, \dots, \tilde{p}_k);$$

où I_i est un intervalle approprié contenant 0 satisfaisant la condition $\tilde{c}_i(I_i) \subset U$. On définit $c_i : I_i \rightarrow S$ par $c_i = \phi \circ \tilde{c}_i$ et soit $(e_i)_p \in T_p S$ définie par $(e_i)_p = c'_i(0)$. Alors $\{(e_i)_p, \dots, (e_k)_p\}$ est une base de $T_p S$.

L'ensemble $\{(e_i)_p, \dots, (e_k)_p\}$ sera appelé la base standard de l'ensemble paramétré S . Les corollaires suivants dépendent du fait que la paramétrisation ϕ est régulière.

Corollaire 1.2.14. Supposons que $U \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation régulière et soit $S = \phi(U)$. Alors pour tout $p \in S$, $\dim T_p S = k$.

Corollaire 1.2.15. Si $S = \phi(U)$ est un ensemble paramétré, alors

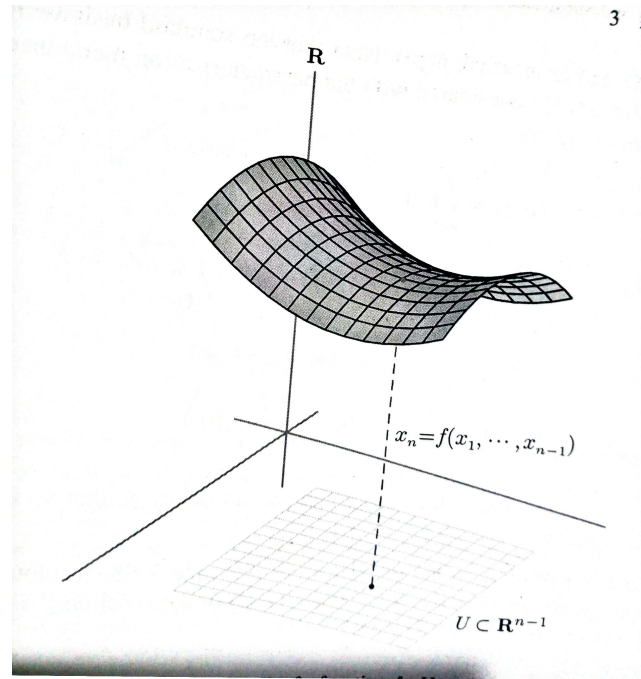
$$T_p S = \text{Image}(D\phi(\tilde{p})), \text{ avec } p = \phi(\tilde{p}).$$

Nous pouvons regarder le cas où S est un graphe d'une fonction f .

Définition 1.2.16. Soit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un domaine et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Le graphe de f est l'ensemble $S_f \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$S_f = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\}.$$

L'exemple d'un graphe d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n est donné par le dessin suivant.



Définition 1.2.17. Soit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un domaine et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $S_f \subset \mathbb{R}^n$ le graphe de f et soit $p \in S_f$. L'espace tangent sur S_f en p , notée $T_p S_f$, est un sous-espace de $T_p \mathbb{R}^n$ définie

$$T_p S_f = \{v_p \in T_p \mathbb{R}^n : \exists c : I \rightarrow S_f \text{ lisse avec } c(0) = p, c'(0) = v_p\}.$$

Théorème 1.2.18. Soit S_f un graphe d'une fonction lisse $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un domaine. L'espace tangent $T_p S_f$ est un sous-espace de $T_p \mathbb{R}^n$ avec $\dim T_p S_f = n - 1$.

Démonstration 1.2.19. L'énoncé peut être réduit au théorème 1.2.13 et ses corollaires en exhibant la paramétrisation de S_f , i.e., une fonction biunivoque, lisse et régulière $\phi : U \rightarrow S_f$. Ceci peut être fait en définissant $\phi : U \rightarrow S_f$ par

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Le fait que ϕ est de rang $n - 1$ vient du calcul de la matrice jacobienne en tout point dans U ; d'où ϕ est régulière.

Théorème 1.2.20. Pour un graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$T_p S_f = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)_p : a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{p})\},$$

avec $p = (\tilde{p}, f(\tilde{p}))$, $\tilde{p} \in U$.

Démonstration 1.2.21. Soit $\tilde{p} \in U$ et soit $p = (\tilde{p}, f(\tilde{p}))$. Notons que les vecteurs de la base standard de $T_p S_f$ considéré avec la paramétrisation mentionnée dans la preuve du théorème 1.2.18 sont

$$\begin{aligned} (e_1)_p &= \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{p})\right)_p ; \\ (e_2)_p &= \left(0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{p})\right)_p ; \\ &\vdots \\ (e_{n-1})_p &= \left(0, 0, \dots, 0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\tilde{p})\right)_p . \end{aligned}$$

L'affirmation du théorème n'est qu'une reformulation de dire que v_p est une combinaison linéaire des vecteurs de base e_1, \dots, e_{n-1} .

Exemple 1.2.22. En retournant au parabolöide de l'exemple 1.2.12, nous notons que la surface S peut être exprimé comme le graphe $z = f(x, y)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Par le théorème 1.2.20, on a

$$T_p S = \{(a, b, c)_p : c = a(2p_1) + b(2p_2)\},$$

avec $p = (p_1, p_2, p_3)$ et donc $p_3 = p_1^2 + p_2^2$. Par exemple, avec $p = (1, 1, 2)$ comme dans l'exemple 1.2.12,

$$T_p S = \{(a, b, c)_p : c = 2a + 2b\}$$

correspondant au résultat obtenu.

1.2.2 Définition analytique d'un vecteur tangent

Nous commençons par une notion indispensable correspondant à la dérivée d'une fonction dans la direction d'un vecteur tangent v_p .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine contenant le point $p \in U$. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée lisse telle que $c(0) = p$. Donc, par la loi de chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0} &= Df(c(0))c'(0) \\ &= \nabla f(p).v_p; \end{aligned}$$

où $v_p = c'(0)$. Nous voyons donc le vecteur tangent comme un opérateur (une fonction) dont le domaine contient des fonctions lisses définies autour de p et à valeurs dans \mathbb{R} :

$$v_p : f \mapsto v_p(f) := \nabla f(p).v_p \in \mathbb{R}$$

où $\nabla f(p).v_p$ est un produit scalaire standard entre $\nabla f(p)$ et v_p .

Définition 1.2.23. Soit $p \in \mathbb{R}^n$. Un vecteur tangent en p est un opérateur

$$v_p : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant les trois propriétés

1. pour tous $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a: $v_p(f + g) = v_p(f) + v_p(g)$;
2. pour tout $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $c \in \mathbb{R}$, on a $v_p(cf) = cv_p(f)$,
3. pour tous $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$v_p(f.g) = v_p(f).g(p) + f(p).v_p(g).$$

Les deux premières propriétés montrent que v_p est un opérateur linéaire tandis que la troisième montre que v_p obéit la loi de Leibniz. Ainsi, un opérateur satisfaisant les trois propriétés est appelé **une dérivation linéaire**.

Les prototypes de vecteurs tangents vu comme des dérivations linéaires sont des dérivées partielles comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.2.24. Pour $i = 1, \dots, n$ soit $(\partial_i)_p : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

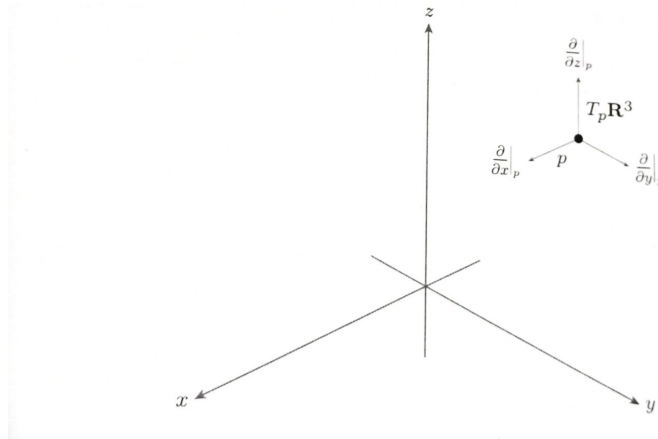
$$(\partial_i)_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p.$$

Donc $(\partial_i)_p$ est une dérivation linéaire.

Théorème 1.2.25. L'ensemble $T_p\mathbb{R}^n$ de toutes les dérivations linéaires en $p \in \mathbb{R}^n$, muni des opérations usuelles d'addition et multiplication scalaire des fonctions, forme un espace vectoriel. L'espace $T_p\mathbb{R}^n$ est appelé espace (analytique) tangent en p

Théorème 1.2.26. L'espace $\mathcal{B}_0 = \{(\partial_1)_p, (\partial_2)_p, \dots, (\partial_n)_p\}$ des opérateurs dérivées partielles est une base pour l'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$.

Nous appellerons cette base, la base standard pour $T_p\mathbb{R}^n$ et on peut l'illustrer sur la figure suivante.



La preuve de ce théorème, qu'on peut trouver dans [3], pages 93-95, utilise une version du théorème de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables.

Corollaire 1.2.27. Pour tous les espaces euclidiens \mathbb{R}^n , la dimension $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

Nous pouvons donc voir qu'en utilisant la base standard pour $T_p\mathbb{R}^n$ un vecteur tangent est une combinaison linéaire de dérivations linéaires, i.e;

$$v_p = \sum c_i (\partial_i)_p \text{ et donc } v_p(f) = \sum c_i (\partial_i)_p(f) = \sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p,$$

qui correspond à la définition standard de la dérivée directionnelle dans la direction de $v = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ dans le cas où v est un vecteur unité.

Nous analysons maintenant analytiquement le cas des espaces tangents sur des ensembles paramétrés $S = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ avec $U \subset \mathbb{R}^k$ et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation régulière lisse. Dans ce cas, pour tout $p = \phi(a) \in S$, nous dirons que $f \in C_p^\infty(S) \subset C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe une fonction lisse $\tilde{f} \in C_a(\mathbb{R}^k)$ telle que $\tilde{f} = f \circ \phi$. Ceci conduit à la caractérisation de l'espace tangent.

Théorème 1.2.28. Soit $S = \phi(U)$ un espace paramétré décrit par un domaine $U \subset \mathbb{R}^k$ et une paramétrisation régulière lisse $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$). Pour tout $p = \phi(a) \in S$, on définit une transformation linéaire

$$\Phi_a : T_a \mathbb{R}^k \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$$

pour laquelle la matrice relative aux bases standard

$$\begin{aligned} \left((\tilde{\partial}_1)_a = \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_a, \dots, (\tilde{\partial}_k)_a = \frac{\partial}{\partial u_k} \Big|_a \right) &\subset T_a \mathbb{R}^k, \\ \left((\partial_1)_p = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, (\partial_n)_p = \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) &\subset T_p \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

est donnée par $[D\phi(a)]$, la matrice jacobienne pour ϕ en $a \in \mathbb{R}^k$. Donc on a

$$T_p S = \text{Image}(\Phi_a).$$

Démonstration 1.2.29. Nous allons montrer que l'ensemble $B_p = \{(e_1)_p, \dots, (e_k)_p\}$, où $(e_i)_p = \Phi_a((\tilde{\partial}_i)_a)$, est une base pour $T_p S$. L'ensemble B_p est linéairement indépendant grâce à la propriété correspondante de l'ensemble $((\tilde{\partial}_1)_a, \dots, (\tilde{\partial}_k)_a)$ et au fait que Φ_a est bijectif (puisque ϕ est régulière).

Pour montrer que B_p engendre $T_p S$, nous notons que les dérivations linéaires sur $C_p^\infty(S)$ sont en correspondance bijective avec les dérivations linéaires sur $C_a^\infty(\mathbb{R}^k)$, une conséquence du fait que $f \in C_p^\infty(S)$ si et seulement si il existe une fonction lisse $\tilde{f} \in C_a^\infty(\mathbb{R}^k)$ telle que $\tilde{f} = f \circ \phi$. Pour tout f et son correspondant \tilde{f} , la règle de dérivation en chaînes donne

$$\begin{aligned} (\tilde{\partial}_i)_a(\tilde{f}) &= \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_a [f \circ \phi] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_p \frac{\partial \phi^k}{\partial u_i} \Big|_a = \sum_{k=1}^n [D\phi(a)]_i^k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p (f) \quad \text{car } x_k = \phi(u_k) \\ &= \Phi_a((\tilde{\partial}_i)_a)(f) \quad \text{où } \Phi_a = D\phi(a) =: (\phi_{*a}) \\ &= (e_i)_p[f]. \end{aligned}$$

Donc, dire que B_p engendre $T_p S$ est équivalent à dire que $((\tilde{\partial}_1)_a, \dots, (\tilde{\partial}_k)_a)$ engendre $T_a \mathbb{R}^k$.

Corollaire 1.2.30. Pour un espace paramétré $S = \phi(U)$, on a $\dim(T_p S) = k$, où $U \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation lisse régulière.

Maintenant, nous tournons notre attention sur un espace géométrique vu comme le graphe d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 1.2.31. Soit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un domaine et soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $S_g \subset \mathbb{R}^n$ le graphe de g :

$$S_g = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U, x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Donc pour $p = (\tilde{p}, g(\tilde{p}))$, $\tilde{p} \in U$, on a

$$T_p S_g = \{a_1(\partial_1)_p + \dots + a_n(\partial_n)_p \mid a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\tilde{p}}\} \subset T_p \mathbb{R}^n.$$

Démonstration 1.2.32. La preuve est identique à celle du théorème 1.2.20. En particulier, en utilisant la paramétrisation de S par la fonction $\phi : U \rightarrow S$ donnée par $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$, le théorème 1.2.28 nous donne

$$(e_i)_p = (\partial_i)_p + \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\tilde{p}} (\partial_n)_p,$$

pour $i = 1, \dots, n-1$.

Théorème 1.2.33. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable à valeurs dans \mathbb{R} avec une valeur régulière c et soit

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : \Phi(x_1, \dots, x_n) = c\}.$$

Alors pour $p \in S$, on a

$$T_p S = \left\{ c_1(\partial_1)_p + \dots + c_n(\partial_n)_p : c_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_p + \dots + c_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)_p = 0 \right\}.$$

Démonstration 1.2.34. cfr [3] page 98.

1.2.3 Dérivation entre espaces tangents

Nous décrivons la dérivation d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire, vu comme application linéaire entre espaces tangents.

Définition 1.2.35. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en un point $p \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire tangente de f en p est une fonction, notée $(f_*)_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ définie dans un des deux cas équivalents suivants:

1. Pour $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$, $v_p = c'(0)$ pour une courbe différentiable $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $c(0) = p$, on définit

$$(f_*)_p(v_p) = (f \circ c)'(0),$$

ou bien

2. Pour $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ donné comme dérivation linéaire, on définit

$$((f_*)_p(v_p))[\phi] = v_p[\phi \circ f],$$

où $\phi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Le fait que les deux définitions sont équivalentes provient de l'équivalence des définitions de l'espace tangent décrite dans la section précédente. Le théorème suivant qui montre le rôle de la matrice jacobienne devra fournir plus d'informations sur l'unité des deux approches.

Théorème 1.2.36. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $p \in \mathbb{R}^n$. L'application tangente

$$(f_*)_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

est une transformation linéaire entre espaces tangents. En plus, utilisant l'une ou l'autre des définitions, la transformation linéaire $(f_*)_p$ peut être représentée matriciellement (relativement aux bases standards) par la matrice jacobienne $[Df(p)]$.

Démonstration 1.2.37. Il existe plusieurs considérations à prouver. Premièrement, nous avons besoin de montrer que par l'une ou l'autre définition, on a $(f_*)_p(v_p) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Nous laissons ce travail aux étudiants bien que nous illustrerons la propriété de la règle du produit pour l'opérateur $(f_*)_p(v_p)$ en $f(p)$ dans le cas de la définition analytique. Notons que pour $\phi_1, \phi_2 \in C_{f(p)}^\infty\mathbb{R}^m$, nous avons $\phi_1 \circ f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\phi_2 \circ f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ceci est possible grâce à la différentiabilité de f . Aussi nous avons

$$(\phi_1 \cdot \phi_2) \circ f = (\phi_1 \circ f) \cdot (\phi_2 \circ f).$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} ((f_*)_p(v_p))[\phi_1 \cdot \phi_2] &= v_p[(\phi_1 \cdot \phi_2) \circ f] \\ &= v_p[(\phi_1 \circ f) \cdot (\phi_2 \circ f)] \\ &= (\phi_1 \circ f)(p)v_p[\phi_2 \circ f] + (\phi_2 \circ f)(p)v_p[\phi_1 \circ f] \\ &= \phi_1(f(p))((f_*)_p(v_p))[\phi_2] + \phi_2(f(p))((f_*)_p(v_p))[\phi_1]. \end{aligned}$$

Ici nous nous appuyons au fait que v_p est une dérivation linéaire. Ceci avec la propriété de linéarité, ça montre que $(f_*)_p(v_p)$ est une dérivation linéaire en $f(p)$. Le second argument à prouver est que $(f_*)_p$ est une transformation (application) linéaire. Montrons une partie en utilisant la définition géométrique. Soit $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Donc, il existe des courbes $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $c_1(0) =$

$c_2(0) = p, c_1'(0) = v_p$ et $c_2'(0) = w_p$. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe telle $c(0) = p$ et $c'(0) = c_1'(0) + c_2'(0)$. Alors, en utilisant la règle des dérivations composées, on a

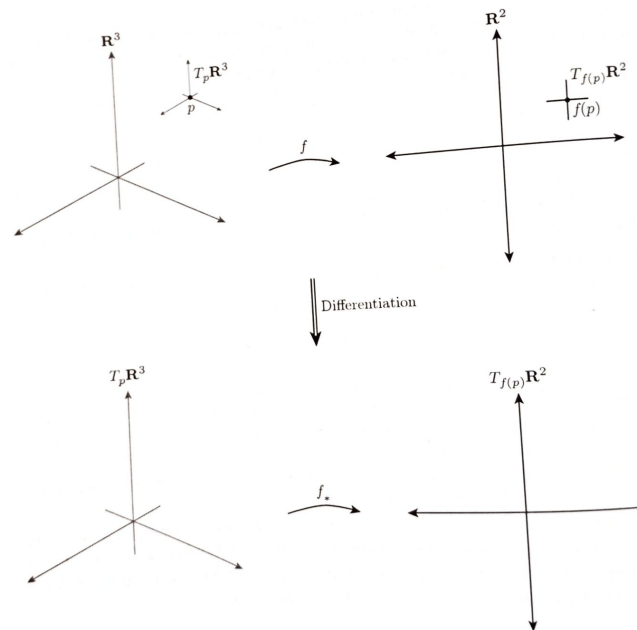
$$\begin{aligned}
 (f_*)_p(v_p + w_p) &= (f \circ c)'(0) \\
 &= (Df(c(0)))(c'(0)) \\
 &= (Df(p))(c_1'(0) + c_2'(0)) \\
 &= (Df(p))(c_1'(0)) + (Df(p))(c_2'(0)) \quad (Df(p) \text{ est linéaire}) \\
 &= (f \circ c_1)'(0) + (f \circ c_2)'(0) \\
 &= (f_*)_p(v_p) + (f_*)_p(w_p).
 \end{aligned}$$

Le fait que $(f_*)_p$ préserve la multiplication scalaire suit de façon similaire.

Le dernier argument à prouver est que la représentation matricielle de $(f_*)_p$ en utilisant la base standard des vecteurs est une matrice jacobienne. Dans la définition analytique, elle est essentiellement donnée par le théorème 1.2.28 qui, lu dans ce contexte, implique que les colonnes de la matrice $(f_*)_p$ sont données par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Le schéma suivant illustre la situation de la dérivation $(f_*)_p$ d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vu comme application linéaire entre espaces tangents.



On présente quelques exemples de calcul de f_* en un point.

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Calculer l'application

$$f_* : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}.$$

En effet, on a

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)} = (3x^2 + y)(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)} = (x + 3y^2)(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

On note que f_* ne peut pas être injective en aucun point car $\dim\mathbb{R}^2 > \dim\mathbb{R}$.

On considère ensuite l'application

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x^2y + y, x - 2y^3, ye^x).$$

1. Calculer $g_{*(x,y)}$
2. Trouver $g_* \left(\left(4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)_{(0,1)} \right)$
3. Calculer les conditions que doivent satisfaire les constantes λ, μ, ν pour que le vecteur

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \right)_{g(0,0)}$$

soit une image d'un certain vecteur par g_* .

En effet,

1. on a

$$g_{*(x,y)} \equiv \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 2y \\ 1 & -6y^2 \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

2. et ensuite, on a

$$\begin{aligned} g_* \left(\left(4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)_{(0,1)} \right) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}_{g(0,1)} \\ &\equiv \left(-2\frac{\partial}{\partial x} + 10\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z} \right)_{(1,-2,1)}. \end{aligned}$$

3. Puisque

$$g_{*(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'image par g_* de $T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ est un sous espace vectoriel de $T_{(0,0,0)}\mathbb{R}^3$ des vecteurs du type $(0, \mu, \nu)$. Explicitement,

$$g_*(v_{(0,0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_{(0,0)} = w_{g(0,0)}$$

donc on cherche la forme du vecteur image $w_{g(0,0)}$, i.e,

$$g_* \left(\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)_{(0,0)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}_{g(0,0)}.$$

1.3 Espaces tangents sur les Variétés différentielles

Commençons par rappeler la notion de fonction sur une variété différentielle.

Définition 1.3.1. Une fonction f à valeurs réelles sur une variété différentielle M est une application

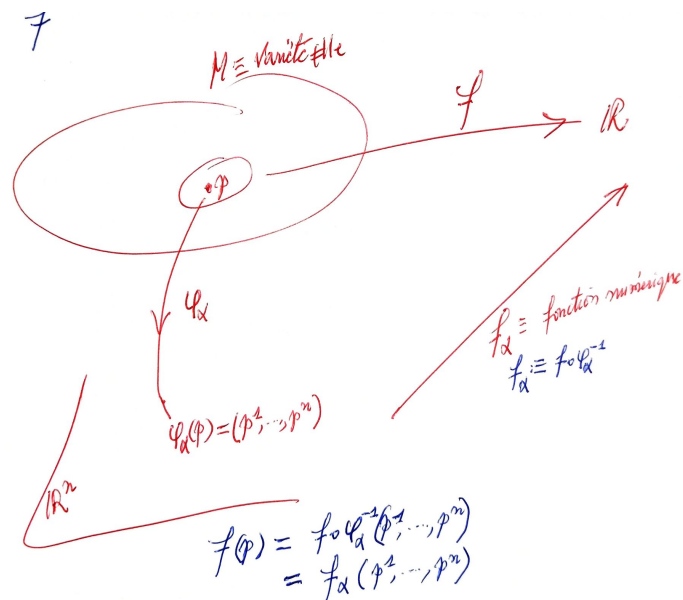
$$f : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto f(p).$$

Si $\varphi_\alpha(p) = (p^1, \dots, p^n)$ est un système de coordonnées locales, alors f est représentée par une fonction numérique à n variables:

$$f_\alpha(p) = f(\varphi_\alpha^{-1}(p^1, \dots, p^n)).$$

On note $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions sur M dérivables une infinité de fois (i.e, si f_α est C^∞ pour tout indice α de carte φ_α).

Le schéma suivant précise ce qui est dit par la définition 1.3.1.



Soient M une variété différentielle de dimension n , $p \in M$ et

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M : t \mapsto c(t)$$

une courbe paramétrée ou trajectoire sur M passant par p au temps t_0 , i.e; $c(t_0) = p$.

Si $\varphi_\alpha(p) = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ est un système de coordonnées locales, alors c est représentée par les n coordonnées de la trajectoire,

$$t \mapsto (p^1(t), p^2(t), \dots, p^n(t)) = \varphi_\alpha(c(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

1.3.1 Définition géométrique d'un vecteur tangent

Définition 1.3.2. On appelle vecteur tangent en p sur c , un objet représenté par le vecteur $v = (\varphi \circ c)'(t_0)$ dans la carte locale (U, φ) en p .

Si (V, ψ) est une autre carte locale en p et si D indique la dérivation, alors on a:

$$(\psi \circ c)'(t_0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(t_0).$$

ou tout simplement, si on veut uniformiser les notations

$$(\psi \circ c)'(t_0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(t_0).$$

1.3.2 Définition analytique d'un vecteur tangent

Définition 1.3.3. Le vecteur tangent V_x à la courbe c au point $c(0) = x$ est l'application

$$V_x : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto V_x(f) = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}.$$

On remarque que V_x agit sur les fonctions et renvoie un nombre qui détecte leur variation au premier degré.

Expression d'un vecteur tangent V en coordonnées locales

Si $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) = \varphi_\alpha(c(t))$ sont les coordonnées du point x sur la courbe paramétrée c et $f(x) := f(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)) = f_\alpha(x^1, \dots, x^n)$ alors

$$f(c(t)) = f(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(c(t)))) = f_\alpha(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

et d'après la formule de composition,

$$\begin{aligned} V_x(f(c(t))) &= \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{df_\alpha(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^1} \right) \frac{dx^1}{dt} + \dots + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^n} \right) \frac{dx^n}{dt} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_\alpha \end{aligned}$$

et donc l'expression de V_x en coordonnées locales au point $x = c(0)$ est donc donnée par $V_x(f_\alpha) = (V_x)_\alpha(f_\alpha)$ avec

$$(V_x)_\alpha = \sum_{i=1}^n V^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \quad V^i = \left. \frac{dx^i(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R} : \text{"composante"}. \quad (1.3.1)$$

Si on considère une autre courbe paramétrée c' passant par le même point $c(0)$, les composantes V^i seront différentes.

1.3.3 Espace tangent

Définition 1.3.4. En tout point $x \in M$, un vecteur tangent V_x s'écrit en coordonnées locales comme $V_x(f) = (V_x)_\alpha(f_\alpha)$ avec $(V_x)_\alpha$ donné par la formule (1.3.1), $V^i \in \mathbb{R}$ et $(V^1, \dots, V^n) \in \mathbb{R}^n$ étant les composantes de V_x . On appelle espace tangent au point x sur M , on note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents au point x .

On peut montrer:

1. que $(V_x)_\alpha$ est un opérateur différentiel d'ordre 1
2. que l'espace $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n et que les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ forment une base de $T_x M$ (base associée au choix des coordonnées).

Soit $N \subset M$ une sous-variété de M paramétrée par l'immersion $\phi : \tilde{N} \rightarrow M$. L'espace tangent sur N en $y \in N$ est par définition l'image de l'espace tangent sur \tilde{N} au point \tilde{y} correspondant:

$$T_y N = d\phi(T_{\tilde{y}} \tilde{N}), \quad y = \phi(\tilde{y}) \in N.$$

On note que $T_y N$ est un sous-espace de $T_y M$ de la même dimension que N . Il existe une caractérisation de l'espace tangent de la sous-variété définie implicitement.

Théorème 1.3.5. Soit $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n < m$ de rang maximal sur $N = \{x : F(x) = 0\}$. Donc $N \subset M$ est une sous-variété régulière de dimension $(m - n)$ définie implicitement. Étant donné $y \in N$, l'espace tangent sur N en y est précisément le noyau de la différentielle dF de la fonction F en y :

$$T_y N = \{V \in T_y M : DF(V) = 0\}.$$

Démonstration 1.3.6. Si $\phi(\varepsilon)$ paramétrise une courbe lisse C sur N passant par $y = \phi(\varepsilon_0)$, alors $F(\phi(\varepsilon)) = 0$ pour tout ε . En différenciant par rapport à ε , on voit que

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} (F(\phi(\varepsilon))) = dF(\dot{\phi}(\varepsilon)).$$

Par conséquent, le vecteur tangent $\dot{\phi}$ sur C est dans le noyau de dF . La réciproque suit par comptage de la dimension, en utilisant le fait que dF est de rang n en y .

On donne quelques exemples suivants.

1. On considère la sphere unité $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ dans \mathbb{R}^3 . En tout point $p = (x, y, z)$ sur la sphere S^2 , l'espace tangent $T_p S^2$ est donnée par le noyau de la différentielle de la fonction définie implicitement par

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{en } p.$$

Donc, on a

$$dF = 2xdx + 2ydy + 2zdz, \quad \text{donc} \quad (dF)_p = (2xdx + 2ydy + 2zdz)_p.$$

Si

$$V = (a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z)_p$$

est un vecteur tangent sur S^2 , alors $dF(V) = 0$, et inversement. Donc en $p = (x, y, z)$ on doit d'abord avoir

$$\begin{aligned} dF(V) &= 2xdx + 2ydy + 2zdz(a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z) \\ &= 2ax + 2by + 2cz \end{aligned}$$

et ensuite $2ax + 2by + 2cz = 0$. Ainsi, l'espace tangent devient alors

$$T_{(x,y,z)}S^2 = \{a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z : 2ax + 2by + 2cz = 0\}$$

2. Trouver l'espace tangent au point $p(1, 1, 1)$ sur la surface S dans \mathbb{R}^3 définie par l'équation $F(x, y, z) = x^3 - y^3 + xyz - xy$.

En effet, on a d'abord

$$dF = (3x^2 + yz - y)dx + (-3y^2 + xz - x)dy + xydz$$

et donc $(dF)_p = (3dx - 3dy + dz)_p$. Si

$$V = (a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z)_p$$

est un vecteur tangent sur S , alors $dF(V) = 0$, et inversement. Donc au point $p = (1, 1, 1)$, on doit avoir $3a - 3b + c = 0$, i.e, $c = -3a + 3b$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V_p &= (a\partial_x)_p + (b\partial_y)_p + ((-3a + 3b)\partial_z)_p \\ &= a(\partial_x - 3\partial_z)_p + b(\partial_y + 3\partial_z)_p. \end{aligned}$$

Donc, les vecteurs $(\partial_x - 3\partial_z)_p$ et $(\partial_y + 3\partial_z)_p$ constitue une base de l'espace tangent à S au point $p = (1, 1, 1)$.

3. Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ définie par $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ qui définit une structure différentiable sur $S = F^{-1}(0)$. On considère les champs de vecteurs

$$X = (x^2 - 1)\partial_x + xy\partial_y + xz\partial_z, \quad Y = x\partial_x + y\partial_y + 2xz^2\partial_z.$$

Ces champs de vecteurs définissent-ils des vecteurs tangents à S ?

En effet, Si $p \in S$ et $X_p \in T_p\mathbb{R}^3$, alors X_p est tangent à la sous-variété S si et seulement si $X(F) = 0$. Donc, on a que

$$X(F) = (x^2 - 1)\partial_x F + xy\partial_y F + xz\partial_z F = 2x(x^2 + y^2 - 1).$$

Ainsi, si $p = (x, y, z) \in S$, alors $X_p(F) = 0$. Donc X_p est tangent à la sous-variété S .

De même, $Y(F) = 2x^2 + 2y^2$. Si $p = (x, y, z) \in S$, alors $Y_p(F) = 2$, donc Y_p n'est pas tangent à la sous-variété S .

1.4 Espace cotangent sur une variété différentielle

On rappelle qu'une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire sur E à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'espace des formes linéaires est appelé espace dual et noté E^* .

Définition 1.4.1. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction, sa différentielle en un point $x \in M$ est une forme linéaire sur l'espace tangent $T_x M$ et défini par (grâce à l'équation (1.3.1) et la définition 1.3.4):

$$df : T_x M \rightarrow \mathbb{R} : V_x \mapsto df(V_x) := V_x(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} V^i. \quad (1.4.1)$$

Il est clair que $(df) \in (T_x M)^*$. Le nombre $df(V_x)$ représente la variation infinitésimale de la fonction f dans la direction du vecteur V au point $x \in M$.

En particulier, si $f = x^i$ (la fonction coordonnée x^i), alors sa différentielle est

$$dx^i(V_x) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right)}_{\delta_{i,j}} V^j = V^i. \quad (1.4.2)$$

En injectant l'équation (1.4.2) dans l'équation (1.4.1), on peut écrire donc

$$df(V_x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(V_x)$$

relation valable pour tout V_x . On en déduit donc une notation pour df indépendante du système de coordonnées:

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i. \quad (1.4.3)$$

On en déduit la proposition suivante:

Proposition 1.4.2. En tout point $x \in M$, une forme linéaire, aussi appelée vecteur cotangent est une forme linéaire

$$\xi : T_x M \rightarrow \mathbb{R} : V_x \mapsto \xi(V_x) = \sum_{i=1}^n \xi_i V^i, \text{ où } \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i \quad (1.4.4)$$

avec les composantes $(\xi_i)_i \in \mathbb{R}^n$ appelées coordonnées duales.

On a maintenant tous les ingrédients pour définir un espace cotangent, i.e, l'espace dual de l'espace tangent.

Définition 1.4.3. On appelle espace cotangent au point x , l'ensemble des vecteurs cotangents au point $x \in M$ et est notée $T_x^*M := (T_xM)^*$. C'est un espace vectoriel de dimension n et les vecteurs $(dx^i)_{i=1\dots n}$ forment une base de T_x^*M associée aux choix de coordonnées locales.

Remarque 1.4.4. La base de T_x^*M notée (dx^1, \dots, dx^n) est appelée base duale de la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ de T_xM , car on a la relation suivante (en notant $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$): c'est-à-dire,

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{i,j}.$$

Exemple 1.4.5. Sur \mathbb{R}^2 , avec les coordonnées polaires et cartésiennes $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, considérons $\alpha = dx$ (de coordonnées $(\alpha_x, \alpha_y) = (1, 0)$ dans la base (dx, dy)). On écrit (en dérivant):

$$\begin{aligned} \alpha = dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Plus généralement, si (x^1, \dots, x^n) et (y^1, \dots, y^n) sont deux systèmes de coordonnées et

$$\xi = \sum_j \xi^j dx^j = \sum_k \eta_k dy^k$$

est un champ de vecteurs cotangents alors ses coordonnées dans les deux systèmes sont reliées par

$$\forall k, \eta_k = \sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k} \right) \xi_j \quad (1.4.5)$$

D'après cette equation 1.4.5, en physique, on appelle le vecteur des composantes $(\xi_j)_j$, un vecteur covariant.

Chapitre 2

Espace fibré sur une variété différentielle

2.1 Fibration

Soient P et M deux variétés différentielles et

$$\pi : P \rightarrow M$$

une application différentiable surjective.

Pour chaque point

$$x \in M,$$

on définit la **fib**re au-dessus de x par

$$F_x = \pi^{-1}(x) = \{p \in P ; \pi(p) = x\}.$$

Lorsque x parcourt M , les ensembles F_x forment une famille de sous-espaces de P .

Rappelons qu'un difféomorphisme est une application :

- bijective ;
- différentiable ;
- dont l'inverse est aussi différentiable.

Définition 2.1.1. On dit que

$$\pi : P \rightarrow M$$

est une **fibration** si toutes les fibres

$$F_x = \pi^{-1}(x)$$

sont difféomorphes entre elles.

On appelle alors **fibre type** une variété F telle que

$$F_x \simeq F \quad \forall x \in M.$$

Dans le cas où les fibres sont discrètes, on demande simplement qu'elles aient toutes le même cardinal.

Définition 2.1.2. Une fibration

$$\pi : P \rightarrow M$$

est appelée **espace fibré localement trivial** si pour tout ouvert

$$U \subset M,$$

il existe un difféomorphisme

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

tel que

$$\text{pr}_1 \circ \Phi_U = \pi.$$

Autrement dit, localement le fibré ressemble au produit

$$U \times F.$$

Dans ce contexte :

- P est appelé **espace total** ;
- M est appelé **base** ;
- F est la **fibre type** ;
- π est la **projection** .

Interprétation géométrique

Un espace fibré peut être vu comme une famille de copies de la fibre F attachées à chaque point de la base M .

Pour chaque point

$$x \in M,$$

la fibre

$$F_x = \pi^{-1}(x)$$

représente la “copie” de F située au-dessus de x .

Localement, tout fibré ressemble à un produit :

$$U \times F.$$

Mais globalement, les fibres peuvent être recollées de manière non triviale.

Exemple 1 : fibré trivial

Considérons

$$P = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad M = \mathbb{R}^2.$$

Définissons

$$\pi : P \rightarrow M$$

par

$$\pi(x, y, z) = (x, y).$$

Calcul des fibres

Fixons

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{(x_0, y_0)} &= \pi^{-1}(x_0, y_0) \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) = (x_0, y_0)\}. \end{aligned}$$

Donc

$$F_{(x_0, y_0)} = \{(x_0, y_0, z) ; z \in \mathbb{R}\}.$$

Cette fibre est une droite verticale difféomorphe à \mathbb{R} .

Ainsi toutes les fibres sont difféomorphes à

$$F = \mathbb{R}.$$

Trivialité locale

Ici,

$$\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$$

pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

Le fibré est donc trivial.

Exemple 2 : cylindre

Considérons

$$P = S^1 \times \mathbb{R},$$

et

$$\pi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

définie par

$$\pi(x, t) = x.$$

Pour

$$x \in S^1,$$

la fibre est

$$F_x = \{x\} \times \mathbb{R}.$$

Donc

$$F_x \simeq \mathbb{R}.$$

Le cylindre est donc un fibré de base S^1 et de fibre type \mathbb{R} .

Exemple 3 : ruban de Möbius

Le ruban de Möbius est un exemple important de fibré non trivial.

On part du rectangle

$$[0, 1] \times \mathbb{R}$$

et on identifie

$$(0, t) \sim (1, -t).$$

On obtient un espace noté M .

La projection

$$\pi : M \rightarrow S^1$$

associe à chaque classe la coordonnée horizontale modulo 1.

Fibres

Pour chaque point du cercle, la fibre est une copie de \mathbb{R} .

Donc localement :

$$\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}.$$

Mais globalement, les fibres sont recollées avec une inversion :

$$t \mapsto -t.$$

Le fibré n'est donc pas trivial.

Exemple 4 : sphère comme fibré

Considérons

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Définissons

$$\pi : S^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow S^1$$

par

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Cette projection oublie la coordonnée verticale.

Fixons

$$u = (u_1, u_2) \in S^1.$$

Cherchons la fibre :

$$F_u = \pi^{-1}(u).$$

Les points de cette fibre sont de la forme

$$(x, y, z) = (ru_1, ru_2, z),$$

avec

$$r^2 + z^2 = 1.$$

Comme

$$r = \sqrt{1 - z^2},$$

la fibre est paramétrée par

$$z \in (-1, 1).$$

Donc

$$F_u \simeq (-1, 1).$$

Exemple 5 : fibré tangent

Soit M une variété différentielle.

Le fibré tangent est

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

La projection naturelle est

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad \pi(v) = x \quad \text{si } v \in T_x M.$$

Cas de \mathbb{R}^n

On a

$$T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

La fibre au-dessus de

$$x \in \mathbb{R}^n$$

est

$$T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n.$$

Donc le fibré tangent de \mathbb{R}^n est trivial.

Cas de la sphère

Le fibré tangent

$$TS^2$$

n'est pas trivial.

En effet, il n'existe pas de champ tangent continu non nul partout sur S^2 (théorème du "hairy ball").

Ainsi, même si localement

$$TS^2 \simeq U \times \mathbb{R}^2,$$

globalement le fibré possède une structure non triviale.

Exemple de trivialisations locales explicites

Considérons le cylindre

$$S^1 \times \mathbb{R}.$$

Prenons un ouvert

$$U \subset S^1.$$

Alors

$$\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}.$$

La trivialisat on locale est simplement :

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R},$$

$$\Phi_U(x, t) = (x, t).$$

On vérifie :

$$\text{pr}_1(\Phi_U(x, t)) = \text{pr}_1(x, t) = x = \pi(x, t).$$

Donc

$$\text{pr}_1 \circ \Phi_U = \pi.$$

C'est exactement la condition de trivialité locale.

Définition 2.1.3. Soit

$$\pi : P \rightarrow B$$

un espace fibré.

Une **section** du fibré est une application différentiable

$$s : B \rightarrow P$$

telle que

$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Interprétation géométrique

Pour chaque point

$$x \in B,$$

la section choisit un point

$$s(x) \in P$$

situ e dans la fibre au-dessus de x .

En effet,

$$\pi(s(x)) = x.$$

Donc :

une section consiste   choisir un élément dans chaque fibre de manière différentiable.

On peut voir une section comme une "surface" plongée dans l'espace total P et qui coupe chaque fibre en exactement un point.

Exemple 1 : fibré trivial

Considérons le fibré trivial

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

défini par

$$\pi(x, y, z) = (x, y).$$

Les fibres sont :

$$F_{(x,y)} = \{(x, y, z) ; z \in \mathbb{R}\}.$$

Une section est une application

$$s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

telle que

$$\pi(s(x, y)) = (x, y).$$

Toute section est donc de la forme

$$s(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

où

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction différentiable.

Vérification

On calcule :

$$\begin{aligned} \pi(s(x, y)) &= \pi(x, y, f(x, y)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Donc

$$\pi \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Interprétation

Une section du fibré trivial correspond simplement au graphe d'une fonction.

Par exemple :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

donne la section

$$s(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Géométriquement, cela représente le parabolôïde

$$z = x^2 + y^2.$$

Exemple 2 : cylindre

Considérons le fibré

$$\begin{aligned}\pi : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1, \\ \pi(x, t) &= x.\end{aligned}$$

Une section est une application

$$s : S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

de la forme

$$s(x) = (x, f(x)),$$

où

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction différentiable.

Par exemple,

$$f(\theta) = \sin \theta$$

définit la section

$$s(\theta) = (e^{i\theta}, \sin \theta).$$

Cette section décrit une courbe tracée sur le cylindre.

Exemple 3 : section constante

Dans tout fibré trivial

$$B \times F \rightarrow B,$$

on peut choisir un élément fixe

$$f_0 \in F.$$

Alors

$$s(x) = (x, f_0)$$

est une section.

Par exemple, dans

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

la fonction

$$s(x, y) = (x, y, 0)$$

est une section appelée section nulle.

Exemple 4 : fibré tangent

Considérons le fibré tangent

$$\pi : TM \rightarrow M.$$

Une section

$$s : M \rightarrow TM$$

associe à chaque point

$$x \in M$$

un vecteur tangent

$$s(x) \in T_x M.$$

Donc :

une section du fibré tangent est exactement un champ de vecteurs.

Exemple concret sur \mathbb{R}^2

Le fibré tangent de \mathbb{R}^2 est

$$T\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Une section est donc de la forme

$$s(x, y) = (x, y, P(x, y), Q(x, y)),$$

où

$$(P, Q)$$

sont les composantes d'un champ de vecteurs.

Par exemple,

$$X(x, y) = (-y, x)$$

définit la section

$$s(x, y) = (x, y, -y, x).$$

Ce champ représente une rotation autour de l'origine.

Exemple 5 : absence de section globale

Toutes les fibrations n'admettent pas de section globale.

Considérons le fibré

$$\pi : S^1 \rightarrow S^1,$$

défini par

$$\pi(z) = z^2.$$

Chaque point possède deux antécédents :

$$z \quad \text{et} \quad -z.$$

Une section devrait choisir continûment une racine carrée de chaque point du cercle.

Mais cela est impossible globalement sur tout S^1 .

Donc ce fibré n'admet pas de section globale continue.

Exemple 6 : le ruban de Möbius

Le ruban de Möbius est un fibré en droites sur S^1 .

Bien qu'il soit non trivial, il possède des sections globales.

Par exemple, la section nulle :

$$s(x) = 0$$

dans chaque fibre.

Mais il n'existe aucune section continue partout non nulle.

Ceci reflète la torsion topologique du ruban de Möbius.

Calcul local d'une section

Supposons qu'un fibré soit localement trivial :

$$\pi^{-1}(U) \simeq U \times F.$$

Dans cette trivialisatation locale, une section s'écrit :

$$s(x) = (x, \sigma(x)),$$

où

$$\sigma : U \rightarrow F$$

est une application différentiable.

Ainsi :

localement, une section est simplement une fonction à valeurs dans la fibre type.

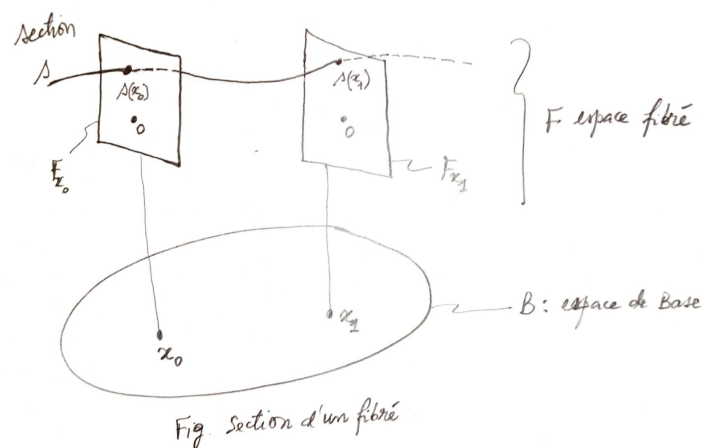
Interprétation physique

Les sections apparaissent naturellement en physique.

- En mécanique : une section du fibré tangent représente un champ de vitesses.
- En électromagnétisme : un champ électrique est une section d'un fibré vectoriel.
- En relativité : un champ tensoriel est une section d'un fibré tensoriel.
- En théorie de jauge : les champs de matière sont des sections de fibrés associés.

Ainsi, les sections permettent de décrire des objets géométriques ou physiques variant d'un point à l'autre de l'espace.

La figure ci-dessous visualise l'image d'une section d'un fibré.



Une section est perçue comme si au dessus de chaque point x on choisit un point dans la fibre F_x . Donc, cela correspond à une coupe de toutes les fibres dans l'espace total quand x parcourt l'espace de base.

2.2 Trivialisations locales

Dire que (P, M, π) est localement trivial consiste à affirmer que localement, l'espace total P ressemble à un produit

$$\pi^{-1}(U) \simeq U \times F.$$

En d'autres termes, lorsque U est un ouvert de M , dire que $\pi^{-1}(U)$ est difféomorphe à $U \times F$ revient à dire qu'il existe un difféomorphisme ψ_U entre les deux ensembles $\pi^{-1}(U)$ et $U \times F$, i.e;

$$z \in \pi^{-1}(U) \subset P \rightarrow \psi_U(z) = (x, g) \in U \times F, \quad x = \pi(z).$$

L'application ψ_U prend le nom de trivialisat on locale relative   l'ouvert U et on note parfois $\{(U, \psi_U)\}$.

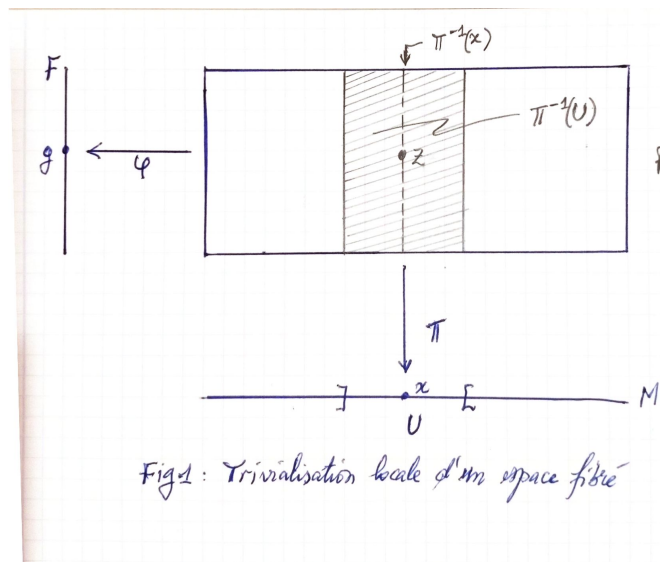
Bien entendu, une telle trivialisat on est loin d'être unique car si ϕ est un difféomorphisme quelconque de la fibre type F , la compos e $(\text{Id}_M \circ \phi) \circ \psi_U$ fournit une autre trivialisat on.

La trivialisat on $\psi_U(z) = (x, g)$, $x = \pi(z)$ est parfaitement caract ris e par l'application

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow F : z \mapsto \varphi(z) = g.$$

En d'autres termes, le point z de P est caract ris e par le point $x = \pi(z)$ sur M et le point $\varphi(z) = g$ sur F .

Seul le point x est canoniquement défini par la filtration, l'élément g de F , au contraire résulte du choix d'une trivialisat on.



Définition 2.2.1. Soit une variété différentielle de dimension n .

On appelle espace fibré vectoriel de rang k sur M un espace fibré (E, M, π) dont la fibre type F est un espace vectoriel V de dimension k , avec les trivialisations locales

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$$

telles que toute restriction

$$\psi_U|_x : E_x = \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times V$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On suppose que V soit \mathbb{R}^k .

2.3 Fonctions de transition sur un espace fibré

Soit

$$(E, M, \pi)$$

un fibré de fibre type F muni d'un atlas de trivialisations locales

$$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I},$$

où

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$$

est un difféomorphisme satisfaisant

$$\text{pr}_1 \circ \psi_\alpha = \pi.$$

Autrement dit, localement le fibré ressemble au produit

$$U_\alpha \times F.$$

Si deux ouverts de trivialisations se recouvrent :

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset,$$

alors on peut comparer les deux trivialisations grâce à l'application

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F.$$

Comme cette application préserve la projection sur la base, elle est de la forme

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, z) = (x, g_{\alpha\beta}(x)(z)),$$

où

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$$

est appelée **fonction de transition**.

Les fonctions de transition vérifient les propriétés suivantes.

- **Identité**

$$g_{\alpha\alpha}(x) = \text{Id}_F.$$

- **Symétrie**

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}.$$

- **Condition de cocycle**

$$g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x) \circ g_{\gamma\alpha}(x) = \text{Id}_F.$$

Ces relations assurent que les trivialisations locales se recollent de manière cohérente.

Remarque 2.3.1. Localement, tous les fibrés de fibre type F ressemblent au produit trivial

$$U \times F.$$

La différence entre deux fibrés apparaît globalement : les fibres locales sont recollées différemment.

Les fonctions de transition décrivent exactement ce recollement.

Ainsi, connaître :

- la base M ,
- la fibre type F ,
- les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$,

permet de reconstruire entièrement le fibré.

Interprétation géométrique

Supposons que l'on dispose de deux cartes locales du fibré :

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F,$$

et

$$\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times F.$$

Pour un même point

$$u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

les deux trivialisations donnent deux descriptions différentes :

$$\psi_\alpha(u) = (x, z_\alpha),$$

et

$$\psi_\beta(u) = (x, z_\beta).$$

Le point de base x est le même, mais les coordonnées dans la fibre changent.

La fonction de transition décrit précisément ce changement :

$$z_\alpha = g_{\alpha\beta}(x)(z_\beta).$$

Ainsi, les fonctions de transition jouent le même rôle que les changements de coordonnées en géométrie différentielle.

Exemple 1 : fibré trivial

Considérons le fibré trivial

$$E = M \times F.$$

Prenons deux ouverts $U_\alpha, U_\beta \subset M$ et les trivialisations naturelles

$$\psi_\alpha(x, z) = (x, z),$$

$$\psi_\beta(x, z) = (x, z).$$

Alors

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, z) = (x, z).$$

Donc

$$g_{\alpha\beta}(x) = \text{Id}_F.$$

Toutes les fonctions de transition sont triviales.

Cela signifie qu'il n'y a aucun "twist" dans le fibré.

Exemple 2 : le ruban de Möbius

Le ruban de Möbius est un exemple fondamental de fibré non trivial.

La base est le cercle

$$S^1.$$

La fibre est

$$F = \mathbb{R}.$$

Recouvrons le cercle par deux ouverts :

$$U_1 = S^1 \setminus \{N\}, \quad U_2 = S^1 \setminus \{S\}.$$

Sur chaque ouvert, le fibré est trivial :

$$\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{R}.$$

Mais sur l'intersection

$$U_1 \cap U_2,$$

la fonction de transition est

$$g_{12}(x)(t) = -t.$$

Ainsi,

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}(x, t) = (x, -t).$$

Interprétation :

Quand on passe d'une trivialisations à l'autre, la coordonnée dans la fibre change de signe.

C'est cette inversion qui produit la torsion du ruban de Möbius.

Calcul des propriétés de cocycle

(i) Symétrie

On a

$$g_{12}(t) = -t.$$

Donc

$$g_{21}(t) = -t.$$

Or

$$(-1)^{-1} = -1,$$

donc

$$g_{21} = g_{12}^{-1}.$$

(ii) Condition de cocycle

Comme il n'y a que deux ouverts, la condition devient

$$g_{12} \circ g_{21} = \text{Id}.$$

En effet,

$$g_{12}(g_{21}(t)) = g_{12}(-t) = t.$$

Donc la condition est satisfaite.

Le fibré obtenu n'est pas trivial car les fibres sont recollées avec une inversion.

Exemple 3 : fibré tangent du cercle

Considérons le fibré tangent

$$TS^1.$$

Paramétrons le cercle par

$$(\cos \theta, \sin \theta).$$

Prenons deux ouverts :

$$U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\},$$

$$U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}.$$

Sur chaque ouvert, on peut choisir un champ de vecteurs tangent non nul :

$$X(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Tout vecteur tangent s'écrit alors

$$v = aX(\theta),$$

avec

$$a \in \mathbb{R}.$$

Les trivialisations locales sont donc :

$$\psi_i(v) = (x, a).$$

Dans ce cas, les deux champs choisis coïncident sur l'intersection, donc

$$g_{12}(x) = 1.$$

Ainsi le fibré tangent du cercle est trivial :

$$TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}.$$

Exemple 4 : fibré tangent de la sphère S^2

Le fibré tangent de S^2 n'est pas trivial.

Supposons par contradiction qu'il soit trivial :

$$TS^2 \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Alors il existerait deux champs de vecteurs tangents linéairement indépendants partout sur S^2 .

En particulier, il existerait un champ tangent non nul partout.

Mais cela contredit le théorème du "hairy ball" :

il n'existe pas de champ tangent continu non nul partout sur la sphère S^2 .

Donc les fonctions de transition du fibré tangent de S^2 ne peuvent pas être trivialement égales à l'identité.

Elles contiennent une information topologique non triviale.

2.4 Fibré en droites et exemples

Nous présentons un exemple de fibré très utilisé en physique mathématique notamment en quantification géométrique.

Définition 2.4.1. Un fibré en droites ou line bundle est une famille de droites vectorielles attachée à chaque point d'une variété (ou d'un espace).

Plus formellement, un fibré en droites L sur une variété M est un fibré vectoriel de rang 1, i.e, à chaque point $p \in M$, la fibre L_p est un espace vectoriel de dimension 1 (une droite) sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Autrement dit, au lieu d'avoir des vecteurs multidimensionnels, chaque point de M porte juste une droite.

Le fibré trivial sur une variété M est le plus simple $L = M \times \mathbb{R}$. C'est à dire

- la fibre au point p est juste $p \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$
- c'est trivial car la fibre est la même pour chaque point.

Si $M = \mathbb{R}^2$, alors le fibré trivial est $L = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Une section de ce fibré (un choix d'un vecteur dans chaque fibre) est une fonction $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Par exemple,

1. $s(x, y) = x + y$ est une section du fibré $L = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
2. Sur $L = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{R} , définir une section $s(x) = (x, ?)$. On doit comprendre ici que
 - chaque fibre au point x est \mathbb{R}
 - si on choisit $s(x) = (x, x^2)$ alors on a une section $s : x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.
 - Vérification: chaque point x est associé à un vecteur dans la fibre au dessus de x .

2.5 Fibré tangent et fibré cotangent

Dans cette section, nous décrivons les premiers exemples d'espaces fibrés vectoriels qui sont l'espace fibré tangent et l'espace fibré cotangent sur une variété différentielle.

2.5.1 Espace fibré tangent

Après avoir donné la définition, nous commençons par montrer qu'un fibré tangent est muni d'une structure de variété différentielle.

Définition 2.5.1. Le fibré tangent, noté TM , sur une variété différentielle M est l'ensemble de tous les espaces tangents

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

En d'autres termes, on écrit que

$$TM = \{(x, V_x) : x \in M, V_x \in T_x M\} = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x M).$$

On le note également (TM, M, π_M) .

Pour un fibré tangent TM , on a les remarques suivantes:

1. L'espace M est appelé base du fibré tangent
2. la projection canonique du fibré tangent est l'application surjective

$$\pi : TM \rightarrow M : (x, V_x) \mapsto \pi(x, V_x) = x$$

3. la fibre au dessus de x est $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_x M$
4. la section de classe C^∞ du fibré tangent TM est l'application

$$s : M \rightarrow TM$$

telle que $\pi \circ s = id_M$.

On peut démontrer la proposition suivante:

Proposition 2.5.2. Le fibré tangent est une variété différentielle de dimension $2n$ avec les coordonnées locales $(x^i, V^i)_{i=1 \dots n}$.

Démonstration 2.5.3. La preuve se fait en étapes:

Nous définissons d'abord les cartes sur TM . Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}\}$ un ensemble de cartes locales définissant un atlas de M , i.e, φ_α un homéomorphisme

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \varphi_\alpha(x) = (x^1, \dots, x^n).$$

Donc les ouverts de M sont homéomorphes aux ouverts de \mathbb{R}^n .

De même on définit pour $x \in M$ un second difféomorphisme

$$\varphi'_\alpha : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n : V_x \mapsto \varphi'_\alpha(V_x) = (V^1, \dots, V^n),$$

où les V^i sont les composantes de V_x relative à la base de $T_x M$ associée aux coordonnées locales (x^i) . Les domaines de cartes U_α recouvrant M correspondent aux domaines de cartes qui recouvrent TM suivants:

$$TU_\alpha = \{(x, V_x) : x \in U_\alpha, V_x \in T_x M\}.$$

Ces dernières cartes sont $\pi^{-1}(U_\alpha)$ qui recouvrent TM car les ouverts U_α recouvrent M et $\pi : TM \rightarrow M$ est surjective. Finalement, nous définissons naturellement l'homéomorphisme

$$\psi_\alpha : TU_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

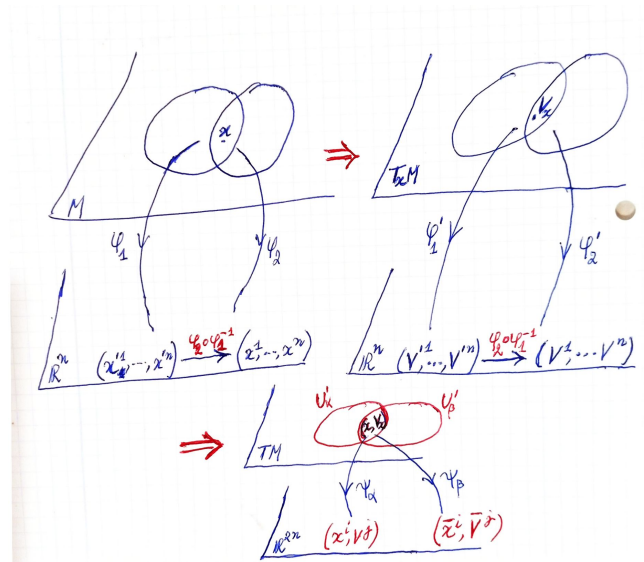
à partir du produit d'homéomorphismes φ_α et φ'_α comme suit:

$$\psi_\alpha : TU_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x, V_x) \mapsto (\varphi_\alpha(x), \varphi'_\alpha(V_x))$$

avec $(\varphi_\alpha(x), \varphi'_\alpha(V_x)) = (x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^n)$.

Donc les coordonnées locales d'un point $(x, V_x) \in TM$ dans la carte (TU_α, ψ_α) sont les $2n$ réels $x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^n$.

Ensuite, nous examinons la structure de variété différentielle sur TM . Nous utilisons les schémas suivants:



M étant une variété différentielle, l'application

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est différentiable. Ensuite, les formules

$$V^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right)_x V'^j, \quad V'^j = \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right)_x V^i$$

impliquent que l'application

$$(\varphi'_2 \circ \varphi'^{-1}_1)^{-1} = \varphi'_1 \circ \varphi'^{-1}_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est différentiable. Finalement, soient U_α et U_β deux cartes dans M d'intersection non vide. On a deux cartes correspondantes $U'_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $U'_\beta = \pi^{-1}(U_\beta)$ dans TM . On considère les homéomorphismes correspondants

$$\psi_\alpha : U'_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x, V_x) \mapsto (x^i, V^j) = (x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^n)$$

et

$$\psi_\beta : U'_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x, V_x) \mapsto (\bar{x}^i, \bar{V}^j) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{V}^1, \dots, \bar{V}^n)$$

de TM dans \mathbb{R}^{2n} . L'application

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha (\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) \rightarrow \psi_\beta (\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

telle que

$$(x^i, V^j) \mapsto \left(\bar{x}^i, \bar{V}^j = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \right) V^k \right)$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ .

Maintenant, nous montrons que le fibré tangent est un espace de Hausdorff (i.e, séparé).

En effet, considérons deux vecteurs tangents, l'un en x et un autre en y . Deux cas s'observent:

- (i) Les deux points x et y sont distincts. Les ouverts U_x et U_y vus comme domaines de cartes dans M tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Ces voisinages sont envoyés dans TM par π^{-1} et on a

$$\pi^{-1}(U_x) \cap \pi^{-1}(U_y) = \emptyset.$$

- (ii) Les deux points sont non distincts. Soient X_x et Y_x deux vecteurs tangents de T_xM . Soit (U, φ) une carte telle que $x \in U$. Les deux n-uplets de \mathbb{R}^{2n} $x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n$ pour (x, X_x) et $x^1, \dots, x^n, Y^1, \dots, Y^n$ pour (x, Y_x) sont différents puisque $(X^1, \dots, X^n) \neq (Y^1, \dots, Y^n)$.

Soient $\varphi(U)$ un ouvert de \mathbb{R}^n contenant (x^1, \dots, x^n) , β_x un ouvert de \mathbb{R}^n contenant (X^1, \dots, X^n) , β_y un ouvert de \mathbb{R}^n contenant (Y^1, \dots, Y^n) et

$$\psi : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x, X_x) \mapsto (x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n).$$

Dans TU , on a l'ensemble vide:

$$\psi^{-1}(\varphi(U) \times \beta_x) \cap \psi^{-1}(\varphi(U) \times \beta_y) = \emptyset.$$

Enfin, nous montrons que le fibré tangent est à base dénombrable.

En effet, en considérant ψ^{-1} pour $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a

$$\psi^{-1}(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) = (x, X_x = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x))$$

avec $(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(x))$ la base de T_xM . Le fibré tangent est donc de dimension $2n$.

Le résultat suivant peut être démontré.

Proposition 2.5.4. Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme entre les variétés différentielles M et N , alors $df : TM \rightarrow TN$ est une bijection entre les fibrés tangents TM et TN et $(df)^{-1} = d(f^{-1})$. On note également $f_* := df$.

Démonstration 2.5.5. Puisque f est un difféomorphisme, les compositions $f^{-1} \circ f = id_M$ et $f \circ f^{-1} = id_N$ nous conduisent à

$$d(f^{-1}) \circ df = d(f^{-1} \circ f) = d(id_M), \quad i.e., d(f^{-1}) \circ df = id_{TM}.$$

De la même façon, on obtient que $df \circ d(f^{-1}) = id_{TN}$, or la formule générale dit que l'application $\phi : A \rightarrow B$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $\psi : B \rightarrow A$ telle que $\phi \circ \psi = id_B$ et $\psi \circ \phi = id_A$. Donc, nous pouvons conclure que df est une bijection de TM dans TN . Ainsi l'application df est évidemment l'inverse de $d(f^{-1})$, c'est-à-dire que $(df)^{-1} = d(f^{-1})$.

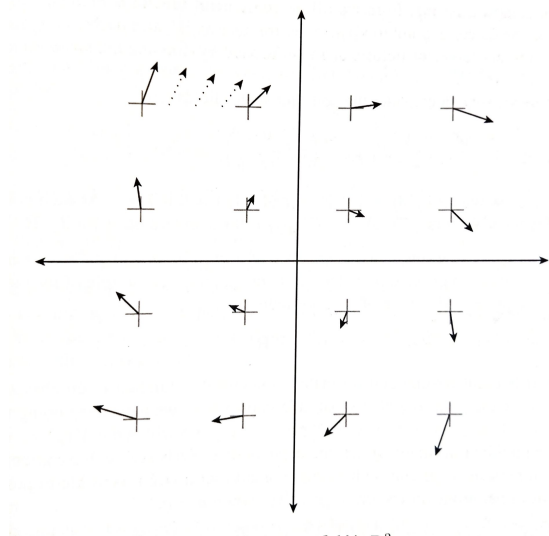
Nous allons donner la définition d'un champ de vecteurs.

Définition 2.5.6. Un champ de vecteurs sur M (ou section du fibré TM) est un choix de vecteurs tangents en chaque point:

$$V : M \rightarrow TM : x \mapsto V(x) = V_x \in T_x M.$$

On note $C^\infty(M, TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur M (ensemble des sections C^∞ du fibré TM).

Nous donnons un exemple d'un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^2 à l'aide du schéma suivant.



On peut donner quelques types de champs de vecteurs [3] tels que

1. les champs de vecteurs constants, c'est-à-dire, des champs de vecteurs du type

$$X = \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

avec k_i des constantes,

2. les champs de vecteurs rotationnels;
3. les champs de vecteurs radiales,
4. etc ...

On a défini un vecteur tangent comme étant un vecteur vitesse le long d'une trajectoire donnée. Inversement, on va maintenant considérer un champ de vecteurs donné et voir qu'il définit un ensemble de trajectoires que l'on appelle lignes de champs ou flot.

Définition 2.5.7. Soit V un champ de vecteurs sur M . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot généré par ce champ de vecteurs est l'application

$$\phi^t : M \rightarrow M : x \mapsto \phi^t(x)$$

définie par la condition $\frac{d\phi^t(x)}{dt} = V(\phi^t(x))$. Autrement dit la famille $(\phi^t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ est la trajectoire passant par x telle que V est le champ de vitesses.

Si le champ de vecteurs est donné, alors (d'après l'équation (1.3.1)), dans un système de coordonnées la trajectoire $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires du type

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = V^i(x(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

où $V^i(x)$ sont les composantes du champ de vecteurs au point x .

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution existe et est unique à condition que $V^i(x)$ soit Lipschitz (C^1 est donc suffisant). Pour trouver la trajectoire, il faut intégrer ce système d'équations différentielles ordinaires d'ordre un.

On a la propriété de groupe suivante. Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$,

$$\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{t+s}(x).$$

La notion de champ de vecteurs et de trajectoire ou flot associée est fondamentale en mécanique classique. Par exemple, étant donné un Hamiltonien $H(x, p)$, les équations de Hamilton dans l'espace des phases $(x, p) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = V^x = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = V^p = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

définissent un champ de vecteurs de composantes $V^x = \frac{\partial H}{\partial p}$ et $V^p = -\frac{\partial H}{\partial x}$ et stipulent que la trajectoire classique suit le flot de ce champ de vecteur. Le résultat d'existence et d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz traduit le **déterminisme de la mécanique classique**.

Bref, si on a un champ de vecteurs, on peut retrouver toutes les trajectoires en intégrant ce champ de vecteurs.

Exemples 2.5.8. Nous donnons quelques exemples de champ de vecteurs et leur flot.

1. Sur \mathbb{R} , avec la coordonnée $x \in \mathbb{R}$:

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow \phi^t : x(t) = x(0) + t.$$

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x \Leftrightarrow \phi^t : x(t) = e^t x(0).$$

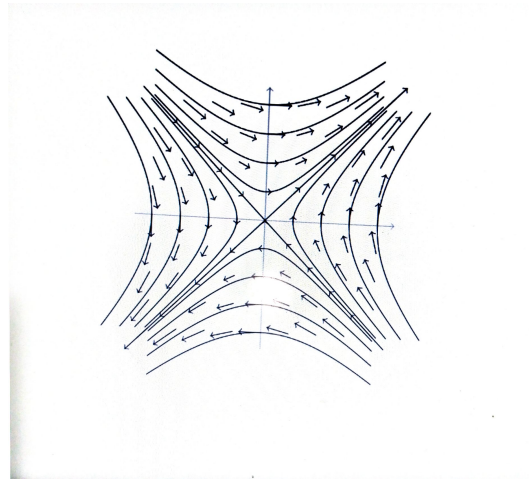
2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, avec les coordonnées polaires r, θ :

$$V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = r(0) \\ \theta(t) = \theta(0) + \frac{t}{r} \end{cases}$$

c'est une rotation à vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}$. Les trajectoires sont des cercles.

Exercice 2.5.9. Sur \mathbb{R}^2 , en coordonnées cartésiennes (x, y) , tracer le champ de vecteurs $V = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ et déterminer le flot ϕ^t associée et la forme des trajectoires.

Ici, on pourra voir que les trajectoires sont les hyperboles, c'est à dire, les champs de vecteurs suivent les hyperboles comme suit

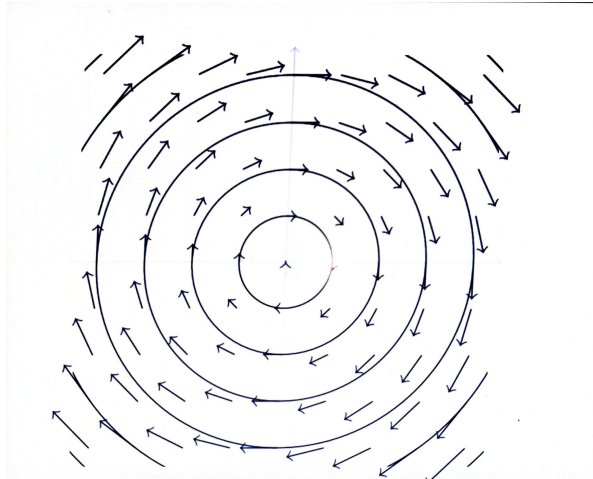


Exercice 2.5.10. Sur \mathbb{R}^2 , en coordonnées cartésiennes (x, y) , tracer le champ de vecteurs

$$V = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

et déterminer le flot ϕ^t associée et la forme des trajectoires.

On pourra également voir que les trajectoires seront des cercles, les champs de vecteurs suivent les cercles.



Exercice 2.5.11. Écrire en coordonnées cylindriques le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 définie par

$$X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

En effet, le changement des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes est donnée par $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$. La matrice jacobienne de cette transformation est

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs X est écrit en coordonnées cylindriques comme suit

$$X = f_1(\rho, \theta, z) \frac{\partial}{\partial \rho} + f_2(\rho, \theta, z) \frac{\partial}{\partial \theta} + f_3(\rho, \theta, z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc, on a un système d'équations qu'on résous pour trouver f_1, f_2, f_3 et on obtient

$$X = (2 \cos \theta - \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2 \sin \theta + \cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + 3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Exercice 2.5.12. Soient les champs de vecteurs suivants

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2xz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2yz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Calculer les flots locaux de X et Y .

En effet, on a

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \end{cases}$$

et donc

$$\frac{z'}{z} = \frac{2(x_0 + t)}{1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2} \iff \log z = \log A(1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2) \iff z = A(1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2).$$

Pour $t = 0, z_0 = A(1 + x_0^2 + y_0^2)$, donc

$$z = z_0 \frac{1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2}{1 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Par conséquent, le flot local de X est

$$\phi^t(x, y, z) = \left(x + t, y, z \frac{1 + (x + t)^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

On procède de la même manière pour trouver le flot suivant de Y (**Faire cela au DAD**)

$$\phi^s(x, y, z) = \left(x, y + s, z \frac{1 + x^2 + (y + s)^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Dans les exemples ci-dessus, on trouve facilement les trajectoires (le flot) à partir de l'expression du champ de vecteur. Le théorème de Poincaré Bendixon montre que plus généralement en dimension deux, il est possible d'intégrer un champ de vecteurs pour trouver les trajectoires, qui ont un comportement "simple". Par contre à partir de la dimension trois, il est en général impossible de trouver les trajectoires explicitement, bien que elles soient "déterminées". Une expression simple de champ de vecteurs peut générer des trajectoires d'apparence "très complexes et aléatoires". Ce problème est à la base de la **théorie du chaos déterministe**. La raison est un phénomène de "sensibilité aux conditions initiales".

On donne quelques exercices sur le calcul du flot (ou courbes intégrales) de quelques champs de vecteurs.

Exercices 2.5.13. Pour chaque champs de vecteurs suivants, trouver leurs courbes intégrales (flots) et dites s'ils sont ou non complets.

1. $X = \partial_x + e^x \partial_z \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$.
2. $X = e^x \partial_x \in \Gamma(\mathbb{R})$
3. $X = y \partial_x - x \partial_y \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$

2.5.2 Caractérisation du crochet de Lie de deux champs de vecteurs

On sait que tout champ de vecteurs V détermine une courbe intégrale passant par chaque point de M tel que V est tangent à la courbe partout. Il existe une caractérisation plus géométrique du crochet de Lie de deux champs de vecteurs vu comme commutateur infinitésimal de deux groupes à un paramètre $\exp(tV)$ et $\exp(tW)$.

Soient ϕ_t et ψ_t les flots engendrés par les champs de vecteurs X et Y respectivement sur une variété M . Pour chaque point $x \in M$, la courbe $C : I \rightarrow M$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ et contenant 0) définie par

$$C(t) = C_t(x) = (\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \phi_t)(x)$$

définit une courbe lisse pour tout $t > 0$ suffisamment petit. Le crochet de Lie $[X, Y]|_x$ est un vecteur tangent à cette courbe au point origine $C_0(x) = x$, i.e,

$$[X, Y]|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} C_t(x).$$

L'expression $(\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \phi_t)(x)$ s'appelle **commutateur**.

Exemples 2.5.14. Sur \mathbb{R}^2 , on considère $X = x \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = y \frac{\partial}{\partial y}$. On peut vérifier (**Faire le DAD**) que les flots ϕ_t pour X et ψ_t pour Y sont donnés respectivement par

$$\phi_t(x, y) = (xe^t, y) \quad \text{et} \quad \psi_t(x, y) = (x, ye^t).$$

Tous ces flots sont définis pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, on a

$$\begin{aligned} C_t(x, y) &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(\psi_t(\phi_t(x, y)))) \\ &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(\psi_t(xe^t, y))) \\ &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(xe^t, ye^t)) \\ &= \psi_{-t}(xe^t \cdot e^{-t}, ye^t) \\ &= (x, (ye^t) \cdot e^{-t}) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

(voir la fig.1 correspondante à cette courbe).

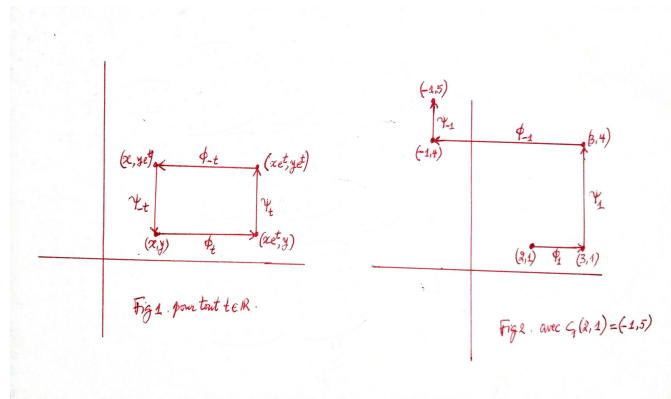
2. Sur \mathbb{R}^2 , on considère $X = y \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ avec leurs flots respectifs (**Faire le DAD**)

$$\phi_t(x, y) = (x + ty, y) \quad \text{et} \quad \psi_t(x, y) = (x, y + tx).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} C_t(x, y) &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(\psi_t(\phi_t(x, y)))) \\ &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(\psi_t(x + ty, y))) \\ &= \psi_{-t}(\phi_{-t}(x + ty, y + t(x + ty))) \\ &= \psi_{-t}(x + ty - t(y + tx + t^2y), y + tx + t^2y) \\ &= (x - t^2x - t^3y, y + t^2y + t^3x + t^4y) \end{aligned}$$

Par exemple, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $C_1(x, y) = (-y, 3y + x)$ (voir la fig.2 correspondante à cette courbe).



Théorème 2.5.15. Soient X et Y des champs de vecteurs sur une variété M avec leurs flots respectifs ϕ_t et ψ_t . Donc on a

$$C_t(p) = (\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \phi_t)(p)$$

pour tout p si et seulement si $L_X Y = 0$.

Corollaire 2.5.16. On a $L_X Y = 0$ si et seulement si pour tout t pour lequel les flots correspondant sont donnés, $\psi_t \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_t$.

Démonstration 2.5.17. Confère la référence [3] à la page 177. Il suffit de constater que $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ (de même pour ψ_{-t}) et de voir que pour C_t , on a

$$(\psi_t)^{-1} \circ (\phi_t)^{-1} \circ \psi_t \circ \phi_t = \text{Id.}$$

Le résultat s'en suit en composant à gauche avec $\phi_t \circ \psi_t$.

Nous donnons maintenant un exemple de fonctions de transition sur le fibré tangent.

Soit $x = (x^1, \dots, x^n)$ des coordonnées locales sur un ouvert U et $y = (y^1, \dots, y^n)$ des coordonnées locales sur un ouvert V d'une variété différentielle M . Nous voulons montrer que les fonctions de transition sur $\pi^{-1}(U \cap V)$ sont lisses (i.e; C^∞) et les topologies induites sur $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$.

Soit (x, a) les coordonnées locales sur $(\pi^{-1}(U))$ et (y, b) les coordonnées locales sur $\pi^{-1}(V)$. Pensons que y est une fonction de x sur $U \cap V$, i.e; $y = y(x)$. On écrit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right).$$

En termes des coordonnées de y , on écrit que

$$\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^n a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Donc, on comprend que $b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. Alors écrire $q \in TM$ correspond à (x, a) ou $(y, \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x} a}_{=b})$, où a est vu comme une matrice colonne (i.e; $a \in \mathbb{R}^n$). La jacobienne de la

fonction de transition $(x, a) \mapsto (y, \frac{\partial y}{\partial x} a)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & 0 \\ \sum_k \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} a^k & \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

où les 2 éléments de la deuxième ligne s'obtient en différenciant l'expression $b^i = \sum_k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} a^k$. Ainsi nous obtenons une variété différentielle TM et une fonction $TM \rightarrow M$ de classe C^∞ .

Nous venons de considérer les trivialisations locales $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ et $\pi^{-1}(V) \cong V \times \mathbb{R}^n$. On a donc

$$\phi_{UV} : U \cap V \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^n : (x, a) \mapsto \left(y(x), \frac{\partial y}{\partial x}(x)a \right),$$

où le domaine est vu comme un sous-ensemble de $U \times \mathbb{R}^n$ et un sous-ensemble de $V \times \mathbb{R}^n$ et $a = (a^1, \dots, a^n)^T$.

Nous pouvons interpréter cela en considérant que ϕ_{UV} nous fait penser à l'application

$$g_{12} : U \cap V \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) : x \mapsto \frac{\partial y}{\partial x}(x),$$

Ici, on simplifie les notations en écrivant g_{12} à la place de g_{UV} . L'application g_{12} satisfait aux propriétés de cocycles suivantes.

1. Pour une double intersection $U \cap V$, nous avons

$$g_{12}(p) \cdot g_{21}(p) = id.$$

2. Pour une triple intersection $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, nous obtenons

$$g_{13}(p) = g_{23}(p) \cdot g_{12}(p).$$

Autrement dit, si U_1, U_2, U_3 possèdent des coordonnées locales x, y, z , alors on a par la règle de chaîne de dérivation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ces propriétés de cocycle (ou condition de cocycle) est clairement nécessaire si nous voulons construire un fibré vectoriel en rassemblant les espaces $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$. Cela nous garantit que les recollements $\Phi_{\alpha\beta}$ que nous avons décrites à partir de U_α et U_β sont compatibles. D'un autre coté, si nous obtenons la collection $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ pour U_α et U_β , qui satisfait 1) et 2), alors nous construisons le fibré vectoriel en recollant $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}$ à l'aide de cette description.

2.5.3 La différentielle d'une application différentiable

Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application différentiable entre les variétés. La différentielle $d\varphi$ ou φ_* d'une application différentielle φ est définie

$$\varphi_* : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} N : X_x \mapsto \varphi_* X_x.$$

Dans ce qui suit, on va étudier les champs de vecteurs sur $T_x M$ et leurs transformées par l'application $\varphi_* = d\varphi$. On donne des exemples de calcul.

1. On considère les champs de vecteurs

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial y},$$

sur \mathbb{R}^3 et l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 y$. Calculer $f_*(X_{(1,1,0)})$. En effet, on a

$$f_*(X_{(1,1,0)}) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(1,1,0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \frac{d}{dt} \Big|_1,$$

où t est une coordonnée canonique sur \mathbb{R} .

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (u, v)$ une application définie par

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad v = ax + by + cz, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

- (i) Trouver les points où φ n'est pas une submersion.
- (ii) Trouver $\varphi^{-1}(0)$.
- (iii) Trouver les points où φ n'est pas une submersion et leurs image.

En effet,

- (i) on calcule le rang de φ_* qui est

$$\text{rang} \varphi_* = \text{rang} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \end{pmatrix} = 2$$

aux points (x, y, z) dans lesquels le vecteur (x, y, z) n'est pas multiple de (a, b, c) . Par conséquent, φ est une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \langle (a, b, c) \rangle$ où $\langle (a, b, c) \rangle$ décrit la droite engendrée par le vecteur (a, b, c) .

- (ii) Soit $(a, b, c)^\perp$ le plan passant par l'origine orthogonal au vecteur (a, b, c) .
Donc

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad ax + by + cz = 0\} \\ &= S^2 \cap (a, b, c)^\perp. \end{aligned}$$

- (iii) L'application φ n'est pas une submersion aux points de la droite $\langle (a, b, c) \rangle$, dont l'image est

$$\varphi(\langle (a, b, c) \rangle) = \{(\lambda^2 - 1, \lambda)\} \subset \mathbb{R}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = v^2 + 1\}.$$

3. On considère l'application différentiable $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z, t) \mapsto (u, v)$ donnée par

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1, \quad v = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2y - 2z + 5.$$

- (i) Trouver l'ensemble des points de \mathbb{R}^4 où φ n'est pas une submersion et leurs images.
- (ii) Calculer une base de $\ker \varphi_*(0, 1, 2, 0)$.
- (iii) Calculer l'image par φ_* de $(1, 0, 2, 1) \in T_{(1,2,0,1)}\mathbb{R}^4$.

En effet,

(i) Pour que φ ne soit pas une submersion aux points de \mathbb{R}^4 , on a

$$\text{rang}\varphi_* = \text{rang} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2t \\ 2x & 2y - 2 & 2z - 2 & 2t \end{pmatrix} < 2.$$

Ainsi, c'est l'ensemble

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, \quad y = z, \quad t = 0\}.$$

Par conséquent,

$$\varphi(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = 2\lambda^2 - 1, \quad v = 2\lambda^2 - 4\lambda + 5, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) On a $\varphi_* : T_{(0,1,2,0)}\mathbb{R}^4 \rightarrow T_{(4,4)}\mathbb{R}^2$. Tout point $X_p \in T_{(0,1,2,0)}\mathbb{R}^4$ est du type

$$X_p = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p,$$

où $p = (0, 1, 2, 0)$. Puisque $\varphi_*(0, 1, 2, 0) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\varphi_*(0, 1, 2, 0)X \equiv (2\lambda_2 + 4\lambda_3) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(4,4)} + 2\lambda_3 \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(4,4)}.$$

Si $X \in \ker\varphi_{*p}$, on déduit $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc

$$\ker\varphi_{*p} = \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \mu \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

et l'ensemble $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right\}$ est une base de $\ker\varphi_{*p}$.

(iii) Puisque $\varphi_*(1, 2, 0, 1) \equiv \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, on a

$$\varphi_{*(1,2,0,1)}(1, 0, 2, 1) = 4 \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(5,7)}.$$

2.5.4 Fibré cotangent

Le fibré cotangent joue un rôle important dans différentes applications. En mécanique, le fibré cotangent joue le rôle d'espace de phases des systèmes conservatifs.

Soit $\bigcup_{x \in M} T_x^*M$ l'union de tous les espaces vectoriels cotangents de M en tout point x de M , c'est-à-dire, l'ensemble

$$\bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \omega_x) : x \in M, \omega_x \in T_x^*M\},$$

qu'on note également

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x^*M).$$

Définition 2.5.18. On appelle fibré cotangent de M , et on note T^*M , le triplet (T^*M, M, π^*) où

- (i) la variété M est la base du fibré cotangent;
- (ii) l'application $\pi^* : T^*M \rightarrow M : (x, \omega_x) \mapsto \pi^*(x, \omega_x) = x$ est la projection canonique du fibré cotangent. C'est une bijection surjective de classe C^∞ ;
- (iii) la fibre au dessus de x est donnée par

$$(\pi^*)^{-1}(x) = \{x\} \times T_x^*M;$$

- (iv) une section de classe C^∞ du fibré cotangent est une application $s : M \rightarrow T^*M$ telle que $\pi^* \circ s = id_M$.
- (v) les trivialisations locales de T^*M sont définies pour $U \in M$, par

$$\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n : \omega_x = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i \mapsto (x^1, \dots, x^n, \omega_1, \dots, \omega_n).$$

Ainsi, le fibré cotangent est localement trivial.

On rappelle qu'en coordonnées locales (x^i) sur M , pour une base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ de T_xM , on associe sa base duale $\{dx^i\}$ de T_x^*M telle que

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_j^i; \text{ avec } \delta_j^i = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_j^i = 0 \text{ sinon.}$$

On note souvent

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta_j^i.$$

Exemple 2.5.19. Le fibré cotangent de l'espace des configurations $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ d'une particule se déplaçant sous l'effet d'une force Keplérienne est

$$T^*M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3.$$

On a la proposition suivante,

Proposition 2.5.20. Le fibré cotangent T^*M est une variété différentielle de dimension $2n$.

Démonstration 2.5.21. Nous procédons de la même manière que dans le cas du fibré tangent. (Faire cela en exercice)

Définition 2.5.22. Un champ de vecteurs cotangents ou 1-forme différentielle sur M est une section $\xi \in C^\infty(M, T^*M)$ de ce fibré, c'est-à-dire, le choix de $\xi(x) \in T_x^*M$ en tous les points $x \in M$ et C^∞ par rapport à $x \in M$.

Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction alors $df \in C^\infty(M, T^*M)$ est une 1-forme.

Exemple 2.5.23. En thermodynamique, on considère l'espace \mathbb{R}^2 avec les variables (T, P) de température et pression. Pour un système donnée (par exemple un gaz dans une enceinte), il y a les fonctions entropie $S(T, P)$, énergie $U(T, P)$ donnant les différentielles dS, dU , et la 1-forme chaleur notée $Q = TdS$ qui n'est pas exacte et la 1-forme travail notée δW qui n'est pas exacte, donnée par la relation $dU = \delta Q + \delta W$.

2.6 Fibré vectoriel sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$

Nous présentons ici un exemple plus pratique. Rappelons la définition suivante.

Définition 2.6.1. On appelle espace projectif $\mathbb{R}P^n$ de dimension n , l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} .

En d'autres termes, il peut être défini de manière équivalente comme le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ pour la relation d'équivalence

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_0 : x = \lambda x'.$$

On note la classe d'équivalence d'un point (x_0, \dots, x_n) ou encore la droite dirigée par le vecteur (x_0, x_1, \dots, x_n) par

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n].$$

Nous pouvons alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.6.2. Soit l une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 . Si on note l^\perp le plan orthogonal à l , alors les plans $l \mapsto l^\perp$ constituent un fibré vectoriel sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ de dimension deux. Autrement dit, l'ensemble

$$E := \bigcup_{l \in \mathbb{R}P^2} l^\perp$$

est muni d'une structure de fibré vectoriel.

Démonstration 2.6.3. Dans la carte affine $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_1^{-1}(x, y) = [1 : x : y]$, le vecteur $(1, x, y)$ est un vecteur directeur de la droite $l = \varphi_1^{-1}(x, y)$. Soit $(X_1, X_2, X_3) \in l^\perp$. Par conséquent, l'équation de l^\perp est donnée par

$$(1, x, y) \cdot (X_1, X_2, X_3)^t = 0 \Leftrightarrow X_1 + xX_2 + yX_3 = 0.$$

Pour avoir une base du plan orthogonal l^\perp , il suffit de résoudre ce système linéaire. On trouve que les vecteurs $e_1(l) = (-x, 1, 0)$ et $e_2(l) = (-y, 0, 1)$ sont les solutions indépendantes. Cela fournit une carte de trivialisations

$$\Phi_1 : E|_{U_1} \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^2$$

définie par

$$(l, se_1(l) + te_2(l)) \mapsto (l, s, t).$$

Dans la carte affine,

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2^{-1}(x', y') = [x' : 1 : y']$$

le même procédé fournit la base $e'_1(l) = (1, -x', 0)$ et $e'_2(l) = (0, -y', 1)$. D'où la carte de trivialisations $\Phi_2 : E|_{U_2} \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^2$ donnée par

$$(l, se'_1(l) + te'_2(l)) \mapsto (l, s, t).$$

Sur $U_1 \cap U_2$ (où $x \neq 0$ et $x' \neq 0$), le même point $l = [1 : x : y] = [1 : \frac{1}{x'} : \frac{y'}{x'}]$ est représenté par les coordonnées

$$x' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y}{x}$$

dans la carte φ_2 . Comme $e'_1(l) = (1, -\frac{1}{x}, 0)$ et $e'_2(l) = (0, -\frac{y}{x}, 1)$, on constate que

$$\begin{aligned} e_1(l) &= (-x, 1, 0) \\ &= -x \underbrace{\left(1, -\frac{1}{x}, 0\right)}_{=e'_1(l)} \\ &= -xe'_1(l) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_2(l) &= (-y, 0, 1) \\ &= -y \underbrace{\left(1, -\frac{1}{x}, 0\right)}_{=e'_1(l)} + \underbrace{\left(0, -\frac{y}{x}, 1\right)}_{=e'_2(l)} \\ &= -ye'_1(l) + e'_2(l) \end{aligned}$$

La matrice de passage

$$\begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est C^∞ en (x, y) . Autrement dit, on a

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : U_1 \cap U_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \cap U_2 \times \mathbb{R}^2, (l, s, t) \mapsto (l, -xs - yt, t)$$

où l'image $(l, -xs - yt, t)$ peut s'écrire également comme

$$(l, -xs - yt, t)^t = \begin{pmatrix} l \\ \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

avec une matrice dépendant différentiablement du point. En effet, on a

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} &= \Phi_2((l, se_1(l) + te_2(l))) \text{ sur } E|_{U_1 \cap U_2} \\ &= \Phi_2((l, (-xs - yt)e'_1(l) + te'_2(t))) \\ &= (l, -xs - yt, t) \text{ par définition de } \Phi_2 \end{aligned}$$

La vérification pour les deux autres changements de cartes est similaire (laissée en exercice).

2.7 Métrique et forme symplectique canonique sur le fibre cotangent

Nous allons faire le calcul différentiel sur le fibré cotangent.

2.7.1 Métrique sur une variété différentielle

Sur une variété différentielle, il n'y a pas la notion de distance entre deux points, ni la notion de volume d'un espace. Pour introduire ces notions (et beaucoup d'autres) on utilise une métrique Riemannienne. On dit que l'on rajoute une "structure" sur l'espace.

Définition 2.7.1. Une métrique Riemannienne g sur une variété M est un choix de produit scalaire Euclidien g_x sur chaque espace tangent $T_x M$, $x \in M$ noté

$$\forall V_x, W_x \in T_x M, g_x(V_x, W_x) = \langle V_x, W_x \rangle_{T_x M}$$

$$\|V_x\|_g := \sqrt{g_x(V_x, V_x)} \text{ est la norme de } V_x.$$

On dit alors que (M, g) est une variété Riemannienne et que g est le champ de tenseur métrique.

2.7.2 Écriture de g en coordonnées locales

Dans un système de coordonnées locales $x = (x^1, \dots, x^n)$, on a

$$g_x(V_x, W_x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) V^i W^j$$

avec $(g_{ij}(x))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ composantes de g_x qui forment une matrice inversible et symétrique en tout point $x \in M$ et données par le produit scalaire des vecteurs tangents de base:

$$g_{ij}(x) = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

On a $dx^i(V_x) \otimes dx^j(W_x) := V^i W^j$ et donc

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j.$$

En effet, pour y voir claire, on évalue le tenseur g sur les vecteurs de base $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$ avec i, j quelconques et on utilise le fait que $dx^k(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_{k,i}$:

$$g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(x) dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes dx^l \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g_{ij}(x).$$

Exemple 2.7.2. Sur \mathbb{R}^n avec des coordonnées cartésiennes (x^1, \dots, x^n) , la métrique

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i$$

(cad $g_{ij} = \delta_{i,j}$) s'appelle **la métrique euclidienne**, et (\mathbb{R}^n, g) est l'**espace euclidien** de dimension n .

Exemple 2.7.3. Sur \mathbb{R}^4 avec des coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) , la métrique $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ s'appelle la **métrique de Minkowski**, et (\mathbb{R}^4, g) est l'**espace de Minkowski** qui modélise un "espace-temps plat" en relativité restreinte.

Remarque 2.7.4. On peut alors voir g comme suit. On a $g \in C^\infty(M, S(T^*M \otimes T^*M))$ est une section du fibré des tenseurs symétriques d'ordre 2, (et tel que g_x soit non dégénéré et positif en tout $x \in M$).

Exercices 2.7.5. On peut facilement faire ces exercices.

1. Sur $M = \mathbb{R}^2$, avec les coordonnées cartésiennes (x, y) , la métrique euclidienne s'écrit

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy,$$

c'est à dire que

$$(g_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'en coordonnées polaires $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$, on obtient la métrique

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta,$$

c'est à dire que la matrice des composantes est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

2. Sur $M = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) , la métrique euclidienne s'écrit

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3,$$

c'est à dire

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le même tenseur en coordonnées sphériques s'écrit

$$g = dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi),$$

c'est à dire que la matrice des composantes est

$$(g_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.7.1)$$

Par conséquent, sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de rayon r (fixé), la métrique induite est (car $dr(V) = 0$ pour tout vecteur tangent $V_x \in TS^2$)

$$g_{S^2} = r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

Définition 2.7.6. Une variété est localement euclidienne au point $x \in M$, s'il existe un système de coordonnées (x^i) au voisinage de x tel que

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 + \dots + dx^n \otimes dx^n$$

Remarque 2.7.7. Une question importante de géométrie Riemannienne est de savoir si une variété est localement euclidienne ou pas. Il ne suffit pas d'observer l'écriture de g . Pour répondre à cette question, on utilisera le tenseur de courbure de Riemann R , et on verra que M est localement euclidienne si et seulement $R = 0$ en tout point.

Définition 2.7.8. Sur une variété Riemannienne (M, g) , si $\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t) \in M$ est une courbe paramétrée, alors sa longueur mesurée par g est définie comme suit. Soit $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$. On a

$$l(\gamma) = |\gamma|_g = \int_0^1 \|\gamma'\|_g dt$$

où γ' est le vecteur tangent au point $\gamma(t)$ et

$$\|\gamma'\|_g = \sqrt{g(\gamma', \gamma')} \text{ est sa norme.}$$

Nous pouvons montrer directement cette proposition.

Proposition 2.7.9. La longueur $l(\gamma)$ est indépendante de la paramétrisation (i.e, est indépendante de la vitesse à laquelle la courbe est parcourue).

Démonstration 2.7.10. Considérons une autre paramétrisation ψ telle que $t' = \varphi(t)$ est un changement de paramétrisation et $f \in C^\infty(M)$ une fonction. Notons $V_t = \frac{d\gamma}{dt}$. En utilisant le fait que $V_{t'}(f) := \frac{df(\gamma(t))}{dt'} \Big|_{t'=0}$, $dt' = \varphi' dt$ et $\gamma(t) = \psi(t)$, alors

$$V_{t'}(f) = \frac{df(\psi(t'))}{dt'} \Big|_{t'=0} = \frac{df(\gamma(t))}{\varphi' dt} \Big|_{t=0} = V_t(f) \cdot \frac{1}{\varphi'},$$

donc $V_{t'} = \frac{1}{\varphi'} V_t$ et donc

$$\int_0^1 \sqrt{g(V_{t'}, V_{t'})} dt' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(\varphi')^2} g(V_t, V_t)} \varphi' dt = \int_0^1 \sqrt{g(V_t, V_t)} dt.$$

La métrique g sur M donne la notion de distance infinitésimale sur M .

Définition 2.7.11. Si x, y sont deux points, leur distance mesurée par la métrique g est

$$d_g(x, y) = \inf_{\gamma} \{ |\gamma|_g : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}.$$

La courbe γ qui réalise la borne inférieure est appelée courbe géodésique entre x et y .

On peut définir une application entre $T_x M$ et $T_x^* M$ comme suit:

$$\tilde{g}_x : T_x M \rightarrow T_x^* M : V_x \mapsto \tilde{g}_x(V_x) := g_x(V_x, \cdot)$$

qui est inversible et qui est telle que

$$\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^* M} := \langle \tilde{g}^{-1}(\xi), \tilde{g}^{-1}(\eta) \rangle_{T_x M}$$

est le produit scalaire induit sur $T_x^* M$. Autrement dit, \tilde{g} est une isométrie par définition.

Lemme 1. On a

$$\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^*M} = \sum_{i,j} (g^{-1})^{i,j} \xi_i \eta_j$$

où g^{-1} est la matrice inverse de $g = (g_{ij})_{ij}$.

Démonstration 2.7.12. On a $g_{i,j} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \tilde{g}(\partial_{x^i})(\partial_{x^j})$, donc

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\partial_{x^i}) &= \sum_j g_{i,j} dx^j \\ \partial_{x^j} &= \sum_i (g^{-1})_{j,i} dx^i. \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Posons $G_{k,l} = \langle dx^k, dx^l \rangle$ que l'on cherche car donnant

$$\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^*M} = \sum_{i,j} G_{i,j} \xi_i \eta_j.$$

On a

$$\begin{aligned} g_{i,j} = \langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle &= \langle \tilde{g}(\partial_{x^i}), \tilde{g}(\partial_{x^j}) \rangle \\ &= \sum_{k,l} g_{i,k} g_{j,l} \langle dx^k, dx^l \rangle \\ &= g_{i,k} G_{k,l} g_{l,j} \end{aligned}$$

qui est le produit de matrice $g = gGg$. Donc $G = g^{-1}$, soit $G_{k,l} = (g^{-1})_{k,l}$.

Définition 2.7.13. Si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est une fonction sur M , alors son gradient est

$$(\text{grad}(f))_x := \tilde{g}_x^{-1}(df_x) \in T_x M.$$

Ainsi $\text{grad}(f)$ est un champ de vecteurs sur M .

On donne ici l'expression du gradient sur l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 , en coordonnées cartésiennes et sphériques.

Exemple 2.7.14. En coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) , la matrice des composantes et son inverse sont la matrice identité. On déduit de ((2.7.2)) que $\tilde{g}^{-1}(dx^j) = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Or $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$, ce qui dit que

$$\text{grad}(f) = \tilde{g}^{-1}(df) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \tilde{g}^{-1}(dx^j) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Les composantes de $\text{grad}(f)$ en coordonnées cartésiennes sont donc (la flèche signifie que ce sont des composantes)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right).$$

Même démarche en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . D'après ((2.7.1)), on déduit que

$$\tilde{g}^{-1}(dr) = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \tilde{g}^{-1}(d\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \tilde{g}^{-1}(d\varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

et

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Donc on obtient

$$\text{grad}(f) = \tilde{g}^{-1}(df) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Les composantes dans la base $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi})$ sont donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right).$$

Dans les livres de physique, on utilise la base orthonormée $(u_r, u_\theta, u_\varphi) = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r \partial \theta}, \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \varphi})$ et dans cette base, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right).$$

2.7.3 Forme symplectique canonique sur T^*M

Dans cette Section on montre l'existence d'une forme bilinéaire antisymétrique particulière sur l'espace cotangent, notée Ω et appelée forme symplectique canonique. Par choix pédagogique, on propose ici une définition de Ω en coordonnées et on vérifie ensuite que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées. Il existe une définition géométrique de Ω (sans utiliser les coordonnées) que l'on ne donnera pas ici. Soient (x^1, \dots, x^n) des coordonnées locales sur une variété M . Un vecteur cotangent est noté

$$\xi = \sum_j \xi_j dx^j$$

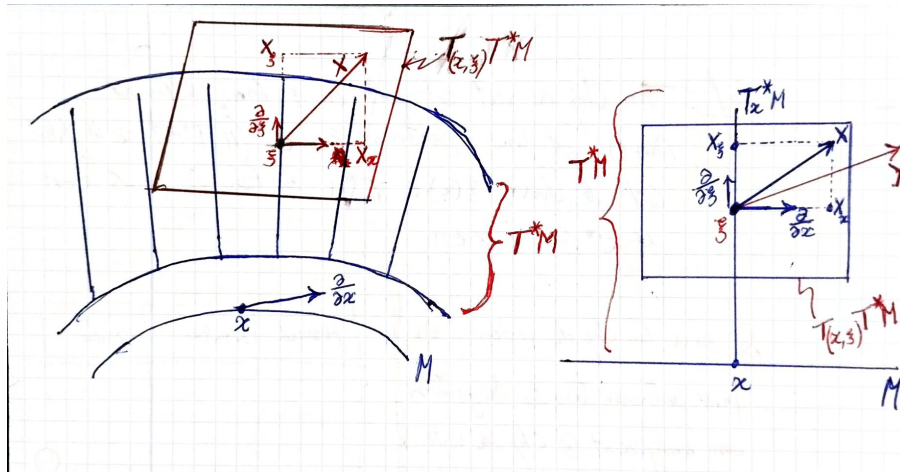
et $(\xi_j)_j$ sont ses coordonnées. Ainsi $(x^j, \xi_j)_{j=1 \rightarrow n}$ forment des coordonnées locales sur l'espace cotangent T^*M .

Soit $(x, \xi) \in T^*M$ un point de l'espace cotangent et $X, Y \in T_{x, \xi}(T^*M)$ deux vecteurs tangents. Leurs coordonnées $(X_{x^j}, X_{\xi_j})_{j=1 \rightarrow n} \in \mathbb{R}^{2n}$ et $(Y_{x^j}, Y_{\xi_j})_{j=1 \rightarrow n} \in \mathbb{R}^{2n}$ sont définies par

$$X = \sum_{j=1}^n \left(X_{x^j} \frac{\partial}{\partial x^j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

et de même pour Y . On rappelle que : $dx^j(X) = X_{x^j}$ etc.

Les schémas suivants représentent la variété M , la variété T^*M comme collection des espaces vectoriels cotangents $(T_x^*M)_{x \in M}$, l'espace tangent $T_{(x, \xi)}T^*M$, les vecteurs tangents $X, Y \in T_{(x, \xi)}T^*M$ ainsi que les coordonnées de X . La deuxième figure est équivalente à la première mais un peu plus schématique.



Définition 2.7.15. On définit la forme bilinéaire Ω sur $T_{(x, \xi)}T^*M$ par

$$\Omega(X, Y) := \sum_{j=1}^n (X_{x^j} Y_{\xi_j} - X_{\xi_j} Y_{x^j})$$

c'est-à-dire

$$\Omega = \sum_{j=1}^n dx^j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx^j := \sum_{j=1}^n dx^j \wedge d\xi_j. \quad (2.7.3)$$

On remarque que Ω est antisymétrique, i.e, $\Omega(Y, X) = -\Omega(X, Y)$ et non dégénérée, c'est à dire que,

$$\tilde{\Omega} : T_{(x,\xi)}T^*M \rightarrow T_{(x,\xi)}^*T^*M; X \mapsto \tilde{\Omega}(X) := \Omega(X, \cdot)$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (2.7.3), $\tilde{\Omega}(\partial_{x^j}) = d\xi_j$, $\tilde{\Omega}(\partial_{\xi_j}) = -dx^j$, donc, dans les bases $(\partial_{x^j}, \partial_{\xi_j}) \rightarrow (dx^j, d\xi_j)$ les composantes de $\tilde{\Omega}$ sont données par la matrice

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$\tilde{\Omega}(\partial_{x^j}) = d\xi_j = 0dx^j + 1d\xi_j$$

et

$$\tilde{\Omega}(\partial_{\xi_j}) = -dx^j = -1dx^j + 0d\xi_j$$

et on prend les composantes en colonnes. Cette matrice est inversible, car

$$\tilde{\Omega}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.7.16. La forme bilinéaire Ω est indépendante du choix de coordonnées. On appelle Ω la **forme symplectique canonique sur T^*M** .

Démonstration 2.7.17. Si $(x^i)_i \rightarrow (x'^k)_k$ est un changement de coordonnées locales sur M , soit $\Omega' = \sum_{j=1}^n dx'^j \wedge d\xi'_j$.

On veut montrer que $\Omega' = \Omega$. On a

$$dx'^j = \sum_k \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k.$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_k \xi_k dx^k = \sum_j \xi'_j dx'^j \\ &= \sum_k \sum_j \xi'_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k \end{aligned}$$

Donc on obtient que

$$\xi_k = \sum_j \xi'_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right)$$

et que

$$d\xi_k = \sum_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) d\xi'_j + \sum_j \sum_l \xi'_j \left(\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} \right) dx^l.$$

Donc

$$\Omega = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge d\xi_k = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge d\xi'_j + \sum_j \xi'_j \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} \right) dx^k \wedge dx^l$$

et le deuxième terme s'annule car $\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^k \partial x^l}$ (symétrique) alors que $dx^k \wedge dx^l = -dx^l \wedge dx^k$, ainsi le terme (k, l) est opposé au terme (l, k) . Donc

$$\Omega = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge d\xi'_j = \sum_j dx'^j \wedge d\xi'_j = \Omega'.$$

2.7.4 Applications: Les lois de la mécanique classique d'après Hamilton

Nous allons nous limiter aux équations de mouvement de Hamilton dans le cas général. C'est juste pour montrer à quel point cette théorie d'espace fibré est intéressante.

2.7.5 Équations de Hamilton

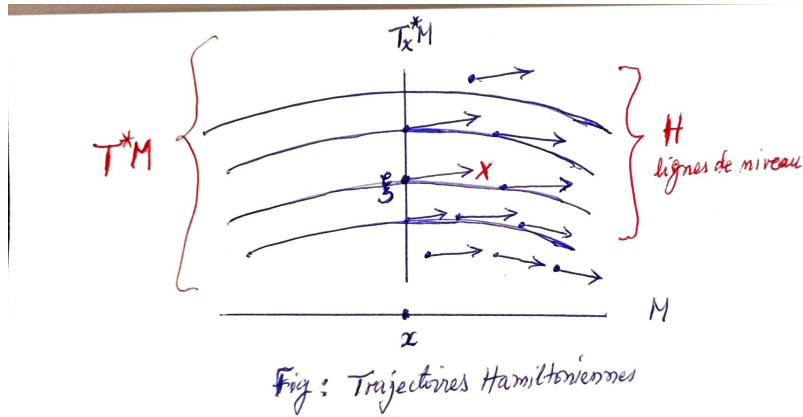
Définition 2.7.18. Soit M une variété appelée « espace de configuration ». L'espace cotangent T^*M est appelé **espace des phases**. Soit $H \in C^\infty(T^*M; \mathbb{R})$ une fonction sur l'espace des phases appelée « **Hamiltonien** » ou « **énergie totale** ». Soit

$$X := \tilde{\Omega}^{-1}(dH) \quad (2.7.4)$$

le champ de vecteur sur T^*M appelé « **champ de vecteur Hamiltonien** », autrement dit, $\Omega(X, \cdot) = dH$. Il génère un flot $\phi^t : T^*M \rightarrow T^*M$ appelé le **flot Hamiltonien**, défini par

$$\frac{d\phi^t}{dt} = X. \quad (2.7.5)$$

Éventuellement $H(t)$ peut dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi X dépendrait du temps.



On donne ici l'expression en coordonnées.

Proposition 2.7.19. Soient $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ des coordonnées locales sur M et ξ_1, \dots, ξ_n les coordonnées duales sur T_x^*M . Le champ de vecteur Hamiltonien s'écrit

$$X = \sum_{j=1}^n \left(X_{x^j} \frac{\partial}{\partial x^j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

et génère des trajectoires de composantes

$$(x^j(t), \xi_j(t))_{j=1, \dots, n} = \phi^t(x(0), \xi(0))$$

qui vérifient les équations de Hamilton ((2.7.5))

$$\begin{cases} \frac{dx^j}{dt} = X_{x^j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \\ \frac{d\xi_j}{dt} = X_{\xi_j} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} \end{cases}$$

Démonstration 2.7.20. On a $X = \tilde{\Omega}^{-1}(dH) \Leftrightarrow \Omega(X, \cdot) = dH$. Or on sait que

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial H}{\partial \xi_j} d\xi_j \right)$$

et

$$\Omega = \sum_j (dx^j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx^j).$$

Donc on obtient que

$$\Omega(X, \cdot) = \sum_j (X_{x^j} d\xi_j - X_{\xi_j} dx^j).$$

L'identification des composantes de $\Omega(X, \cdot) = dH$ donne les formules

$$X_{x^j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \text{ et } -X_{\xi_j} = \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

2.7.6 Loi de Newton et conservation de l'énergie

On montre également son utilité par rapport à la conservation de l'énergie d'un système en mouvement et la loi de Newton.

La mécanique du point considère la variété $M = \mathbb{R}^3$ et une fonction $U \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ appelée énergie potentielle. On considère un objet ponctuel de masse $m > 0$, à l'instant $t \in \mathbb{R}$, sa position est $x(t) \in M$. On note $(x, \xi) \in T^*M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ un point de l'espace cotangent ou l'espace de phases. La fonction de Hamilton (ou énergie totale) est

$$\begin{aligned} H(x, \xi) &:= \underbrace{\frac{1}{2m} \|\xi\|_g^2}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{U(x)}_{\text{Energie potentielle}} \\ &= \frac{1}{2m} \left(\sum_j \xi_j^2 \right) + U(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton déterminent un champ de vitesse $X = \Omega^{-1}(dH)$ sur l'espace des phases, générant les trajectoires $(x(t), \xi(t)) \in T^*M$ de la particule dans l'espace des phases. Les coordonnées dans $M = \mathbb{R}^3$ sont $x(t) = (x_j(t))_j$ et les coordonnées duales sont $(\xi_j(t))_j$.

Proposition 2.7.21. Les équations de Hamilton donnent lieu à la loi de Newton

$$F_j = m \frac{d^2 x_j(t)}{dt^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

avec les composantes $F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, 3$ du champ de vecteur $F(x) = -\text{grad}(U) \in T_x M$ appelé **champ de force** et $\xi_j = m \frac{dx_j}{dt}$ appelé **impulsion ou quantité de mouvement** (ξ_j est la composante j du vecteur cotangent $\xi \in T^*M$).

Démonstration 2.7.22. Grace aux équations (2.7.4) et (2.7.4) et les équations de Hamilton, on a

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = X_{x_j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \frac{1}{m} \xi_j \quad (A)$$

$$\frac{d\xi_j(t)}{dt} = X_{\xi_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j \quad (B)$$

Donc, on obtient deux équations du premier ordre, mais si on dérive encore l'équation (A) par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d^2x_j(t)}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{d\xi_j(t)}{dt} = \frac{1}{m} F_j,$$

c'est à dire

$$F_j = m \frac{d^2x_j(t)}{dt^2}, \quad \text{qui est la loi de Newton} \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

Proposition 2.7.23. « Conservation de l'énergie ». On a que $X(H) = 0$ et $H(\phi^t(\rho)) = H(\rho)$ pour tout $\rho \in T^*M$ et $t \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que l'énergie totale est conservée par le flot Hamiltonien.

Démonstration 2.7.24. On a d'après la définition 1.4.1 et la formule (2.7.4)

$$X(H) = dH(X) = \Omega(X, X) = 0$$

car Ω est antisymétrique. Si on note $E(t) = H(\phi^t(\rho))$ l'énergie au temps t du point $\rho = (x, \xi) \in T^*M$, alors on a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH(\phi^t(\rho))}{dt} = X(H) = 0.$$

Ce qui montre que $E(t)$ est constante, l'énergie est conservée.

On décrit un exemple de calcul pratique.

Sur la terre $M = \mathbb{R}^3$, si x_3 est la composante verticale, l'énergie potentielle de pesanteur est $U(x) = mgx_3$ avec $g = 9,81m/s$.

1. Exprime le champ de force $F(x)$.
2. Résoudre les équations de mouvement si la position initiale $x(0) \in M$ et la vitesse initiale $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) \in T_{x(0)}M$ sont données.
3. La terre est de masse $m_T = 6.10^{24}kg$ et son rayon $R = 6371km$. En utilisant la formule $\mathcal{U}(x) = -Gm_Tm \frac{1}{\|x\|}$, décrire l'expression $U(x) = mgx_3$ au premier ordre avec la valeur de g .

En effet,

1. on a $U(x) = mgx_3$ et le champ de force $F = -\text{grad}(U)$ appelé **poinds** de composantes

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -mg.$$

2. Les équations du mouvement de Newton sont $m \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} = F_j$ donnant pour composante verticale

$$m \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} = -mg \iff \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} = -g,$$

ce qui donne $x_3(t) = x_3(0) + v_3(0)t - \frac{1}{2}gt^2$ et

$$x_j(t) = x_j(0) + v_j(0)t$$

pour les composantes horizontales $j = 1, 2$.

3. On part de $\mathcal{U}(x) = -Gm_T m \frac{1}{\|x\|}$. On considère le point $x(0) = (0, 0, R)$ à la surface de la terre. Alors d'après le développement de Taylor limité au premier ordre, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x(0) + x_3) &= \mathcal{U}(x(0)) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} x(0) \right) x_3 + \mathcal{O}(x_3^2) \\ &= \mathcal{U}(x(0)) - Gm_T m \left(\frac{\partial(1/\|x\|)}{\partial x_3} \right) x_3 + \mathcal{O}(x_3^2) \\ &= \mathcal{U}(x(0)) + Gm_T m \frac{R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} x_3 + \mathcal{O}(x_3^2) \\ &= \mathcal{U}(x(0)) + mgx_3 + \mathcal{O}(x_3^2) \end{aligned}$$

avec

$$g = Gm_T \frac{1}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24} \frac{1}{(6.371 \cdot 10^6)^2} \text{m}^2 = 9,8 \text{Nkg}^{-1}.$$

On retrouve la valeur mesurée à la surface de la terre.

2.8 Formes différentielles et champs de vecteurs

Dans cette section, nous étudions quelques opérations effectuées sur les formes différentielles et champs de vecteurs. Ces opérations nous permettent de nous entraîner à faire les calculs sur les fibrés tangent et cotangent.

Définition 2.8.1. Soit M une variété différentielle et $T_x M$ un espace tangent en x . On note $\bigwedge^k T_x^* M$ et on l'appelle l'espace des k -formes différentielles en x l'ensemble de toutes les fonctions k -linéaires alternées

$$\omega : \underbrace{T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M}_{k\text{-fois}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

En d'autres termes, $\bigwedge^k T_x^* M$ est l'espace des tenseurs k -fois covariants sur M . Spécialement, si on nomme l'évaluation de ω sur les vecteurs tangents $V_1, V_2, \dots, V_r \in T_x M$ par $\langle \omega, V_1, \dots, V_k \rangle$ alors les propriétés de base exigées pour tous les vecteurs tangents en x sont les suivantes:

(i) On a

$$\langle \omega, V_1, \dots, CV_i + C'V'_i, V_k \rangle = C\langle \omega, V_1, \dots, V_i, V_k \rangle + C'\langle \omega, V_1, \dots, V'_i, V_k \rangle$$

pour tous $C, C' \in \mathbb{R}$ et $1 \leq i \leq k$,

(ii) et ensuite

$$\langle \omega, V_{\pi(1)}, \dots, V_{\pi(k)} \rangle = (-1)^\pi \langle \omega, V_1, \dots, V_k \rangle$$

pour toute permutation π des entiers $\{1, \dots, k\}$ avec $(-1)^\pi$ indiquant le signe de π .

Par convention, une 0-forme en x est un nombre réel et $T_x^* M = \bigwedge^1 T_x^* M$ des 1-formes appelée espace cotangent sur M en x , qui est l'espace des formes linéaires sur $T_x M$.

Une k -forme différentielle lisse ω sur M (ou k -forme tout court) est une collection d'applications k -linéaires alternée $\omega_x \in \bigwedge^k T_x^* M$ pour tout $x \in M$, où on exige que pour tous V_1, V_2, \dots, V_k , on a

$$\langle \omega, V_1, \dots, V_k \rangle(x) = \langle \omega_x, V_1|_x, \dots, V_k|_x \rangle$$

est une fonction de x à valeurs réelles. En particulier, une 0-forme est juste une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Si (x^1, \dots, x^n) est un système de coordonnées locales alors $T_x M$ possède une base $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ de base duale $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ telle que

$$\langle dx^i, \partial_{x^j} \rangle = \delta_j^i, \quad \forall i, j.$$

Une 1-forme ω possède une expression en coordonnées locales

$$\omega = h_1(x)dx^1 + \dots + h_m(x)dx^m$$

où chaque fonction coefficient $h_j(x)$ est lisse. Pour tout champ de vecteurs $V = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a

$$\langle \omega, V \rangle = \sum_{i=1}^m h_i(x) \xi^i(x)$$

est une fonction lisse.

Il y a une 1-forme donnée par la différentielle des fonctions à valeurs réelles:

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \text{avec } \langle df, V \rangle = V(f).$$

A l'ordre élevé des formes différentielles, étant donnée une collection de 1-formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_k$, on peut former une k -forme $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k$ appelée produit extérieur en utilisant la formule du déterminant suivante

$$\langle \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k, V_1, \dots, V_k \rangle = \det(\omega_i, V_j)$$

où le membre de droite est le déterminant d'une matrice $k \times k$ d'entrée (i, j) . Le produit extérieur est, par les propriétés du déterminant, multilinéaire et alterné:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge (c\omega_i + C'\omega'_i) \wedge \dots \wedge \omega_k = C(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_i \wedge \omega_k) + C'(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega'_i \wedge \omega_k)$$

$$\omega_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\pi(k)} = (-1)^\pi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

On voit que $\bigwedge^k T_x^* M$ est engendré par les k -formes $dx^I \equiv dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ où I est tel que les indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Donc l'espace $\bigwedge^k T_x^* M$ possède la dimension $\binom{m}{k}$. En particulier, $\bigwedge^k T_x^* M \cong \{0\}$ si $k > m$.

Toute k -forme sur M possède l'expression suivante en coordonnées locales

$$\omega = \sum_I \alpha_I(x) dx^I$$

où I multilinéaire croissant et α une fonction lisse à valeurs réelles.

Par exemple, une 2-forme dans \mathbb{R}^3 prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha(x, y, z) dy \wedge dz + \beta(x, y, z) dz \wedge dx + \gamma(x, y, z) dx \wedge dy \\ &= \alpha(x, y, z) dy \wedge dz - \beta(x, y, z) dx \wedge dz + \gamma(x, y, z) dx \wedge dy \end{aligned}$$

On a donc

$$\langle \omega, \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z, \hat{\xi} \partial_x + \hat{\eta} \partial_y + \hat{\zeta} \partial_z \rangle = \alpha(\eta \hat{\zeta} - \hat{\eta} \zeta) + \beta(\zeta \hat{\xi} - \hat{\zeta} \xi) + \gamma(\xi \hat{\eta} - \hat{\xi} \eta).$$

Le produit extérieur est associatif $\omega \wedge (\theta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \theta) \wedge \zeta$ et anticommutatif, i.e $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$ pour ω une k -forme et θ une l -forme.

2.8.1 Pullback des formes différentielles

Soit un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ entre les ouverts U et V d'une variété et d'inverse $\phi^{-1} = \psi$. On donne en passant la formule générale du pullback d'un tenseur de type (r, s) .

Définition 2.8.2. On appelle pullback d'un tenseur S de type (r, s) et on note ϕ^*S , le tenseur de type (r, s) sur U défini par

$$(\phi^*S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) := S(\psi^*\alpha_1, \dots, \psi^*\alpha_r, d\phi(X_1), \dots, d\phi(X_s)).$$

pour une collection des 1-formes différentielles $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ et des champs de vecteurs X_1, \dots, X_s .

Exemples 2.8.3. Le pullback d'une base de $(0, 1)$ -tenseur. Soit $T = dy_j$ et un champ de vecteurs $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a $\phi : (x_i) \mapsto \phi(x_i) = (y_j)$ et on a d'abord

$$(\phi^*T) = \phi^*(dy^j) = d\phi(x_i) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

Ainsi, on calcule l'évaluation de $\phi^*(dy^j)$ au champ de vecteurs X pour avoir

$$\begin{aligned} (\phi^*T)(X) &= \left(\frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right) dx_i(X) \\ &= \left(\frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right) dx_i \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \left(a_1 \frac{\partial y_j}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right) \\ &= a_1 \frac{\partial y_j}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ &= X(y_j). \end{aligned}$$

2. Le pullback d'une base de $(1, 0)$ -tenseur. Soit $T = \frac{\partial}{\partial y_j}$ dans le cas où $\phi : (x_i) \mapsto (y_j)$, i.e, $\phi(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$. On note que le pullback d'un champ de vecteurs n'est possible uniquement que si ϕ est un difféomorphisme local: alors la différentielle $d\phi$ est

inversible. On peut exprimer $T = \frac{\partial}{\partial y_j}$ en coordonnées sur M en utilisant la règle de la chaîne:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ainsi le pullback

$$\phi^*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \phi^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour toute 1-forme $\alpha = \sum a_k dx^k$, on a

$$\begin{aligned} (\phi^*T)(\alpha) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (a_k dx_k) \\ &= \left(\sum_k a_k dx_k\right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left((a_k \circ \psi) \frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right) \\ &= (a_1 \circ \psi) \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \dots + (a_n \circ \psi) \frac{\partial x_n}{\partial y_j} \\ &= \alpha \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial y_j}\right). \end{aligned}$$

Parlons en particulier des formes différentielles. On sait que les formes différentielles sont tenseurs de type $(0, s)$ ou des tenseurs 0-fois contravariants et s -fois covariants. Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable entre M et N . On sait que

$$dF : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N.$$

Il existe une application linéaire induite F^* appelée pullback ou tiré en arrière ou codifférentielle de F qui prend les k -formes sur N et les ramène sur les k -formes sur M :

$$F^* : \bigwedge^k T_{F(x)}^* N \rightarrow \bigwedge^k T_x^* M.$$

Elle est définie comme suit: si $\omega \in \bigwedge^k T_{F(x)}^* N$, alors on a

$$\langle F^*(\omega), V_1, \dots, V_k \rangle = \langle \omega, dF(V_1), \dots, dF(V_k) \rangle$$

pour tout l'ensemble des champs de vecteurs $V_1, \dots, V_k \in T_x M$.

A la différence de la différentielle, le pullback prend les formes différentielles lisses sur N et ramène ces formes différentielles sur M . Si $x = (x^1, \dots, x^m)$ sont les coordonnées locales sur M et $y = (y^1, \dots, y^m)$ les coordonnées locales sur N , alors

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j, \quad \text{où } y = F(x)$$

donne l'action de F^* sur la base des 1-formes. On conclut qu'en général,

$$F^*\left(\sum_I \alpha_I(y) dy^I\right) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J} dx^J$$

où $\frac{\partial y^I}{\partial x^J}$ indique le déterminant jacobien $\det\left(\frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_r}}\right)$ correspondant aux multindices croissants $I = (i_1, \dots, i_k)$ et $J = (j_1, \dots, j_k)$. Notons que le produit extérieur préserve les opérations algébriques

$$F^*(\omega \wedge \theta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\theta).$$

Explicitement, soit $\phi : M \rightarrow N$ une application différentiable entre les variétés M et N . Soient les coordonnées locales (x^1, \dots, x^m) sur M et (y^1, \dots, y^n) sur N . Le pullback $\phi^*\alpha \in \Lambda^k T_x^*M$ d'une forme différentielle $\alpha = f_i dy^i \in \Lambda^k T_{\phi(x)}^*N$ en coordonnées locales est donné par la formule suivante

$$\phi^*\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y^1 \circ \phi)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(y^n \circ \phi)}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(y^1 \circ \phi)}{\partial x^m} & \dots & \frac{\partial(y^n \circ \phi)}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j} f_i dx^j.$$

Exemples 2.8.4. On présente ici quelques exemples concrets.

1. On considère $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x_1 = x, x_2 = y)$ et $N = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(y_1 = u, y_2 = v)$. On considère une application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x, y) = (\phi^1(x, y) = u, \phi^2(x, y) = v) = \begin{cases} u = x^2 + y \\ v = xy \end{cases}$$

Le tenseur (1-forme) à tirer en arrière est $T = dv \in \wedge^1 T^*N$ est la différentielle de la seconde coordonnée sur N . Le calcul du pullback se fait comme suit:

$$\begin{aligned} \phi^*(dv) &= d(\phi^2(x, y)) \\ &= d(xy) = ydx + xdy \end{aligned}$$

L'évaluation du pullback sur un champ de vecteurs $X = x\partial_x + y\partial_y$ est

$$\begin{aligned} \phi^*(dv)(X) &= \phi^*(dv)(x\partial_x + y\partial_y) \\ &= (ydx + xdy)(x\partial_x + y\partial_y) \\ &= yx + xy = 2xy \end{aligned}$$

2. On considère $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x_1 = x, x_2 = y)$ et $N = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(y_1 = u, y_2 = v)$. On considère une application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x, y) = (\phi^1(x, y) = u, \phi^2(x, y) = v) = \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

On considère la 1-forme $T = u dv - v du \in \wedge^1 T^* N$ et on demande de calculer le pullback $\phi^*(T)$ et l'appliquer au champ de vecteurs $X = \partial_x + \partial_y$.

En effet, on a besoin d'abord de $\phi^*(u) = e^x \cos y$ et $\phi^*(v) = e^x \sin y$. On sait en plus que $\phi^*(\phi^i(x, y)) = d\phi^i(x, y)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \phi^*(T) &= e^x \cos y (e^x \cos y dx + e^x \sin y dy) - e^x \sin y (e^x \sin y dx - e^x \cos y dy) \\ &= e^{2x} dy \end{aligned}$$

L'application de $\phi^*(T)$ au champ de vecteurs $X = \partial_x + \partial_y$ donne

$$\phi^*(T)(X) = e^{2x} dy (\partial_x + \partial_y) = e^{2x}.$$

3. On considère $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x_1, x_2) et $N = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (y_1, y_2) . On considère une application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x_1, x_2) = (\phi^1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \phi^2(x_1, x_2) = x_1 - x_2).$$

Dans ce cas, le pullback du champ de vecteurs $T = \partial_{y_i}, i = 1, 2$ sur N se calcule par la différentielle de l'image directe de ϕ^{-1} , c'est-à-dire la formule

$$\phi^* T = (\phi^{-1})_* T.$$

Ainsi, on calcule la réciproque ϕ^{-1} est définie par

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

On calcule la différentielle $(\phi^{-1})_*$ qui est donnée par la jacobienne

$$(\phi^{-1})_* = J_{\phi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'application de cette matrice au champ de vecteurs $T = \partial_{y_i}, i = 1, 2$. On exprime le champ de vecteurs ∂_{y_1} comme un vecteur de base $\partial_y = (1, 0)$. Alors on a

$$\phi^*(\partial_{y_1}) = J_{\phi^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \partial_{x_1} + \frac{1}{2} \partial_{x_2}.$$

4. On considère $M = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées (x_1, x_2, x_3) et $N = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées (y_1, y_2, y_3) . On considère une application $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (y_1 = x_1, y_2 = x_1x_2, y_3 = x_3^2).$$

On veut calculer $\phi^*(T)$ avec $T = y_2\partial_{y_1} + \sin(y_3)\partial_{y_2} + y_1y_2\partial_{y_3}$.

En effet, le calcul se fait en étapes, d'abord on exprime T en fonction de x , donc on obtient $T = x_1x_2\partial_{y_1} + \sin(x_3^2)\partial_{y_2} + x_1^2x_2\partial_{y_3}$ et ensuite la jacobienne de ϕ pour construire $(\phi^{-1})_*$. (Ici on peut aussi passer aussi par le calcul de ϕ^{-1}). On a

$$J_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2x_3} \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad J_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

On exprime T dans la base (∂_{y_i}) est $T = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ \sin(x_3^2) \\ x_1^2x_2 \end{pmatrix}$ et obtient alors

$$\phi^*(T) = J_\phi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ \sin(x_3^2) \\ x_1^2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -x_2^2 + \frac{1}{x_1}\sin(x_3^2) \\ \frac{1}{2x_3}x_1^2x_2 \end{pmatrix}$$

Enfin on obtient

$$\phi^*(T) = x_1x_2\partial_{x_1} + \left(-x_2^2 + \frac{1}{x_1}\sin(x_3^2)\right)\partial_{x_2} + \left(\frac{1}{2x_3}x_1^2x_2\right)\partial_{x_3}.$$

2.8.2 Produit intérieur

Si ω est une k -forme et V un champ de vecteur, alors on peut former un $(k-1)$ -forme notée $i_V(\omega)$ appelée produit intérieur de V par ω défini tel que

$$\langle i_V(\omega), V_1, \dots, V_{k-1} \rangle = \langle \omega, V, V_1, \dots, V_{k-1} \rangle$$

pour tout ensemble de champs de vecteurs V_1, V_2, \dots, V_{k-1} .

Le produit intérieur est bilinéaire en ses arguments

$$i_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \begin{cases} (-1)^{k-1} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} & i = j_k \\ 0 & i \neq j_k \end{cases}$$

Exemple 2.8.5. On calcule que $i_{\partial_x}(dx \wedge dy) = dy$, $i_{\partial_x}(dz \wedge dx) = -dz$ et

$$i_{\partial_x}(dy \wedge dz) = 0.$$

2. Si $\omega = \alpha(x, y, z)dy \wedge dz + \beta(x, y, z)dz \wedge dx + \gamma(x, y, z)dx \wedge dy$ alors on calcule que

$$i_{\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z}(\omega) = (\zeta\beta - \eta\gamma)dx + (\xi\gamma - \zeta\alpha)dy + (\eta\alpha - \xi\beta)dz.$$

Noter que le produit intérieur agit sur les formes différentielles comme une anti-dérivation, i.e,

$$i_V(\omega \wedge \theta) = i_V(\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge i_V(\theta)$$

partout où ω est une k -forme et θ une l -forme.

Exemples 2.8.6. Soit g des 2-formes définies par $g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $X = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$. Donc pour tout $Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + Y^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, on a

$$\begin{aligned} i_X(g)(Y) &= g(X, Y) = dx_1(X)dx_1(Y) + dx_2(X)dx_2(Y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} Y^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} Y^2 \\ &= df(Y). \end{aligned}$$

Ainsi, on a que $i_X(g) = df$.

2. Soit $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ et $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + X^4 \frac{\partial}{\partial x_4}$. On peut vérifier que

$$i_X(\omega) = i_X \omega = X^1 dx_2 - X^2 dx_1 + X^3 dx_4 - X^4 dx_3.$$

2.8.3 La différentielle

Derrière les pures opérations algébriques du produit extérieur et du produit intérieur, il y a deux opérations différentielles importantes. La première de celles-ci généralise le concept de différentielle d'une fonction lisse (0-forme) à une k -forme différentielle arbitraire.

En coordonnées locales, si $\omega = \sum_I \alpha_I(x) dx^I \in \bigwedge^k T_x^* M$ alors sa différentielle ou sa dérivée extérieure est une $(k+1)$ -forme différentielle

$$d\omega = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I = \sum_{I,j} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I. \quad (2.8.1)$$

Proposition 2.8.7. La différentielle d prenant une k -forme en $(k+1)$ -forme possède les propriétés suivantes:

1. Linéarité: $d(C\omega + C'\omega') = C d\omega + C' d\omega'$ pour toutes constantes C, C' .
2. Anti-dérivation: $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$ pour ω une k -forme et θ une l -forme.
3. Fermeture: $d(d\omega) = 0$.

4. Commutation avec le pullback: $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ pour une fonction $F : M \rightarrow N$ lisse et ω une k -forme sur N .

Démonstration 2.8.8. La preuve est un calcul direct: la linéarité est évidente, l'anti-dérivation est une conséquence de la loi de Leibniz. Vérifier la fermeture, on a besoin de vérifier $d(df) = 0$ pour une fonction f puisque on utilise les propriétés 1) et 2) et puis l'étendre au cas général (2.8.1). Donc

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i,j}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

Cette dernière formule est obtenue en utilisant la propriété qui dit que le produit extérieur est alterné. La fermeture provient du fait que les dérivées partielles mixtes s'équivalent.

2.8.4 Complexe de de Rham

Soit M une variété différentielle de dimension m . On note $\Lambda^k(M)$ l'espace des k -formes différentielles lisses sur M . La différentielle extérieure

$$d : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(M)$$

permet de définir le complexe

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^m(M) \rightarrow 0,$$

appelé **complexe de de Rham** de M .

C'est une suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires telle que

$$d \circ d = 0.$$

La première application $\mathbb{R} \rightarrow \Lambda^0(M)$ associe à une constante $c \in \mathbb{R}$ la fonction constante $f(x) = c$ sur M . On a bien

$$dc = 0.$$

Définition 2.8.9. Une p -forme $\omega \in \Lambda^p(M)$ est dite **fermée** si

$$d\omega = 0.$$

On note

$$\mathcal{Z}^p(M) = \{\omega \in \Lambda^p(M) ; d\omega = 0\}.$$

Pour $p \geq 1$, une p -forme est dite **exacte** s'il existe $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$ telle que

$$\omega = d\alpha.$$

On note

$$\mathcal{B}^p(M) = \{\omega \in \Lambda^p(M) ; \omega = d\alpha, \alpha \in \Lambda^{p-1}(M)\}.$$

Par convention, une 0-forme est exacte si elle est constante :

$$\mathcal{B}^0(M) = \mathbb{R}.$$

Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée :

$$\omega = d\alpha \implies d\omega = d(d\alpha) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M).$$

Lemme 2 (Lemme de Poincaré). Si $M = \mathbb{R}^n$ (ou plus généralement un ouvert contractile ou étoilé de \mathbb{R}^n), alors pour tout $p \geq 1$:

$$d\omega = 0 \implies \omega = d\alpha.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{Z}^p(M) = \mathcal{B}^p(M).$$

Définition 2.8.10. Soient $\omega, \omega' \in \mathcal{Z}^p(M)$. On dit que ω et ω' sont **cohomologues** si

$$\omega' = \omega + d\alpha,$$

c'est-à-dire si

$$\omega - \omega' \in \mathcal{B}^p(M).$$

On note $[\omega]$ la classe d'équivalence de ω .

Le quotient

$$\mathcal{H}^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

est appelé le **p -ième groupe de cohomologie de de Rham** de M .

Les groupes de cohomologie de de Rham jouent un rôle fondamental dans l'étude des propriétés topologiques des variétés différentielles.

Exemples de calcul

[Fonctions sur \mathbb{R}] Les 0-formes sur \mathbb{R} sont les fonctions lisses $f(x)$. On a

$$df = f'(x) dx.$$

Ainsi,

$$df = 0 \iff f'(x) = 0,$$

donc les formes fermées de degré 0 sont exactement les fonctions constantes.

Par conséquent,

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}.$$

[Une 1-forme exacte sur \mathbb{R}^2] Considérons la 1-forme

$$\omega = 2x dx + 2y dy$$

sur \mathbb{R}^2 .

Posons

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Alors

$$df = 2x dx + 2y dy = \omega.$$

Donc ω est exacte, et par conséquent fermée :

$$d\omega = 0.$$

[Forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$] Sur

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

considérons la 1-forme

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Un calcul direct montre que

$$d\omega = 0.$$

Donc ω est fermée.

Cependant, ω n'est pas exacte sur M . En effet,

$$\int_{S^1} \omega = 2\pi \neq 0.$$

Ainsi,

$$[\omega] \neq 0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}),$$

et donc

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Cet exemple montre que la cohomologie de de Rham détecte la présence d'un "trou" topologique.

[Cohomologie de la sphère] On a les résultats suivants :

$$\mathcal{H}^0(S^n) \simeq \mathbb{R},$$

$$\mathcal{H}^n(S^n) \simeq \mathbb{R},$$

et pour

$$0 < p < n,$$

$$\mathcal{H}^p(S^n) = 0.$$

Par exemple, pour la sphère S^2 :

$$\mathcal{H}^0(S^2) \simeq \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}^1(S^2) = 0, \quad \mathcal{H}^2(S^2) \simeq \mathbb{R}.$$

On peut donner les calculs explicites de ces résultats. [Calcul de la cohomologie de S^2]

Considérons la sphère unité

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

On va décrire les groupes de cohomologie de de Rham de S^2 .

1. Calcul de $\mathcal{H}^0(S^2)$

Par définition,

$$\mathcal{H}^0(S^2) = \frac{\mathcal{Z}^0(S^2)}{\mathcal{B}^0(S^2)}.$$

Les 0-formes sont les fonctions lisses sur S^2 . Une fonction f est fermée si

$$df = 0.$$

Or,

$$df = 0 \iff f \text{ est constante sur chaque composante connexe.}$$

Comme S^2 est connexe, les seules fonctions fermées sont les constantes :

$$\mathcal{Z}^0(S^2) = \mathbb{R}.$$

Par convention,

$$\mathcal{B}^0(S^2) = \mathbb{R}.$$

Donc

$$\mathcal{H}^0(S^2) \simeq \mathbb{R}.$$

Cela traduit le fait que S^2 possède une seule composante connexe.

2. Calcul de $\mathcal{H}^1(S^2)$

Soit ω une 1-forme fermée sur S^2 :

$$d\omega = 0.$$

La sphère peut être recouverte par deux ouverts :

$$U_N = S^2 \setminus \{N\}, \quad U_S = S^2 \setminus \{S\},$$

où N et S désignent les pôles nord et sud.

Or chacun des ouverts U_N et U_S est difféomorphe à \mathbb{R}^2 par projection stéréographique. Le lemme de Poincaré implique donc que toute forme fermée y est exacte.

Ainsi, il existe des fonctions f_N et f_S telles que

$$\omega = df_N \quad \text{sur } U_N,$$

et

$$\omega = df_S \quad \text{sur } U_S.$$

Sur l'intersection $U_N \cap U_S$, on a

$$d(f_N - f_S) = 0.$$

Donc

$$f_N - f_S = \text{constante}.$$

On peut alors recoller les fonctions locales pour obtenir une fonction globale f sur S^2 telle que

$$\omega = df.$$

Ainsi toute 1-forme fermée est exacte, donc

$$\mathcal{H}^1(S^2) = 0.$$

Cela correspond intuitivement au fait que la sphère n'a pas de "trou" de dimension 1.

3. Calcul de $\mathcal{H}^2(S^2)$

Les 2-formes sur S^2 sont automatiquement fermées car

$$d : \Lambda^2(S^2) \rightarrow \Lambda^3(S^2),$$

et

$$\Lambda^3(S^2) = 0$$

puisque $\dim(S^2) = 2$.

Donc

$$\mathcal{Z}^2(S^2) = \Lambda^2(S^2).$$

Considérons maintenant la forme volume de la sphère :

$$\omega = x \, dy \wedge dz - y \, dx \wedge dz + z \, dx \wedge dy.$$

Sa restriction à S^2 est une 2-forme nowhere vanishing, appelée forme volume.

On a

$$d\omega = 0.$$

Montrons qu'elle n'est pas exacte.

Supposons qu'il existe une 1-forme α telle que

$$\omega = d\alpha.$$

Alors, par le théorème de Stokes,

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\alpha = \int_{\partial S^2} \alpha.$$

Mais

$$\partial S^2 = \emptyset,$$

donc

$$\int_{S^2} \omega = 0.$$

Or l'intégrale de la forme volume vaut l'aire de la sphère :

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi \neq 0.$$

Contradiction.

Donc ω n'est pas exacte.

Ainsi,

$$\mathcal{H}^2(S^2) \neq 0.$$

En fait, toute 2-forme fermée est cohomologue à un multiple de ω , et

$$\mathcal{H}^2(S^2) \simeq \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{H}^0(S^2) \simeq \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}^1(S^2) = 0, \quad \mathcal{H}^2(S^2) \simeq \mathbb{R}.}$$

2.8.5 Dérivée de Lie

Soit V un champ de vecteurs sur une variété différentielle M . Nous sommes intéressés par savoir comment certains objets géométriques sur M tels que les fonctions, les tenseurs (formes différentielles) et les champs de vecteurs varient sous l'effet du flot $\exp(\varepsilon V)$ induit par V . La dérivée de Lie de tels objets nous parle en effet du changement infinitésimal quand il y a l'action du flot. Par exemple, le comportement d'une fonction sous l'effet du flot induit par un champ de vecteurs V est déjà connu, i.e, $V(f)$. Il sera appelé dérivée de Lie de la fonction f par rapport à V (ou bien dérivée de Lie de la fonction f dans la direction du champ de vecteurs V).

Plus généralement, soit σ une forme différentielle ou un champ de vecteurs définie sur M . Étant donné un point $x \in M$, après un temps ε ce point est déplacé à un autre point $\exp(\varepsilon V)x$ et notre objectif est de comparer la valeur de σ en $\exp(\varepsilon V)x$ avec sa valeur de départ en x .

Cependant ces valeurs $\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x}$ et σ_x sont incomparables car ils appartiennent dans des espaces différents (par exemple, $TM|_{\exp(\varepsilon V)x}$ et TM_x dans le cas d'un champ de vecteurs). Pour faire toute comparaison, on a besoin de transporter $\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x}$ en le ramenant à l'origine, i.e, en x de manière naturelle et de faire la comparaison.

Pour les champ de vecteurs ce transport naturel est l'inverse de la différentielle:

$$\phi_\varepsilon^* \equiv d \exp(-\varepsilon V) : TM|_{\exp(\varepsilon V)x} \rightarrow TM|_x$$

pendant que pour les formes différentielles, on utilise l'application pullback,

$$\phi_\varepsilon^* \equiv \exp(\varepsilon V)^* : \wedge^k T^*M|_{\exp(\varepsilon V)x} \rightarrow \wedge^k T^*M|_x.$$

Ceci nous permet de donner la définition générale d'une dérivée de Lie qui suit.

Définition 2.8.11. Soit V un champ de vecteurs sur M et σ un champ de vecteur ou une forme différentielle définie sur M .

La dérivée de Lie de σ par rapport à V est un objet dont la valeur en $x \in M$ est

$$\begin{aligned} L_V(\sigma)|_x &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_\varepsilon^* (\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x} - \sigma|_x)}{\varepsilon} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (\phi_\varepsilon^* (\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x})) \end{aligned}$$

D'une façon plus simplifiée, cette définition se note généralement comme suit

Définition 2.8.12. Soit T un tenseur de type (r, s) sur M et ϕ_ε le flot généré par un champ de vecteurs V . La dérivé de Lie de T dans la direction de V est un tenseur de type (r, s) défini par

$$L_V(T) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (\phi_\varepsilon^*(T)).$$

La dérivé de Lie de T dans la direction de V mesure le taux de variation de T le long des lignes de flot de V .

Exemple 2.8.13. Soient $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x, y) , le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et la 1-forme $\omega = ydx$.

En effet on cherche le flot de X . On peut voir que ce flot est $\phi_t(x, y) = (x + t, y)$. Le calcul du pullback de ω nécessite la connaissance des éléments suivants

- $\phi_t^*(y) = y \circ \phi_t = y$
- $\phi_t^*(dx) = dx \circ d\phi_t = d(x + t) = dx$

Donc, on a $\phi_t^*(ydx) = ydx$. Ainsi la dérivée temporelle donne

$$L_X\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*(ydx) = 0$$

On obtient $L_X\omega = 0$.

Interprétation: Le champ $X = \frac{\partial}{\partial x}$ déplace les points dans la direction x mais la forme $\omega = ydx$ reste invariante par cette translation (car y ne dépend pas de x), où une dérivée nulle.

Exemple 2.8.14. Soient $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x, y) , le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ et la 1-forme $\omega = xdy$. C'est un champ de dilatation ou champ radial.

En effet on cherche le flot de X . On peut voir que ce flot est $\phi_t(x, y) = (e^t x, e^t y)$. Il suffit de voir que c'est la solution de l'équation différentielle

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x, y) = X(\phi_t(x, y)).$$

Le calcul du pullback $\phi_t^*(xdy)$ nécessite la connaissance de

- $\phi_t^*(x) = x \circ \phi_t = e^t x$
- $\phi_t^*(dy) = dy \circ d\phi_t = d(e^t y) = e^t dy$

Enfin la dérivée temporelle donne

$$L_X\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*(e^{2t} xdy) = 2e^{2t} \Big|_{t=0} xdy = 2xdy.$$

Exemple 2.8.15. Soient $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x, y) , le champ de vecteurs $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ et la 2-forme $\omega = x dx \wedge dy$.

Le flot de ce champ de vecteurs est

$$\phi_t(x, y) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Ce sont des rotations autour de l'origine dans le sens trigonométrique. Le calcul montre qu'on a besoin de

- $\phi_t^*(x) = x \circ \phi_t = x \cos t - y \sin t$
- $\phi_t^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$. C'est un calcul classique: le pullback d'un volume élémentaire $dx \wedge dy$ par une rotation est invariante (puisque la jacobienne de la rotation vaut 1).
- $\phi_t^*(\omega) = (x \cos t - y \sin t) dx \wedge dy$.

Enfin la dérivée temporelle donne

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega = -y dx \wedge dy.$$

Ici, si on compare au résultat obtenu avec la méthode de la formule de Cartan (plus bas), on voit qu'il y a une différence de signe (ce n'est pas une faute).

Attention à l'orientation du flot: le flot de X correspond à une rotation dans le sens trigonométrique (positive), donc le point x se déplace en direction de $-y$. Quand on tire x en arrière, on le voit comme se déplaçant en sens inverse, ce qui introduit un signe négatif dans le pullback.

Ainsi, on a

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega = -y dx \wedge dy = - \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{-t}^* \omega \right) = y dx \wedge dy.$$

Proposition 2.8.16. Soient T, V et ϕ_t les données de la définition 2.8.12. Pour tout $t_0 \in I$ dans lequel ϕ_t est défini, on a

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\phi_t^*(T)) = \phi_{t_0}^*(L_V T).$$

Démonstration 2.8.17. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\phi_t^*) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\phi_{s+t_0}^* T) \\
 &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\phi_s \circ \phi_{t_0})^* T) \\
 &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\phi_{t_0})^* (\phi_s)^* T) \quad \text{d'après la propriété des flots} \\
 &= \phi_{t_0}^* (L_V T).
 \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes.

Proposition 2.8.18. Soient X et Y des champs de vecteurs sur M . On a

- $L_X X = 0$
- $L_X Y = -L_Y X$.

Démonstration 2.8.19. Il suffit d'utiliser le fait que $L_X Y = [X, Y] = XY - YX$ pour conclure.

En particulier, on sait qu'une forme différentielle de degré s est un champ de tenseurs de type $(0, s)$. Dans la suite, nous particularisons l'étude sur les formes différentielles.

En coordonnées locales, la dérivée de Lie d'une forme différentielle est déterminée comme suit. Si $V = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ alors

$$L_V(dx^i) = dL_V(x^i) = d(V(x^i)) = d\xi^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Par conséquent, on a la formule générale de la dérivée de Lie

$$L_V \left(\sum_I \alpha_I(x) dx^I \right) = \sum_I \left(L_V(\alpha_I) dx^I + \sum_{k=1}^m \alpha_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right). \quad (2.8.2)$$

Par exemple, si $M = \mathbb{R}^2$ et $V = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, alors la dérivée de Lie d'une 2-forme

(i) se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
 L_V(\gamma(x, y)dx \wedge dy) &= L_V(\gamma)dx \wedge dy + \gamma d\xi \wedge dy + \gamma dx \wedge d\eta \\
 &= (\xi\gamma_x + \eta\gamma_y + \gamma\eta_y + \gamma\xi_x) dx \wedge dy.
 \end{aligned}$$

- (ii) Et si en particulier $V = -y\partial_x + x\partial_y$, alors on peut voir que la dérivée de Lie de $dx \wedge dy$ par rapport à V est nulle, i.e,

$$L_V(dx \wedge dy) = 0.$$

Cela s'explique par le fait que $V = -y\partial_x + x\partial_y$ est le générateur infinitésimal du groupe des rotations. Ce qui reflète que le groupe des rotations dans \mathbb{R}^2 préserve les aires.

Dans le cas où σ est un champ de vecteurs, sa dérivée de Lie est le crochet de Lie comme on va le voir dans la proposition qui suit.

Proposition 2.8.20. Soient V et W deux champs de vecteurs lisses sur M . La dérivée de Lie de W par rapport à V coïncide avec le crochet de Lie de V et W , i.e, $L_V(W) = [V, W]$.

Démonstration 2.8.21. Soient (x^1, \dots, x^m) des coordonnées locales, avec $V = \sum \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $W = \sum \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. En développant suivant les puissances de ε et en utilisant la formule $f(\exp(\varepsilon V)x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} V^k(f)(x)$ à l'ordre deux, on a que

$$\begin{aligned} W|_{\exp(\varepsilon V)x} &= \sum_{i=1}^m \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} (\exp(\varepsilon V)x) \\ &= \sum_{i=1}^m (\eta^i(x) + \varepsilon V(\eta^i) + O(\varepsilon^2)) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Or on rappelle que si $F : M \rightarrow N$ est une application différentiable entre les variétés M et N , alors l'application dF est une application induite par F et c'est une application linéaire entre les espaces tangents, i.e, $dF : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$. En coordonnées locales, si $V = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un vecteur tangent en $x \in M$, alors on a $dF(V) := V(F)$, i.e,

$$\begin{aligned} dF(V_x) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \\ &= \sum_{j=1}^n V(F^j(x)) \frac{\partial}{\partial y^j}. \end{aligned}$$

Donc on calcule que

$$d \exp(-\varepsilon V) [W|_{\exp(\varepsilon V)x}] = \sum_{i=1}^m \{ \eta^i(x) + \varepsilon [V(\eta^i) - W(\xi^i)] + O(\varepsilon^2) \} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En évaluant le résultat en $\varepsilon = 0$, on obtient que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \exp(-\varepsilon V) [W|_{\exp(\varepsilon V)x}] = [V, W].$$

En se tournant aux formes différentielles, on a que la dérivée de Lie peut être construite à partir de ses propriétés basiques:

1. linéarité: $L_V(c\omega + c'\omega') = cL_V(\omega) + c'L_V(\omega')$ pour c, c' constants
2. Dérivation: $L_V(\omega \wedge \theta) = L_V(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_V(\theta)$
3. Commutation avec la différentielle: $L_V(d\omega) = dL_V(\omega)$.

La plus importante formule est celle qui relie la dérivée de Lie et la différentielle.

Proposition 2.8.22. (Formule de Cartan) Soit ω une forme différentielle et V un champ de vecteurs sur M . Alors

$$L_V(\omega) = d(i_V\omega) + i_V(d\omega).$$

Démonstration 2.8.23. Premièrement, pour une fonction f , on a

$$L_V(f) = i_V(df) = \langle df, V \rangle = V(f).$$

Donc l'action de la dérivée de Lie sur les fonctions est la même. La linéarité est claire quand la propriété de fermeture (i.e, $d(d\omega) = 0$) de d prouve immédiatement la propriété de commutation

$$L_V(d\omega) = d(i_Vd\omega) = dL_V(\omega).$$

Enfin, si ω est une k -forme et θ une l -forme, on utilise les formules

$$i_V(\omega \wedge \theta) = (i_V\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (i_V\theta) \quad \text{et} \quad d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$$

pour montrer que $L_V(\omega \wedge \theta) = L_V(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_V(\theta)$.

En effet,

$$\begin{aligned} L_V(\omega \wedge \theta) &= d(i_V\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (i_Vd\theta) + i_V(d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta) \\ &= d(i_V\omega) \wedge \theta + (-1)^{k-1} (i_V\omega) \wedge d\theta + (-1)^k d\omega \wedge i_V\theta + (-1)^{2k} \omega \wedge d(i_V\theta) \\ &\quad + (i_Vd\omega) \wedge \theta + (-1)^{k+1} (d\omega) \wedge (i_V\theta) + (-1)^k i_V(\omega) \wedge d\theta + (-1)^{2k} \omega \wedge (i_Vd\theta) \\ &= L_V(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_V(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi, on aura montré que

$$L_V(\cdot) = d \circ i_V(\cdot) + i_V \circ d(\cdot).$$

On donne quelques exemples.

1. Sur \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, z) , soit $\alpha_0 = xdy + dz$, une 1-forme. Soient les champs de vecteurs $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z$, $X_3 = \partial_y$. Donc, on calcule que

$$\begin{aligned} L_{X_1}\alpha_0 &= i_{X_1}d\alpha_0 + d(i_{X_1}\alpha_0) \\ &= i_{X_1}(dx \wedge dy) + d(0) \\ &= dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{X_2}\alpha_0 &= i_{X_2}d\alpha_0 + d(i_{X_2}\alpha_0) \\ &= i_{X_2}(dx \wedge dy) + d(xy + 2z) \\ &= (xdy - ydx) + (xdy + ydx + 2dz) \\ &= 2xdy + 2dz \\ &= 2\alpha_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{X_3}\alpha_0 &= i_{X_3}d\alpha_0 + d(i_{X_3}\alpha_0) \\ &= i_{X_3}(dx \wedge dy) + d(x) \\ &= -dx + dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Sur \mathbb{R}^4 de coordonnées (x, y, z, w) , soit $\omega_0 = dx \wedge dy + dz \wedge dw$ une 2-forme et soient les champs de vecteurs $X_1 = x\partial_x + z\partial_z$ et $X_2 = y\partial_x + w\partial_z$. Comme $d\omega_0 = 0$, alors la formule de Cartan devient $L_X\omega_0 = d(i_X\omega_0)$. Ainsi, on calcule que

$$\begin{aligned} L_{X_1}\omega_0 &= d(i_{X_1}\omega_0) \\ &= d(xdy + zdw) \\ &= dx \wedge dy + dz \wedge dw \\ &= \omega_0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{X_2}\omega_0 &= d(i_{X_2}\omega_0) \\ &= d(ydy + wdw) \\ &= dx \wedge dy + dz \wedge dw \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc calculer la dérivée de Lie d'un tenseur (r, s) à l'aide de la définition (voir les exemples (2.8.13) et (2.8.14)) et à la formule de Cartan.

3. On considère sur \mathbb{R}^2 le champ de vecteurs $X = (x^2 + y)\partial_x + (y^2 + 1)\partial_y$ et la 1-forme différentielle $\theta = (2xy + x^2 + 1)dx + (x^2 - y)dy$ et soit f l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v, w) \mapsto (u - v, v^2 + w).$$

Calculer a) $\theta(X)(0, 0)$ et b) $f^*(\theta)$.

En effet, on a:

a)

$$\theta(X)(0, 0) = ((2xy + x^2 + 1)(x^2 + y) + (x^2 - y)(y^2 + 1))(0, 0) = 0$$

et

b)

$$\begin{aligned} f^*\theta &= \theta(df(u, v, w)) = \theta(dx, dy) \\ &= \theta(du - dv, 2vdv + dw) \\ &= (2(u - v)(v^2 + w) + (u - v)^2 + 1)(du - dv) + ((u - v)^2 - (v^2 + w))(2vdv + dw). \end{aligned}$$

En développant, on obtient

$$\begin{aligned} f^*\theta &= (2(u - v)(v^2 + w) + (u - v)^2 + 1) du \\ &\quad + (2v((u - v)^2 - v^2 - w) - 2(u - v)(v^2 + w) - (u - v)^2 - 1) dv \\ &\quad \quad \quad + ((u - v)^2 - v^2 - w) dw. \end{aligned}$$

2.9 Exercices sur les formes différentielles et champs de vecteurs

Nous nous contentons ici de voir les formes différentielles et les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n . Nous exploitons les exercices y relatifs.

Exercice 2.9.1. Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas les intégrer:

1. la forme différentielle $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. la forme différentielle $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. la forme différentielle $\omega_3 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xy + 2z + y)dz$

Solution:

1. On pose $P(x, y) = 2xy$ et $Q(x, y) = x^2$. Comme ω_1 est définie sur l'ouvert étoilé \mathbb{R}^2 et que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, le théorème de Poincaré permet de dire que ω_1 est exacte. On cherche donc f tel que $df = \omega_1$. Cela équivaut à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$$

En intégrant la première equation par rapport à x , on obtient

$$f(x, y) = x^2y + c(y).$$

En dérivant cette dernière equation par rapport à y et en l'identifiant avec la 2eme equation du système, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2.$$

Il s'ensuit que $c'(y) = 0$ et donc que $c(y) = c \in \mathbb{R}$. Par suite la fonction f cherchée est

$$f(x, y) = x^2y + c \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle.}$$

2. On pose $P(x, y, z) = xy$, $Q(x, y, z) = -z$, $R(x, y, z) = xz$. On constate que $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ alors que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Donc la forme ω_2 n'est pas exacte.
3. On pose $P(x, y, z) = yz^2$, $Q(x, y, z) = xz^2 + z$, $R(x, y, z) = 2xyz + 2z$. On constate que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2zy$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2xz + 1$$

La forme ω_3 est de plus définie sur l'ouvert étoilé \mathbb{R}^3 , elle est donc exacte d'après le théorème de Poincaré. Cherchons maintenant la fonction f telle $df = \omega_3$. Ceci revient à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

En intégrant la première equation par rapport à x , on obtient

$$f(x, y, z) = xyz^2 + \psi(y, z). \quad (2.9.1)$$

Maintenant, en dérivant l'équation (2.9.1) successivement par rapport à y et z en égalisant avec les deux dernières equations du systèmes, on obtient un nouveau système

$$\begin{cases} xz^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} = xz^2 + z \\ 2xyz + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = z \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2z + y \end{cases}$$

Finalement en intégrant la première equation de ce dernier système obtenu par rapport à y , on obtient

$$\psi(x, y, z) = zy + c(z)$$

et en dérivant ψ par rapport à z et en égalisant avec la deuxième equation, on obtient

$$y + c'(z) = 2z + y \Leftrightarrow c'(z) = 2z,$$

ce qui donne

$$c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction f cherchée est de la forme

$$f(x, y, z) = xyz^2 + zy + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.9.2. On considère le champ vectoriel $\vec{V}(x, y) = (1 + 2xy, x^3 - 3)$. Le champ est-il un champ de gradient?

Solution:

On rappelle qu'un champ de vecteurs V est un champ de gradient s'il existe une fonction f telle que $V = \nabla f$. Exemple de \mathbb{R}^2 , on a $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Au champ $\vec{V}(x, y)$ est associé la forme différentielle $\omega = (1 + 2xy)dx + (x^3 - 3)dy$. Cette forme différentielle n'est pas exacte puisque

$$\frac{\partial(1 + 2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^3 - 3)}{\partial x}.$$

Il s'ensuit que $\vec{V}(x, y)$ n'est pas un champ de gradient.

Exercice 2.9.3. Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x, y, z) = 1 + x + xy + xz.$$

Solution:

Le champ vectoriel qui dérive du potentiel U est

$$\text{grad}(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Il s'agit donc du champ vectoriel de composantes

$$\text{grad}(U) = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

Exercice 2.9.4. On considère la forme différentielle $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$.

- Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie?
- Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} \omega$ où \mathcal{C} est le cercle de centre 0 et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
- La forme ω est-elle exacte?

Solution:

a) La forme $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) On paramètre le cercle par $x = \cos t$, $y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\cos t) + \cos t(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

c) La forme ω n'est pas exacte sinon son intégrale curviligne sur le cercle \mathcal{C} serait nulle et cela contredit notre résultat de la question précédente.

Remarquons cependant que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

En fait, avec cet exemple, on voit que dans le théorème de Poincaré, l'hypothèse que l'ouvert doit être étoilé est indispensable. Ici $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé, c'est un domaine troué. De plus $\int_{\mathcal{C}} \omega$ n'est pas nulle car le cercle entoure le trou.

Exercice 2.9.5. On considère les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^2 suivants:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial y}$$

et soit ω la forme différentielle sur \mathbb{R}^2

$$\omega = (x^2 + 2y)dx + (x + y^2)dy.$$

Montrer que ω satisfait la relation

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

entre le crochet de Lie et la différentielle extérieure.

Solution:

On a $[X, Y] = 0$. D'une part

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial y} dy \right) \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x + y^2)}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= -dx \wedge dy. \end{aligned}$$

et d'autre part, on a:

$$X\omega(Y) = xy + 2x^2y + 6xy^3, \quad Y\omega(X) = 2xy + 2x^2y + 6xy^3.$$

et

$$X\omega(Y) - Y\omega(X) = -xy$$

Donc, on a

$$d\omega(X, Y) = -dx \wedge dy \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad y \frac{\partial}{\partial y} \right) = -xy,$$

D'où l'égalité.

Exercice 2.9.6. On considère les trois champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 suivants

$$e_1 = (2 + y^2)e^z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

et

$$e_3 = -2xy^2 \frac{\partial}{\partial x} - y(2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} + (2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

- a) Montrer que ces champs de vecteurs forment une base du module C^∞ des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 .
- b) Écrire les éléments θ^i de sa base duale en termes de dx, dy, dz .
- c) Calculer les crochets de Lie $[e_i, e_j]$ et exprimer les dans la base $\{e_i\}$.

Solution:

- a) Le déterminant de la matrice des coefficients est

$$\det \begin{pmatrix} (2+y^2)e^z & 0 & 0 \\ 2xy & (2+y^2) & 0 \\ -2xy^2 & -y(2+y^2) & (2+y^2) \end{pmatrix} = (2+y^2)^3 e^z.$$

Ce déterminant ne s'annule jamais. Par conséquent ces trois champs de vecteurs forment une base de $\chi(\mathbb{R}^3)$.

- b) On a par formule $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ où δ_j^i est un delta de Kronecker. Donc si $\theta^1 = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$, on a

$$1 = \theta^1(e_1) = A(2+y^2)e^z, \quad 0 = \theta^1(e_2) = A(2xy) + B(2+y^2);$$

$$0 = \theta^1(e_3) = A(-2xy^2)e^z + B(-y(2+y^2)) + C(2+y^2).$$

En résolvant ce système, on obtient

$$A(x, y, z) = \frac{1}{(2+y^2)e^z}, \quad B(x, y, z) = -\frac{2xy}{(2+y^2)e^z}, \quad C = 0.$$

De façon similaire, si $\theta^2 = D(x, y, z)dx + E(x, y, z)dy + F(x, y, z)dz$, alors on déduit que

$$D = 0, \quad E(x, y, z) = \frac{1}{(2+y^2)}, \quad F = \frac{y}{(2+y^2)}.$$

Enfin, si $\theta^3 = G(x, y, z)dx + H(x, y, z)dy + I(x, y, z)dz$, on obtient de la même façon

$$G = 0, \quad H = 0, \quad I = \frac{1}{(2+y^2)}.$$

Ainsi, les éléments θ^i cherchés sont

$$\theta^1 = \frac{1}{(2+y^2)e^z}dx - \frac{2xy}{(2+y^2)e^z}dy,$$

$$\theta^2 = \frac{1}{(2+y^2)}dy + \frac{y}{(2+y^2)}dz, \quad \theta^3 = \frac{1}{(2+y^2)}dz.$$

c) En appliquant la formule

$$[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg([X, Y]),$$

on déduit que $[e_1, e_2] = 0$. De façon similaire, on obtient

$$[e_1, e_3] = -(2 + y^2)e_1, \quad [e_2, e_3] = (y^2 - 2)e_2 + 2ye_3.$$

Exercice 2.9.7. Trouver le sous-espace de \mathbb{R}^2 où les formes différentielles

$$\alpha = xdx + ydy, \quad \beta = ydx + xdy$$

sont linéairement indépendantes et déterminer les champs de vecteurs de la base duale $\{X, Y\}$ sur cet espace.

Solution:

Le déterminant de la matrice des coefficients est

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 - y^2 \neq 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = \pm y\}.$$

Donc les formes α et β sont linéairement indépendantes sur le sous-espace de \mathbb{R}^2 complémentaire aux diagonales $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

Les champs duaux du repère

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y}, \quad a, b, c, d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

doivent satisfaire les conditions

$$X(\alpha) = Y(\beta) = 1, \quad X(\beta) = Y(\alpha) = 0.$$

Donc, on a

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} cx + dy = 1 \\ cy + dx = 0 \end{cases}$$

En résolvant de ce système, on obtient

$$X = \frac{x}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Remarque:

Le résultat qui suit a partir du fait général qui montre que si $\{e_i = \sum_k \lambda_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ forment une base de champs de vecteurs sur une variété et si $\{\theta^j = \sum_l \mu_l^j dx^l\}$ sa base duale, donc par la formule

$$\theta^j(e_i) = (\theta^j = \sum_l \mu_l^j dx^l) \left(\sum_k \lambda_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \delta_{ij},$$

on a alors les coefficients matriciels qui sont liés par la formule suivante

$$(\mu_j^i) = \left((\lambda_j^i)^{-1} \right)^t.$$

Exercice 2.9.8. On considère sur un ouvert de \mathbb{R}^3 une 1-forme différentielle

$$\alpha = P_1(x)dx^1 + P_2(x)dx^2 + P_3(x)dx^3, \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

a) Trouver les conditions sous lesquelles on a $i_X d\alpha = 0$ pour le champ de vecteurs

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

c) Quand est-ce que nous avons $i_X \alpha = 0$ et $i_X d\alpha = 0$?

Solution:

a) Si on écrit $P_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial x^j}$ et $Q_{ij} = P_{ji} - P_{ij}$, alors

$$\begin{aligned} d\alpha &= (P_{21} - P_{12})dx^1 \wedge dx^2 + (P_{31} - P_{13})dx^1 \wedge dx^3 + (P_{32} - P_{23})dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \sum_{i < j} Q_{ij} dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} i_X d\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow i_X d\alpha(Y) &= 0, \quad Y \in \text{Vect}(\mathbb{R}^3) \\ \Leftrightarrow d\alpha \left(X, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= 0, \quad k = 1, 2, 3 \\ \Leftrightarrow \sum_{i < j} Q_{ji} dx^i \wedge dx^j \left(\sum_l X_l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} i_X d\alpha(Y) &= \sum_l \sum_{i < j} Q_{ji} (X_l \delta_l^i \delta_k^j - X_l \delta_k^i \delta_l^j) \\ &= \sum_l \left(\sum_{l < k} Q_{kl} X_l - \sum_{k < l} Q_{lk} X_l \right) \\ &= \sum_l Q_{kl} X_l = 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

b) Par a), on a

$$i_X d\alpha = 0 \Leftrightarrow \sum_l^3 Q_{kl} X_l = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

et

$$i_X \alpha = \alpha(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_i P_i dx^i \right) \left(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_i P_i X^i = 0.$$

Chapitre 3

Espaces fibrés et connexions

Dans les sections qui suivent, on rappelle quelques formules utiles dans la suite. On se focalisera dans la suite sur le cas des fibrés tangent et cotangent.

3.1 Formules de changement de coordonnées pour les formes différentielles

Considérons un changement de coordonnées sur \mathbb{R}^2 :

$$x = (x^1, x^2) \rightarrow x' = (x'^1, x'^2)$$

On calcule que $dx'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} dx^2$ et

$$\begin{aligned} dx'^1 \wedge dx'^2 &= dx'^1 \otimes dx'^2 - dx'^2 \otimes dx'^1 \\ &= \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right) dx^1 \otimes dx^2 + \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right) dx^2 \otimes dx^1 \\ &\quad - \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \otimes dx^2 - \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right) dx^2 \otimes dx^1 \\ &= \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) (dx^1 \wedge dx^2) \end{aligned}$$

Par conséquent une 2-forme $\in C^\infty(\Lambda^2)$ s'écrit dans l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{x'}(x')(dx'^1 \wedge dx'^2) = \omega_{x'}(x'(x)) \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) (dx^1 \wedge dx^2) \\ &= \omega_x(x)(dx^1 \wedge dx^2) \end{aligned}$$

avec $\omega_x(x) = \omega_{x'}(x'(x)) \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)$.

Cela signifie que $\omega_{x'}(x')$ et $\omega_x(x)$ sont la composante de ω relativement à la base $(dx'^1 \wedge dx'^2)$ ou $(dx^1 \wedge dx^2)$ respectivement.

Plus généralement, si on a un changement de coordonnées sur \mathbb{R}^n :

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto x' = (x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$$

alors une forme volume (i.e. forme de degré n) s'exprime comme

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_x(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \omega_{x'}(x') dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n\end{aligned}$$

avec la formule

$$\omega_x(x) = \omega_{x'}(x') \left(\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right) (x) \quad (3.1.1)$$

et

$$\left(\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right) (x) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x'^{\sigma(1)}}{\partial x^1} \right) \dots \left(\frac{\partial x'^{\sigma(n)}}{\partial x^n} \right) \quad (3.1.2)$$

On remarque que la formule (3.1.1) est la définition même du déterminant comme mesurant la variation de volume.

3.2 Changement de coordonnées et intégrales

Prenons un exemple en dimension deux. Supposons que M est une variété orientée de dimension 2 et que l'on ait un changement de coordonnées qui préserve l'orientation :

$$x = (x^1, x^2) \mapsto x' = (x'^1, x'^2)$$

On introduit le Jacobien, qui est la valeur absolue du déterminant de la $\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right)_{i,j}$:

$$\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) := \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right).$$

Si $\omega_{x'}(x')$ est une fonction numérique de x' , alors en théorie de l'intégration, on a la loi de changement de variable :

$$\int \omega_{x'}(x') dx'^1 dx'^2 = \int \omega_{x'}(x'(x)) \left| \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right| dx^1 dx^2 \quad (3.2.1)$$

ou encore

$$\int \omega_{x'}(x') dx'^1 dx'^2 = \int \omega_x(x) dx^1 dx^2 \quad (3.2.2)$$

avec la formule

$$\omega_x(x) = \omega_{x'}(x'(x)) \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right). \quad (3.2.3)$$

Nous allons voir que la formule (3.2.3) arrive naturellement avec les 2-formes. On définit donc

$$\int_M \omega := \int \omega_{x'}(x'(x)) dx^1 dx^2$$

où le deuxième membre est la notation habituelle d'une intégrale pour la fonction numérique $\omega(x')$.

Si l'orientation est préservée, cette définition ne dépend pas du système de coordonnées d'après (3.2.1) et (3.2.2).

Remarque 3.2.1. A posteriori il n'est pas étonnant que ce soit une 2-forme qui est l'intégrand naturel pour une intégrale en dimension deux. En effet, on intègre des éléments de surface, et un élément de surface (imaginer un petit parallélogramme) est défini par deux vecteurs tangents V_1, V_2 , et son aire infinitésimale $S(V_1, V_2)$ est linéaire par rapport à V_1, V_2 et antisymétrique. C'est donc bien une 2-forme.

Plus généralement, on a

Théorème 3.2.2. Si (x^1, \dots, x^p) est un système de coordonnées sur M orientée de dimension p , et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ est une p -forme qui s'écrit $\omega(x) = \omega_x(x)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)$ alors on définit:

$$\int_M \omega := \int \omega_x(x) (dx^1 \dots dx^p)$$

qui est indépendant du système de coordonnées choisies.

On remarque que M peut être une sous-variété plongée d'une variété N de dimension n plus grande.

3.3 Variété orientable

Pour avec $n = \dim M$, la dimension de l'espace $\Lambda_x^n(T_x^* M)$ des n -formes est de dimension $C_n^n = 1$, et une base est

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Une n -forme est aussi appelée une **forme volume**. Elles jouent un rôle important pour l'intégration. On considère que $\Lambda^n(T_x^* M) \rightarrow M$ est un fibré de rang 1.

Définition 3.3.1. Une variété différentiable M est orientable si et seulement si il existe une collection Φ de systèmes de coordonnées sur M tels que

$$M = \bigcup_{(U, \varphi) \in \Phi} U \quad \text{et} \quad \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) > 0 \quad \text{sur} \quad U \cap V$$

où (U, x^1, \dots, x^n) et (V, y^1, \dots, y^n) appartiennent à Φ .

Proposition 3.3.2. L'espace total TM du fibré tangent sur une variété orientable M est une variété orientable.

Démonstration 3.3.3. Soit M une variété orientable de dimension n et soit π la projection $\pi : TM \rightarrow M$. Pour tout système de coordonnées $\{x^i\}$ sur un ouvert $U \subset M$, on note $\{x^i, y^i\}$ les coordonnées usuelles sur $\pi^{-1}(U)$. Soit $\{x'^i\}$ un autre système de coordonnées sur un autre ouvert $V \subset M$ tel que $U \cap V \neq \emptyset$. Le changement de coordonnées $x'^i = x'^i(x^j)$ sur $U \cap V$ induit le changement de coordonnées sur $\pi^{-1}(U \cap V)$ défini par

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \quad y'^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} y^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matrice jacobienne de ce changement de coordonnées est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^j} y^k & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\det J = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right)^2 > 0,$$

il s'ensuit que TM est orientable.

Remarques 3.3.4. On a donc - Par exemple sur \mathbb{R}^3 , une orientation est le choix du sens $\pm(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$.

- Un changement de coordonnées $x \rightarrow x'$ préserve l'orientation si et seulement si

$$\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) > 0$$

en tous points.

Exemple 3.3.5. On considère l'application (changement de coordonnées)

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v) = (xe^y + y, xe^x + \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (i) Trouver les valeurs de λ pour lesquelles φ est un difféomorphisme.
- (ii) Trouver les valeurs de λ pour lesquelles le difféomorphisme φ préserve l'orientation.

En effet,

(i) supposons

$$xe^y + y = x'e^{y'} + y', \quad xe^x + \lambda y = x'e^{x'} + \lambda y' \quad (3.3.1)$$

On obtient en soustrayant membre a membre $(1 - \lambda)y = (1 - \lambda)y'$. Donc, pour $\lambda \neq 1$, on obtient $y = y'$. Et partant de chacune de ces deux equations de (3.3.1), on déduit que $x = x'$. Donc φ est injective. Elle en plus surjective car son inverse est donnée par

$$y = \frac{u - v}{1 - \lambda}, \quad x = \frac{\lambda u - v}{\lambda - 1} e^{\frac{u-v}{\lambda-1}}.$$

Les applications φ et son inverse φ^{-1} sont C^∞ si et seulement si $\lambda \neq 1$. Donc φ est un difféomorphisme si et seulement si $\lambda \neq 1$.

(ii) On considère l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 donnée par $dx \wedge dy$ ou par $du \wedge dv$. On a

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^y & xe^y + 1 \\ e^y & xe^y + \lambda \end{pmatrix}.$$

Donc

$$du \wedge dv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx \wedge dy = e^y(\lambda - 1) dx \wedge dy.$$

Ce qui montre que, φ préserve l'orientation si $\lambda > 1$.

3.4 Dérivée extérieure

Définition 3.4.1. Sur une variété M de dimension n , pour tout $p \in [0, n]$ on définit un opérateur différentiel d'ordre 1 qui généralise la différentielle d'une fonction, et appelé dérivée extérieure, notée $d : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1})$, défini

1. d'abord sur $C^\infty(\Lambda^0)$ par

$$d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1) : f(x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i;$$

2. ensuite sur $C^\infty(\Lambda^1)$

$$d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$$

défini par

$$\alpha = \alpha_j(x) dx^j \mapsto (d\alpha)(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j; \quad (3.4.1)$$

3. ensuite sur $C^\infty(\Lambda^2)$ par

$$d : C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^3)$$

défini par

$$\beta = \beta_{jk}(x) dx^j \wedge dx^k \mapsto (d\beta)(x) = \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

4. Etc...

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.4.2. La définition ci-dessus ne dépend pas du système de coordonnées choisies.

Démonstration 3.4.3. La preuve utilise le fait que plus généralement, si ω est une p -forme alors

$$\begin{aligned} d\omega(V_0, V_1, \dots, V_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i V_i \left(\omega(V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) \right) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega \left([V_i, V_j], V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_p \right) \end{aligned}$$

où \hat{V}_i signifie que ce terme est absent. Donc cette formule est une formule géométrique intrinsèque qui exprime l'opérateur d .

On peut voir que par exemple pour $p = 1$, si $\alpha \in C^\infty(\Lambda^1)$, et $V_0, V_1 \in C^\infty(TM)$ alors

$$(d\alpha)(V_0, V_1) = V_0(\alpha(V_1)) - V_1(\alpha(V_0)) - \alpha([V_0, V_1]).$$

Vérifions tout d'abord que $d\alpha$ ainsi défini est un tenseur : il faut que en un point fixé, $d\alpha$ soit linéaire par rapport à V_0 et V_1 . Pour le vérifier, soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction (en chaque point $f(x)$ est un nombre), on calcule :

$$\begin{aligned} (d\alpha)(fV_1, V_2) &= fV_1(\alpha(V_2)) - V_2(\alpha(fV_1)) - \alpha([fV_1, V_2]) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - V_2(f\alpha(V_1)) - \alpha(fV_1V_2 - V_2fV_1) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - (V_2(f))\alpha(V_1) - \alpha(fV_1V_2 \\ &\quad - V_2(f)V_1 - fV_2V_1) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - (V_2(f))\alpha(V_1) - f\alpha(V_1V_2 - V_2V_1) \\ &\quad + (V_2(f))\alpha(V_1) \\ &= f(d\alpha)(V_1, V_2) \end{aligned}$$

On utilise : $\alpha(fV_2) = f\alpha(V_2)$ comme α est un tenseur, et $V_2fV_1 = V_2(f)V_1 + fV_2V_1$, puisque V_2 est un opérateur différentiel d'ordre 1, etc. On vérifie facilement que $d\alpha$ est antisymétrique: $(d\alpha)(V_1, V_2) = -(d\alpha)(V_2, V_1)$. Finalement on vérifie que cette expression coïncide avec la définition (3.4.1). Pour cela, on prend des vecteurs de base $V_1 = \frac{\partial}{\partial x^i}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x^j}$, et $\alpha = \alpha_j(x)dx^j$. On calcule $[V_1, V_2] = 0$ et donc

$$(d\alpha)(V_1, V_2) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha_j(x)) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha_i(x)).$$

Par ailleurs, $\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(dx^i \wedge dx^j)(V_1, V_2)$, donne le même résultat d'après la relation de dualité. On a vérifié l'équation (3.4.1).

On peut réaliser cela sur les exemples suivants.

Exemple 3.4.4. Avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2) sur \mathbb{R}^2 , on peut expliciter les formules de la dérivée extérieure, et montrer

1. que $d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$ correspond au **gradient**.
2. et que $d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$ correspond au **rotationnel**.

On peut également exprimer ces opérateurs en coordonnées polaires.

Exemple 3.4.5. Avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) sur \mathbb{R}^3 , on peut expliciter les formules de la dérivée extérieure, et montrer que

1. l'opérateur $d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$ correspond au **gradient**,
2. et $d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$ correspond au **rotationnel**.
3. et que $d : C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^3)$ correspond à la **divergence**.

On peut exprimer ces opérateurs en coordonnées sphériques.

Proposition 3.4.6. Pour $f \in C^\infty(\Lambda^p)$ et $g \in C^\infty(\Lambda^q)$, on a la formule

$$d(f \wedge g) = df \wedge g + (-1)^p f \wedge dg \quad (3.4.2)$$

appelée **formule de Leibnitz**

Remarque 3.4.7. La formule de Leibnitz généralise le cas connu de deux fonctions $d(fg) = df.g + f.dg$.

Théorème 3.4.8. L'opérateur d vérifie: pour tout $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$,

$$d(d\omega) = 0$$

Démonstration 3.4.9. On le vérifie dans le cas $p = 0$. Si $f \in C^\infty(\Lambda^0)$, alors $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ et

$$\begin{aligned} d(df) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^1 + \dots \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

utilisant le fait que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \right)$ est symétrique, et $dx^i \wedge dx^j$ antisymétrique en $(i \leftrightarrow j)$.

3.5 Intégration sur les variétés: formule de Stokes

Théorème 3.5.1. Intégrale de Stokes. Si $K \subset M$ est un domaine orienté de dimension p , on note ∂K son bord orienté, et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p-1})$ est à support compact (càd nulle en dehors d'un ensemble compact) alors

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega. \quad (3.5.1)$$

On peut vérifier cela en petites dimensions.

1. Sur \mathbb{R}^2 , $x = (x_1, x_2)$, si $\omega = a(x)dx^1 + b(x)dx^2$ est une 1-forme et $\dim K = 2$, $\dim \partial K = 1$ alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x^1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x^2} \right) (dx^1 \wedge dx^2) \quad (3.5.2)$$

la formule de Stokes donne la formule de **Green-Riemann** (qui permet de faire le lien entre l'intégrale double et l'intégrale curviligne) suivante:

$$\int \int_K \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x^1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \oint_{\partial K} (a(x)dx^1 + b(x)dx^2) \quad (3.5.3)$$

2. Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $f(x)$ est une fonction (0-forme), K est une courbe d'extrémités a, b alors la **formule de Stokes** donne (en notation classique)

$$\int_K \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a).$$

3. Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\alpha(x)$ est une 1-forme, K est une surface alors la formule de Stokes donne (en notation classique)

$$\int \int_K \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\alpha} \cdot d^2 \vec{s} = \oint_{\partial K} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l}.$$

4. Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\beta(x)$ est une 2-forme, K est un volume alors la formule de Stokes donne (en notation classique) **la formule d'Ostrogradski**

$$\int \int \int_K \text{div} \vec{\beta} \cdot d^3 x = \int \int_{\partial K} \vec{\beta} \cdot d^2 \vec{s}$$

Pour la démonstration, on peut se référer à [5] Taylor tome 1. p.70.

On donne quelques exercices résolus pour se familiariser avec l'utilisation de la formule de Stokes.

Exercice 3.5.2. Calculer l'intégrale de la 1-forme différentielle

$$\alpha = (x^2 + 7y)dx + (-x + y \sin y^2)dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$$

sur le cycle défini par les segments orientés allant de $(0, 0)$ à $(1, 0)$, ensuite de $(1, 0)$ à $(0, 2)$ et enfin de $(0, 2)$ à $(0, 0)$.

En effet, on note par C la 2-chaîne avec l'orientation usuelle (celle donnée par le sens inverse d'une montre). Le bord de la 2-chaîne est un triangle. Par la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial C} \alpha = \int_C d\alpha = -8 \int_C dx \wedge dy = -8 \int_0^1 \left(\int_0^{2(1-x)} dy \right) dx = -8.$$

Exercice 3.5.3. Donner la formule de l'aire $A(D)$ de l'intérieur D d'une simple courbe plane fermée orientée positivement définie par

$$[a, b] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

En effet, il suffit d'appliquer la formule de Green-Riemann, en posant $b = x(t)$ et $a = -y(t)$. Ainsi, on obtient

$$A(D) = \int_D dx \wedge dy = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Exercice 3.5.4. Soit C une 2-chaîne dans \mathbb{R}^2 et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\int_{\partial C} \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$$

si f satisfait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

En effet, à l'aide de la formule de Stokes, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) &= \int_C d \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) \\ &= - \int_C \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est nulle si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 3.5.5. Soit donnée une forme différentielle sur \mathbb{R}^3

$$\omega = (z^2 - x^2 - xy)dx \wedge dy - dy \wedge dz - dz \wedge dx,$$

calculer $\int_D i^* \omega$, où i représente l'application d'inclusion de

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0\} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

En effet, on a

$$\int_D i^* \omega = - \int_D (x^2 + xy) dx \wedge dy.$$

En prenant les coordonnées polaire

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho \in (0, 1), \theta \in (0, 2\pi),$$

on a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \rho.$$

Pour $D_0 = D \setminus \{[0, 1] \times \{0\}\}$, on a

$$\begin{aligned} \int_D i^* \omega &= - \int_{D_0} (x^2 + xy) dx \wedge dy = - \int_{D_0} \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \rho d\rho \wedge d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\rho d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3.5.6. Soit $\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

- (i) Prouver que α est fermée.
- (ii) Calculer l'intégrale de α sur le cercle unité S^1 .
- (iii) Comment peut-on voir que ce résultat montre que α n'est pas exact?
- (iv) Soit $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ le plongement canonique. Comment peut-on déduire de (iii) que $j^* \alpha$ n'est pas exact?

En effet,

(i) il est facile de voir que $d\alpha = 0$

(ii) On paramètre S^1 par $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ tel que $\theta \in (0, 2\pi)$. Alors

$$\int_{S^1} \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 + \sin^2) d\theta = 1$$

- (iii) Si α était tel que $\alpha = df$ pour une fonction donnée f , en appliquant la formule de Stokes, on aurait eu

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = 0,$$

ce qui contredit le résultat obtenu en (ii).

- (iv) Supposons que $j^*\alpha$ est exact, i.e, $j^*\alpha = df$. Alors on aurait eu

$$\int_{S^1} j^*\alpha = \int_{j(S^1)} \alpha = \int_{S^1} = 1.$$

D'une part, comme $j^*d = dj^*$, et en notant \emptyset l'ensemble vide, on aurait eu

$$\int_{S^1} j^*\alpha = \int_{S^1} j^*df = \int_{S^1} dj^*f = \int_{\partial S^1} j^*f = \int_{\emptyset} j^*f = 0,$$

mais ceci contredit le calcul précédent.

Exercice 3.5.7. On considère la forme différentielle

$$\alpha = \frac{xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

- (i) Calculer $\int_{S^2} \alpha$
(ii) Comment ce résultat prouve-t-il que α n'est pas exact.

En effet,

- (i) on considère la paramétrisation du cercle S^2 par

$$x = \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \sin \theta,$$

avec $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, qui couvre la surface jusqu'à un ensemble de mesure zero. On a donc $\alpha|_{S^2} = -\cos \theta d\theta \wedge d\varphi$ et

$$\int_{S^2} \alpha = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos \theta d\theta \right) d\varphi = -4\pi.$$

- (ii) Si $\alpha = d\beta$ alors, par la formule de Stokes, on aurait eu

$$\int_{S^2} \alpha = \int_{S^2} d\beta = \int_{\partial S^2} \beta = 0,$$

ce qui contredit le résultat en (ii).

Exercice 3.5.8. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'intégrale

$$I = \int \int_D y^2 dx dy, \quad \text{avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}.$$

En effet, D est l'intérieur de l'ellipse C d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Elle est parcourue dans le sens trigonométrique lorsque t varie de 0 à 2π . Posons $g = 0$ et $f = xy^2$ pour une 2-forme $f(x, y)dx \wedge +g(x, y)dx \wedge dy$. On a donc

$$\begin{aligned} I = \int \int_D y^2 dx dy &= \int \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial D=C} xy^2 dy \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \cos t \sin^2 t \cos t dt, \quad \text{avec } dy = \cos t dt, \sin^2(2t) = 2 \sin t \cos t \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3.6 Connexion affine et dérivée covariante

L'espace tangent $T_p M$ est une approximation de M au point p [3]. Néanmoins une collection $\{T_p M\}_{p \in M}$ des espaces tangents $T_p M$ en tous les points $p \in M$ ne recouvrent pas la variété différentielle M tout entière sans spécifier comment les espaces tangents $T_p M$ et $T_{p+dp} M$ sont liés au cas où p et $p+dp$ sont deux points suffisamment proches. C'est le rôle d'une connexion affine d'établir une application biunivoque entre $T_p M$ et $T_{p+dp} M$, en particulier quand les points p et $p+dp$ sont suffisamment proches. L'espace tout entier M est recouvert à l'aide de cette opération de proche en proche des espaces tangents $T_p M$ à l'aide d'une connexion affine. Ainsi, sur une variété différentielle M une correspondance biunivoque entre deux espaces tangents $T_p M$ et $T_{p+dp} M$ est établie par des quantités ayant trois indices $\Gamma = (\Gamma_{ij}^k)$. Elles sont appelées des coefficients d'une connexion affine. Ici il s'agit d'établir ces quantités et leurs propriétés. Une extension de la dérivée directionnelle du cas euclidien est utilisée pour établir cette correspondance, il s'agit d'une dérivée covariante notée ∇ .

Bref, une connexion affine est un objet géométrique défini sur une variété différentielle qui sert à connecter des espaces tangents voisins et permettant ainsi à des champs de vecteurs tangents d'être dérivés comme si c'étaient des fonctions définies sur la variété et prenant leurs valeurs dans un unique espace vectoriel.

Soient deux espaces tangents T_pM et $T_{p+dp}M$ en deux points suffisamment voisins l'un de l'autre p et $p + dp$. En fixant les bases ∂_i et $\tilde{\partial}_i$ respectivement dans T_pM et $T_{p+dp}M$, on voit que le vecteur tangent $\tilde{\partial}_i$ n'appartient pas dans T_pM . On peut projeter $\tilde{\partial}_i$ sur T_pM et on obtient un vecteur tangent $\partial'_i(p) \in T_pM$ qui est différent de $\partial_i(p)$ selon la formule suivante

$$(\tilde{\partial}_i)(p) \mapsto (\partial'_i)(p) = (\partial_i + d\partial_i)(p). \quad (3.6.1)$$

La différence $d\partial_i$ est un vecteur de T_pM qui s'écrit en composantes comme $d\partial_i = (d\partial_i^j)\partial_j$. Les composantes $d\partial_i^j$ deviennent zéro quand dp tend vers 0. Ainsi ces composantes sont linéaires en dp et on écrit que

$$d\partial_i^j = \Gamma_{ki}^j(p)dp^k \implies d\partial_i = \Gamma_{ki}^j(p)dp^k\partial_j \quad (3.6.2)$$

est son approximation au premier ordre avec Γ_{ki}^j une quantité géométrique ayant trois indices. Une correspondance linéaire entre T_pM et $T_{p+dp}M$ est établie en donnant ces quantités $\Gamma = (\Gamma_{ki}^j)$ appelées coefficients d'une connexion affine. Maintenant en considérant les champs de vecteurs $X = X^i\partial_i$ et $\tilde{X} = X^i\tilde{\partial}_i$ respectivement sur T_pM et $T_{p+dp}M$, la projection du vecteur tangent $X^i(p + dp)\tilde{\partial}_i(p + dp)$ sur l'espace tangent T_pM nous donne, en tenant compte du développement de Taylor au premier ordre de $X^k(p + dp)$ et de (3.6.1), on obtient

$$X^k(p + dp)\tilde{\partial}_k(p + dp) = (X^k(p) + \partial_j X^k dp^j)(p) (\partial_k + d\partial_k)(p). \quad (3.6.3)$$

Le développement du second membre de (3.6.3) au premier degré et grâce à la relation (3.6.2), nous donne

$$\underbrace{X^k(p + dp)\tilde{\partial}_k(p + dp)}_{=\tilde{X}} = \underbrace{X^k(p)\partial_k(p)}_{=X} + (\partial_j X^k \partial_k dp^j)(p) + (X^k \Gamma_{jk}^m dp^j \partial_m)(p). \quad (3.6.4)$$

Ainsi, la variation intrinsèque du vecteur tangent $X(p)$ correspondant à la variation dp suit alors la relation

$$\tilde{X} - X = (\partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j) dp^i \partial_k. \quad (3.6.5)$$

Définition 3.6.1. La variation intrinsèque le long d'une courbe de coordonnée x^i est notée

$$\nabla_{\partial_i} X^k = \partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j. \quad (3.6.6)$$

L'écriture $\nabla_{\partial_i} X^k$ de l'équation (3.6.6) s'appelle dérivée covariante de X et c'est un tenseur.

Définition 3.6.2. Si à la place ∂_i dans la notation (3.6.6) on met $Y = Y^i \partial_i$, on obtient

$$\nabla_Y X^k = Y^i \nabla_{\partial_i} X^k = Y^i (\partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j) \quad (3.6.7)$$

et on l'appelle dérivée covariante de X^k dans la direction de Y .

En particulier, si $X = \partial_i$, i.e, $X^k = 1$ et $Y = \partial_j$, i.e, $Y^i = 1$, l'expression d'une dérivée covariante dans (3.6.7) devient

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (3.6.8)$$

où les Γ_{ij}^k en sont les composantes. En plus, vu que $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ en p est un vecteur tangent, on peut définir les coefficients d'une connexion affine par la formule suivante

$$\Gamma_{ijk} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle. \quad (3.6.9)$$

L'expression (3.6.9) peut être traduite aussi sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle \\ &= \langle \Gamma_{ij}^m \partial_m, \partial_k \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^m \langle \partial_m, \partial_k \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^m g_{mk}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient une formule qui relie les coefficients d'une connexion affine et les composantes d'une dérivée covariante.

Remarques 3.6.3. Une connexion affine est spécifiée par la définition d'une dérivée covariante $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ ou les coefficients Γ_{ijk} . Dans la suite de ce cours (également dans la littérature), une des notations ∇ ou Γ signifie une connexion affine si aucune confusion n'est à préciser.

2. On a toujours les dérivées partielles qui commutent, i.e, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ mais pour les dérivées covariantes, ce n'est pas vrai en général, i.e, $\nabla_{\partial_i} \partial_j \neq \nabla_{\partial_j} \partial_i$.

Définition 3.6.4. Un système de coordonnées affines sur une variété différentielle pour la connexion ∇ est un système de coordonnées (x^i) tel que $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ est parallèle sur M . En d'autres termes, c'est quand $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ ou encore $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Si pour toute courbe γ sur M , un champ de vecteurs X est parallèle le long de γ , alors on dit que X est parallèle sur M .

3.7 Connexion covariante sur un fibré vectoriel

Quand on se déplace sur M , les fibres peuvent:

- rester identiques
- tourner

- se déformer.

L'interprétation clé est que la forme de connexion mesure comment la fibre **tourne** quand on se déplace sur la variété. C'est une mesure infinitésimale de la variation des fibres.

Définition 3.7.1. Une connexion sur un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

telle que

- (i) ∇ est linéaire en X , i.e,

$$\nabla_{fX+Y}s = f\nabla_X s + \nabla_Y s.$$

- (ii) ∇ vérifie la règle de Leibniz en s , i.e,

$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$$

où $X \in \Gamma(TM)$ est un champ de vecteurs, $s \in \Gamma(E)$ est une section et $f \in C^\infty(M)$.

Une connexion sert à comparer des vecteurs situés dans des fibres différentes. L'interprétation géométrique est la suivante:

- dérivation le long des champs de vecteurs
- transport parallèle
- courbure du fibré

La connexion est entièrement déterminée par la dérivation des vecteurs de base:

$$\nabla e_j = \omega_j^i \otimes e_i, \quad \omega_j^i \in \Omega^1(M).$$

La matrice $\omega = (\omega_j^i)$ est une matrice de la forme de connexion

3.7.1 Expression locale de la dérivée covariante

Pour une section $s = s^i e_i$, on a

$$\nabla s = ds + \omega \cdot s, \quad \nabla s = (ds^i + \omega_j^i s^j) \otimes e_i.$$

On interprète cela en disant:

- ds est une variation ordinaire
- ωs est une correction géométrique due à la structure du fibré.

3.7.2 Interprétation géométrique

La forme de connexion décrit:

- comment la base locale du fibré change.
- donc comment la géométrie interne de la fibre évolue.

On a donc deux importants:

- Si $\omega = 0$, alors les fibres ne tournent pas (fibré localement plat)
- Si $\omega \neq 0$ alors les fibres tournent/tordent.

3.7.3 Forme de connexion sur le fibré tangent

Une connexion sur un fibré tangent est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(E), \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

Elle permet de définir:

- la dérivée covariante,
- géodésiques
- la courbure riemannienne.

Les symboles de Christoffel sont vus comme forme de connexion. Dans la carte locale (x^i) , on a

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

La forme de connexion matricielle est

$$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i.$$

Donc la connexion est codée par une matrice de 1-formes.

Exemple 3.7.2. On considère le cas le plus simple du fibré trivial $E = M \times \mathbb{R}$. On prend la base canonique e_1, \dots, e_r . La connexion naturelle (trivial):

$$\nabla e_\alpha = 0, \quad = 0.$$

In interprète en disant que

- Les fibres sont identiques partout

- pas de rotation
- Le transport parallèle consiste à garder les composantes constante.

Exemple 3.7.3. Soit une variété riemannienne (M, g) . La connexion naturelle sur TM est la connexion de Levi-Civita:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Les formes de connexion sont alors

$$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i.$$

L'interprétation géométrique est la suivante:

- Elles décrivent comment les vecteurs tangents tournent sur la variété
- Sur une sphere, par exemple, les vecteurs tournent lorsqu'on se déplace.
- C'est lié aux géodésiques et à la courbure.

3.7.4 Forme de connexion et courbure

A une connexion ω , on associe la courbure:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

L'interprétation profonde est la suivante:

- ω : rotation infinitésimales des fibres
- Ω : défaut de transport parallèle indépendant du chemin.

3.7.5 Exemples de calcul de forme de connexion

1. Soit $M = \mathbb{R}^2$ avec coordonnées (x, y) et la connexion usuelle (connexion plate) sur le fibré tangent TM . Calculer les formes de connexion ω_j^i dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

En effet, dans \mathbb{R}^2 avec la connexion usuelle, on a (facile à calculer)

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0, \quad \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Or les formes de connexion sont

$$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i.$$

Donc on a $\omega_j^k = 0$ et la matrice de la forme de connexion est

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On interprète en disant que

- L'espace euclidien est plat
- Les vecteurs tangents ne tournent pas
- Courbure est nulle

2. Soit $M = \mathbb{R}^2$ et le fibré vectoriel trivial $E = M \times \mathbb{R}^2$. On définit une connexion ∇ sur E par $\nabla_X s = X(s)$.

- (i) Montrer que ∇ est une connexion sur E .
- (ii) Calculer ∇e_1 et ∇e_2 .
- (iii) Déterminer la forme de connexion ω dans la base (e_1, e_2) .
- (iv) Interpréter géométriquement le résultat.

En effet, une connexion doit vérifier la règle de Leibnitz:

$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s.$$

En effet, sait que

$$X(fs) = X(f)s + fX(s), \quad \text{et donc} \quad \nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s.$$

Donc ∇ satisfait la règle de Leibniz. C'est bien une connexion sur le fibré E .

Le calcul de ∇e_1 et ∇e_2 se fait comme suit. Les vecteurs de base de e_1 et e_2 sont constants sur $M = \mathbb{R}^2$. Autrement dit, ce sont des sections constantes du fibré trivial. Donc pour tout champ de vecteurs X :

$$X(e_1) = 0, \quad X(e_2) = 0.$$

Par définition de la connexion:

$$\nabla_X e_1 = X(e_1) = 0, \quad \nabla_X e_2 = X(e_2) = 0.$$

Ainsi, $\nabla e_1 = 0$, $\nabla e_2 = 0$.

Le calcul de la forme de connexion ω dans la base (e_α) . On sait que la forme de connexion est donnée par $\nabla e_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes e_\beta$. Ici le calcul donne

$$\nabla e_1 = 0 = 0 \cdot e_1 + 0 e_2, \quad \nabla e_2 = 0 = 0 \cdot e_1 + 0 e_2.$$

Donc toutes les 1-formes de connexion sont nulles: $\omega_\alpha^\beta = 0$. La matrice de la forme de connexion est

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat $\omega = 0$ nulle signifie:

- la base (e_1, e_2) ne dépend pas du point
- les fibres ne tournent pas quand on se déplace sur M .
- le transport parallèle conserve exactement les composantes du vecteur.

Bref, le fibré est géométriquement plat et la connexion est plate.

3. Soit $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On travaille avec le fibré tangent TM et la connexion de Levi-Civita associée à la métrique euclidienne $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$. On considère la base locale du fibré tangent;

$$e_1 = \partial_r, \quad e_2 = \partial_\theta.$$

- (i) Calculer les symboles de Christoffel Γ_{ii}^k de la métrique.
 - (ii) Calculer ∇e_1 et ∇e_2 .
 - (iii) Déterminer les formes de connexion ω_j^i .
 - (iv) Interpréter géométriquement pourquoi la forme de connexion est non nulle alors que l'espace est plat.
- (a) La métrique est

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = 0.$$

On utilise la formule générale:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

On remarque que

$$\partial_r g_{\theta\theta} = 2r, \quad \partial_\theta g_{\theta\theta} = 0.$$

Après calcul (classique en coordonnées polaire):

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}.$$

- (b) Le calcul de ∇e_1 et ∇e_2 se fait comme suit. On rappelle d'abord que $e_1 = \partial_r$ et $e_2 = \partial_\theta$. Par définition,

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Donc les dérivées de ∂_r sont

$$\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta} \partial_r = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

et les dérivées de ∂_θ sont

$$\nabla_{\partial_r} \partial_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta, \quad \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = -r \partial_r.$$

Ainsi, la base $(\partial_r, \partial_\theta)$ varie avec le point.

- (c) Maintenant on fait le calcul des formes de connexions ω_j^i . Par définition

$$\nabla e_j = \omega_j^i \otimes e_i.$$

Pour $e_1 = \partial_r$, on a

$$\nabla_{\partial_r} e_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta} e_1 = \frac{1}{r} e_2.$$

Donc la 1-forme associée est

$$\omega_1^2 = \frac{1}{r} d\theta, \quad \omega_1^1 = 0.$$

Pour $e_2 = \partial_\theta$, on a

$$\nabla_{\partial_r} e_2 = \frac{1}{r} e_2, \quad \nabla_{\partial_\theta} e_2 = -r e_1.$$

Donc la 1-forme associée est

$$\omega_2^2 = \frac{1}{r} dr, \quad \omega_2^1 = -r d\theta.$$

La matrice de la forme de connexion est donc

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -r d\theta \\ \frac{1}{r} d\theta & \frac{1}{r} dr \end{pmatrix}$$

Elle est clairement non nulle.

4. On donne l'interprétation géométrique. La forme de connexion est non nulle alors que l'espace euclidien est plat. On explique pourquoi:
 - L'espace \mathbb{R}^2 est plat (courbure nulle).
 - Mais la base $(\partial_r, \partial_\theta)$ n'est pas constante.
 - Elle tourne quand on change de point (surtout avec l'angle θ).
5. On termine sur un exemple de la forme de connexion sur la sphere S^2 .

3.8 Transport parallèle et géodésique

Une courbe $\theta(t)$ est appelée géodésique quand sa direction ne change pas. C'est une généralisation d'une droite (ligne droite). Ici le changement de la direction est mesuré par la dérivée covariante émanant d'une connexion affine. Ceci n'a rien à voir avec la définition littérale qui définit une géodésique comme une courbe minimale joignant deux points. La minimalité et la droiture peuvent être différentes en générale sur une variété différentielle [6].

Si $\theta(t)$ est une géodésique sur une variété différentielle M et si on note $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ alors le vecteur tangent $\dot{\theta}(t+dt)$ de $T_{\theta(t+dt)}M$ correspond à $\dot{\theta}(t)$ de $T_{\theta(t)}M$ par la connexion affine. Puisque le changement de la direction tangente d'une courbe est mesurée par la dérivée covariante de $\dot{\theta}(t)$ le long de lui-même, l'équation d'une géodésique est

$$\nabla_{\dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t) = 0.$$

Proposition 3.8.1. En composantes, l'équation d'une géodésique est donnée par

$$\ddot{\theta}(t) + \Gamma_{jk}^i \dot{\theta}^j(t) \dot{\theta}^k(t) = 0. \quad (3.8.1)$$

Démonstration 3.8.2. On pose $\theta(t) = (\theta^1(t), \dots, \theta^n(t))$ et $\dot{\theta}(t) = \sum_i^n \frac{d\theta^i}{dt} \partial_{\theta^i} = \sum_i^n \dot{\theta}^i \partial_{\theta^i}$. On calcule que

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\theta}} \dot{\theta} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d\dot{\theta}^j(t)}{dt} \partial_{\theta^j} + \sum_{i=1}^n \dot{\theta}^i(t) \nabla_{\sum_i^n \dot{\theta}^i \partial_{\theta^i}} \partial_{\theta^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d\dot{\theta}^j(t)}{dt} \partial_{\theta^j} + \sum_{i=1}^n \dot{\theta}^j(t) \dot{\theta}^i(t) \nabla_{\partial_{\theta^i}} \partial_{\theta^j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\ddot{\theta}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{\theta}^j(t) \dot{\theta}^i(t) \Gamma_{ij}^k \right) \partial_{\theta^k}. \end{aligned}$$

Si $\theta(t)$ est une géodésique alors l'invariance de la direction signifie que $\nabla_{\dot{\theta}(t)}\dot{\theta}(t) = 0$, c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^n \left(\ddot{\theta}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{\theta}^j(t) \dot{\theta}^i(t) \Gamma_{ij}^k \right) = 0.$$

Nous pouvons effectuer un transport d'un vecteur tangent $X(\theta + d\theta) \in T_{\theta+d\theta}M$ à un vecteur $X(\theta) \in T_{\theta}M$ sans pouvoir le changer intrinsèquement. On parle de **transport parallèle**. C'est la connexion affine qui détermine ce transport parallèle. Pour deux points $\theta+d\theta$ et θ distincts, nous pouvons continuer ce processus de transport parallèle d'un vecteur tangent le long d'une courbe $\theta(t)$ qui joint les points θ' et θ . Si sa dérivée covariante le long de la courbe s'annule, c'est-à-dire $\nabla_{\dot{\theta}}X(t) = 0$, alors $X(t)$ est intrinsèquement le même en tout point de la courbe $\theta(t)$. En composantes, on écrit cette dérivée covariante suivant la formule (3.8.1), c'est-à-dire

$$\dot{X}^i(t) + \Gamma_{jk}^i X^k \dot{\theta}^j(t) = 0. \quad (3.8.2)$$

Si $X(t)$ satisfait l'équation (3.8.2) ou $\nabla_{\dot{\theta}}X(t) = 0$, alors on dit que $X(0) \in T_{\theta(0)}M$ est transporté parallèlement en $X(1)$ de $T_{\theta(1)}M$.

3.9 Courbure et torsion d'une connexion affine

Les principaux invariants d'une connexion affine sont la courbure et la torsion. Le transport parallèle dépend en général du chemin le long duquel le vecteur est transporté. Ceci n'est pas le cas pour une variété dite plate. Dans l'ordre de montrer comment une variété est courbe, nous définissons le tenseur de courbure est déterminé à partir d'une connexion affine. Si la courbure est nulle, c'est-à-dire, si elle est identiquement nulle, cela signifie que la variété est plate. Inversement, si elle est plate, alors il existe un système de coordonnées affines (x^i) , tel qu'une courbe est une géodésique et son vecteur tangent coïncide en tout point par transport parallèle.

Définition 3.9.1. Le tenseur de courbure est défini par

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l, \quad \text{avec } R_{ijk}^l = \partial_l \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m.$$

Nous obtenons ainsi une formule reliant la dérivée covariante et le tenseur de courbure

$$(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i}) X = R_{ijk}^l X^k \partial_l.$$

La courbure montre à quel point la dérivée covariante est non commutative. En général, on définit la courbure par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

avec $[X, Y] = XY - YX = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \partial_i$ le crochet de Lie de X et Y .

De façon similaire, si (M, g) est une variété Riemannienne, si on a les champs de vecteurs $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, alors on définit

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(Z, W)Y, X).$$

On donne un exemple de calcul. On considère sur \mathbb{R}^3 la métrique

$$g = e^{2z} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Calculer $R(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})$, avec R un tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

En effet, on a

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{pmatrix}.$$

En prenant $x = x^1, y = x^2, z = x^3$, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

Donc, on a

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0.$$

Définition 3.9.2. On appelle tenseur de torsion T d'une connexion affine, l'expression T définie par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \text{pour tous } X, Y \in \Gamma(TM).$$

Une connexion est dite sans torsion si la torsion correspondante est nulle, i.e, si $T(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

En particulier, si $X = \partial_i, Y = \partial_j$ et puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$, alors on a:

$$T(\partial_i, \partial_j) = \sum_k T_{ij}^k \partial_k, \quad \text{avec } T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

De cette définition, on en tire les remarques suivantes

- (i) si une connexion est plate, alors on a $T = R = 0$.
- (ii) Si $T = 0$, ce qui donne $T_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$ alors nous obtenons $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ et on parle d'une connexion symétrique.

On donne un exemple de calcul ci-dessous.

On considère la connexion linéaire sur le demi-plan $y > 0$ de \mathbb{R}^2 définie par les composantes $\Gamma_{jk}^i = 0$, à l'exception de $\Gamma_{12}^1 = 1$, par rapport au repère $(e_1 = \partial/\partial x, e_2 = \partial/\partial y)$. On considère le repère

$$\left(\bar{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \bar{e}_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

On calcule les composantes de la connexion et celles du tenseur de torsion dans ce repère.

En effet, on a $\nabla_{\bar{e}_j} \bar{e}_i = \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{e}_k$ et

$$\nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_1 = \nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 = \nabla_{e_1} (xe_1 + ye_2) = (1+y)e_1 = (1+y)\bar{e}_1.$$

$$\nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_1 = \nabla_{xe_1 + ye_2} e_1 = 0, \quad \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 = \nabla_{xe_1 + ye_2} (xe_1 + ye_2) = (1+y)e_1 = xy\bar{e}_1 + \bar{e}_2.$$

Les composantes non nulles de ∇ par rapport au repère (\bar{e}_1, \bar{e}_2) sont

$$\bar{\Gamma}_{12}^1 = 1+y, \quad \bar{\Gamma}_{22}^1 = xy, \quad \bar{\Gamma}_{22}^2 = 1,$$

et la seule composante non nulle du tenseur de torsion est $\bar{T}_{12}^1 = 0$.

3.10 Tenseurs de Courbure et de Ricci

Définition 3.10.1. On définit les composantes du tenseur de courbure par

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \sum_r (\Gamma_{lj}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^i)$$

Définition 3.10.2. Dans un système de coordonnées (θ) , les composantes des Christoffel du tenseur de courbure de Riemann R_{ijkl} sont définis par [3]

$$R_{ijkl} = \sum_h g_{ih} R_{jkl}^h = \sum_h g_{ih} \left(\frac{\partial \Gamma_{lj}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial x^l} + \sum_r (\Gamma_{lj}^r \Gamma_{kr}^h - \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^h) \right), \quad i, j, k, l, h = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10.1)$$

Les courbures de Ricci et les courbures sectionnelles servent à caractériser la courbure d'une connexion affine. On donne ici leurs définitions.

Définition 3.10.3. Les composantes du tenseur de courbure de Ricci \mathbf{r}_{ik} est défini par

$$\mathbf{r}_{ik} = \sum_k R_{ikj}^k = \sum_{k,l} g^{kl} R_{ikjl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Définition 3.10.4. Les courbures sectionnelles K_{ijij} sont définis par

$$K_{ijij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

En particulier, si $n = 2$, alors la courbure sectionnelle $K_{1212} = K$ est appelée courbure de Gauss et est donnée par

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(\mathbf{g}_{ij})}.$$

Définition 3.10.5. On définit la courbure scalaire \mathbf{s} par

$$\mathbf{s} = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{kl} R_{ikjl} = \sum_{i,j} g^{ij} \mathbf{r}_{ij}.$$

3.11 Connexion de Levi-Civita

Il existe une connexion sans torsion appelée connexion de Levi-Civita. C'est une connexion affine telle qu'elle soit liée essentiellement à la métrique. Cela montre que le module d'un vecteur ne change pas lors d'un transport parallèle. Cela établit une relation entre une métrique et une connexion affine donnée dans la proposition suivante [7].

Définition 3.11.1. Une connexion ∇ est dite compatible avec la métrique g sur une variété différentielle M si

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \text{pour tous } X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

On va démontrer cette compatibilité dans le cas particulier de $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ et $Z = \partial_k$.

Proposition 3.11.2. La condition de compatibilité entre la métrique et la connexion affine est donnée par

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}.$$

Démonstration 3.11.3. Si la longueur d'un vecteur ne change pas, alors on a d'une part

$$g_{ij}(\theta + d\theta) = \langle \partial_i(\theta + d\theta), \partial_j(\theta + d\theta) \rangle.$$

En utilisant la relation (3.6.3), on obtient

$$g_{ij}(\theta + d\theta) = \langle \partial_i(\theta) + d\partial_i, \partial_j(\theta) + d\partial_j \rangle_\theta$$

ou encore

$$g_{ij}(\theta + d\theta) = \langle \partial_i(\theta) + \nabla_{\partial_k} \partial_i d\theta^k, \partial_j(\theta) + \nabla_{\partial_k} \partial_j d\theta^k \rangle_{\theta}. \quad (3.11.1)$$

D'autre part, le développement de Taylor au premier degré de $g_{ij}(\theta + d\theta)$ nous donne

$$g_{ij}(\theta + d\theta) = g_{ij}(\theta) + \partial_k g_{ij} d\theta^k. \quad (3.11.2)$$

En identifiant terme à terme le développement du second membre de l'expression (3.11.1) et les termes du second membre de (3.11.2), on obtient la condition annoncée.

On donne la formule qui relie la métrique et la connexion de Levi-Civita.

Théorème 3.11.4. (Formule de Koszul pour la connexion de Levi-Civita) La seule connexion métrique sans torsion ∇ sur la variété Riemannienne (M, g) est donnée par

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y). \quad (3.11.3)$$

Définition 3.11.5. Une connexion affine satisfaisant la condition de compatibilité (3.11.2) est appelée connexion métrique.

Une connexion affine métrique est uniquement déterminée à partir de la métrique g_{ij} , permettant que la condition de symétrie $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ soit satisfaite.

Théorème 3.11.6. Quand le transport parallèle ne change pas le module du vecteur, il existe une unique connexion affine symétrique donnée par

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad \text{ou} \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Démonstration 3.11.7. On sait par définition que l'on a

$$\Gamma_{ijk} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle.$$

Si dans la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(L_X Z, Y) - g(L_Y Z, X) + g(L_Z X, Y) \\ &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - \underbrace{g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)}_0 \end{aligned}$$

on remplace X par ∂_i , Y par ∂_j et Z par ∂_k , on obtient que

$$2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_i, \partial_k) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j).$$

Ainsi, il est clair que l'on obtient

$$2\Gamma_{ij}^l g(\partial_l, \partial_k) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$$

ou encore

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Puisque $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^l g_{lk}$, les deux résultats du théorème s'en suivent.

Définition 3.11.8. La connexion affine métrique symétrique (à la fois métrique et symétrique) est appelée connexion de Levi-Civita ou connexion Riemannienne.

En utilisant la connexion de Levi-Civita, on trouve qu'une géodésique correspond exactement au plus court chemin joignant deux points. Ainsi, si on a une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, alors le plus court chemin se calcule par la formule suivante

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} dt.$$

On donne un exemple de calcul.

On considère le groupe de Heisenberg H équipé de la métrique invariant à gauche

$$g = dx^2 + (dy - xdz)^2 + dz^2.$$

Trouver la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure Riemann-Christoffel, le tenseur de Ricci et le tenseur scalaire de (H, g) :

En fonction des coordonnées du repère

$$\left(Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(en utilisant le calcul direct).

En effet, les matrices de g et son inverse g^{-1} sont données en termes des coordonnées du repère respectivement par

$$(g_{il}) = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (g^{il}) = g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Partant de ces expressions, les symboles de Christoffel non nuls sont données par la formule

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

et le calcul montre que l'on a

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = -\Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{2}x$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = -\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad \Gamma_{33}^1 = -x.$$

Les composantes non nulles du tenseur de courbure sont données par la formule

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \sum_r (\Gamma_{lj}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^i)$$

et le calcul donne

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = -R_{112}^2 = R_{121}^2 = -R_{223}^3 = R_{232}^3 = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} R_{213}^1 &= -R_{231}^1 = R_{312}^1 = -R_{321}^1 = R_{223}^1 = R_{232}^1 = R_{223}^2 = -R_{232}^2, \\ &= -R_{323}^1 = -R_{332}^3 = -\frac{1}{4}x, \end{aligned}$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = \frac{1}{4}(x - 3), \quad R_{113}^2 = -R_{131}^2 = x,$$

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 1), \quad R_{113}^3 = -R_{131}^3 = \frac{3}{4}.$$

Les composantes non nulles du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel sont données par la formule

$$R_{ijkl} = \sum_h g_{ih} R_{jkl}^h$$

et le calcul montre qu'on trouve

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121} = R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} = \frac{1}{4}$$

$$R_{1213} = -R_{1231} = R_{1312} = -R_{1321} = R_{1223} = R_{1232} = -R_{2113} = R_{2131} = -\frac{1}{4}x,$$

$$R_{1313} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{3131} = \frac{1}{4}(x^2 - 3).$$

A l'aide des formules soit du tenseur de courbure ou du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, on obtient les composantes non nulles du tenseur de Ricci

$$\mathbf{r}_{ij} = \sum_k R_{ikj}^k = \sum_{k,l} g^{kl} R_{ikjl}$$

et on obtient

$$\mathbf{r}_{11} = -\mathbf{r}_{22} = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{r}_{23} = -\mathbf{r}_{32} = -\frac{1}{2}x, \quad \mathbf{r}_{33} = \frac{1}{2}(x^2 - 1),$$

et la courbure scalaire donnée par la formule

$$\mathbf{s} = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{kl} R_{ikjl} = \sum_{i,j} g^{ij} \mathbf{r}_{ij}$$

est donc égale

$$\mathbf{s} = -\frac{1}{2}.$$

3.12 Exercices corrigés

Exercice 3.12.1. On considère sur \mathbb{R}^3 la métrique

$$g = (1 + x^2)dx^2 + dy^2 + e^z dz^2.$$

- Calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g .
- Écrire et résoudre les équations différentielles des géodésiques.
- Considérons la courbe $\gamma(t)$ avec les équations $x = t$, $y = t$, $z = t$. Chercher le transport parallèle du vecteur $(a, b, c)_{(0,0,0)}$ le long de γ .
- La courbe γ est-elle une géodésique?
- Calculer deux champs de vecteurs parallèles sur γ , $X(t)$ et $Y(t)$, tels que $g(X(t), Y(t))$ est constant.

Solution:

- a) On a la matrice

$$(g_{ij}) = g = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+x^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} \end{pmatrix}.$$

En prenant $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{x}{1+x^2}, \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}. \quad (3.12.1)$$

b) Les equations différentielles des géodésiques sont, par (3.12.1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{1+x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0$$

Les solutions de ces equations sont:

- pour la première, on peut l'écrire

$$\frac{x''}{x'} + \frac{xx'}{1+x^2} = 0, \quad \text{avec } \frac{dx}{dt} = x'.$$

Ainsi, $\log x' + \frac{1}{2} \log(1+x^2) = \log A$, ou d'une façon équivalente $x' = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$. On a donc $\sqrt{1+x^2}dx = A dt$ et

$$\int A dt = At + B = \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right).$$

- pour la seconde équation, on a $y = Ct + D$.

- pour la troisième équation, on pose $p = \frac{dz}{dt}$. Donc, on obtient $\frac{dp}{dt} + \frac{p^2}{2} = 0$ a partir de laquelle on a $\frac{1}{p} = \frac{t}{2} + \frac{E}{2}$. Donc $\frac{2}{t+E} = \frac{dz}{dt}$, et on a

$$z = 2 \log(t + E) + 2 \log F = \log(Ft + G)^2.$$

c) Les équations du transport parallèle du vecteur $X = (a^1, a^2, a^3)$ le long d'une courbe γ sont $\nabla_{\gamma'} X = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{da^i}{dt} + \sum_{j,h} \Gamma_{jh}^i \frac{dx^j}{dt} a^h = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dans ce cas, on obtient les équations

$$\frac{da^1}{dt} + \frac{x}{1+x^2} \frac{dx}{dt} a^1 = 0, \quad \frac{da^2}{dt} = 0, \quad \frac{da^3}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dz}{dt} a^3 = 0 \quad (3.12.2)$$

le long de la courbe $x = t$, $y = t$, $z = t$, ce qui dit que les equations précédentes (3.12.2) deviennent

$$\frac{da^1}{dt} + \frac{x}{1+x^2} a^1 = 0, \quad \frac{da^2}{dt} = 0, \quad \frac{da^3}{dt} + \frac{1}{2} a^3 = 0. \quad (3.12.3)$$

En intégrant ces équations, on obtient - pour la première equation, $\log a^1 = -\frac{1}{2} \log(1+t^2) + \log A$, donc on a $a^1 = \frac{A}{\sqrt{1+t^2}}$ avec $a^1(0) = a$, ce qui donne alors $a^1 = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$

- pour la seconde équation, on a $a^2 = A$ avec $a^2(0) = A$ et donc $a^2 = b$.

- pour la troisième équation, on a $a^3 = Ae^{-\frac{t}{2}}$, avec $a^3(0) = c = A$, ce qui donne $a^3 = ce^{-\frac{t}{2}}$.

Ainsi, le champ de vecteur obtenu par transport parallèle à partir de $(a, b, c)_{(0,0,0)}$ est

$$(a^1(t), a^2(t), a^3(t)) = \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, b, ce^{-\frac{t}{2}} \right).$$

d) La courbe doit vérifier les équations des géodésiques obtenues en b). Puisque $x(t) = t$, $y(t) = t$, $z(t) = t$, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{1+x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{t}{1+t^2} \neq 0$$

sauf si $t = 0$, donc la courbe n'est pas une géodésique.

e) On sait que le champ de vecteur obtenu en c) par transport parallèle à partir de $(a, b, c)_{(0,0,0)}$ est

$$(a^1(t), a^2(t), a^3(t)) = \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, b, ce^{-\frac{t}{2}} \right).$$

En prenant $X(0) = (1, 0, 0)$, $Y(0) = (0, 1, 0)$, on obtient, sous le transport parallèle, le champ de vecteur

$$X(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 0, 0 \right), \quad Y(t) = (0, 1, 0)$$

qui satisfont l'équation $g(X(t), Y(t)) = 0$.

Exercice 3.12.2. Montrer que les lignes verticales $x = \text{const}$ dans le demi-plan supérieur de Poincaré H^2 sont des géodésiques complètes.

Solution:

Nous avons la variété riemannienne (M, g) avec

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Cela montre que $g_{ij} = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$ et $g^{ij} = y^2 \delta^{ij}$ pour $i, j = 1, 2$. En prenant $x^1 = x$, $x^2 = y$ les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y},$$

donc, les équations différentielles des géodésiques sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0.$$

Supposons que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 1$, ce qui dit que l'on considère la ligne verticale passant par (x_0, y_0) . Les équations précédentes sont satisfaisantes et on a les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Les conditions $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 1$ détermine une unique géodésique. En intégrant, on obtient

$$x = At + B$$

et partant de l'équation $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$, on obtient

$$\log y' = \log y + C$$

ou de façon équivalente,

$$y = e^{Ct+D}.$$

D'après les conditions précédentes, il s'en suit que

$$x = x_0, \quad y = y_0 e^{\frac{t}{y_0}},$$

ce qui prouve que $t \in (-\infty, +\infty)$, ce qui dit que la géodésique donnée est complète.

Chapitre 4

Fibrés principaux

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1.1. Soient P et M deux variétés différentielles et G un groupe de Lie (de dimension finie). On dit que P est un fibré principal si

1. le groupe de Lie G agit librement et transitivement sur P à droite (agit librement et transitivement à droite sur la fibre type $\pi^{-1}(x) \subset P$)
2. on a $M = P/G$ et la projection $\pi : P \rightarrow M$ est différentiable
3. L'espace P est localement trivial, c-à-d que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et $u \in \pi^{-1}(U)$ tel qu'il

$$\exists \psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G : u \mapsto (\pi^{-1}(u), \varphi(u))$$

des difféomorphismes (appelées trivialisations locales) avec $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ satisfaisant la relation

$$\varphi(u.g) = \varphi(u)g, \forall u \in \pi^{-1}(U), \forall g \in G.$$

Le groupe de Lie G (la fibre type) est généralement désigné sous le nom de groupe structural du fibré considéré. On note souvent (P, M, π, G) le fibré principal.

Explicitement,

1. l'action libre et transitive à droite de P signifie qu'on a

$$R_g : P \rightarrow P, u \mapsto u.g$$

telle que

- libre: $u.g = u \implies g = e$ (élément neutre)

- transitive sur les fibres: pour tout $u, u' \in \pi^{-1}(x)$, il existe un unique $g \in G$ tel que $u' = u.g$.

2. Trivialité locale: Il existe un recouvrement ouvert U_i de M tel que

$$\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G$$

Ce qui permet d'introduire des sections locales $s_i : U_i \rightarrow P$ et de définir des fonctions de transition

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G \quad \text{via} \quad s_i(x) = s_j(x)g_{ij}(x).$$

Ces fonctions satisfont les conditions de cocycles

$$g_{ii}(x) = e, \quad g_{ij}(x) = g_{ij}(x)^{-1}, \quad g_{ij}(x)g_{ik}(x) = g_{ik}(x).$$

Proposition 4.1.2. L'application φ est bien définie.

Il suffit de montrer que φ ne dépend pas du choix de u dans la fibre.

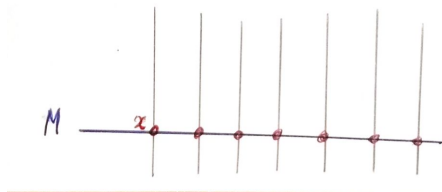
Démonstration 4.1.3. En effet, soit $u \in P$, i.e; $u = (x, g)$ et $g' \in G$, $u.g' = (x, g.g')$.

$$\begin{aligned} (u.g).\varphi(u.g)^{-1} &= u.g(\varphi(u).g)^{-1} \\ &= u.g.g^{-1}\varphi(u)^{-1} \\ &= u.\underbrace{\varphi(u)^{-1}}_{\in G}. \end{aligned}$$

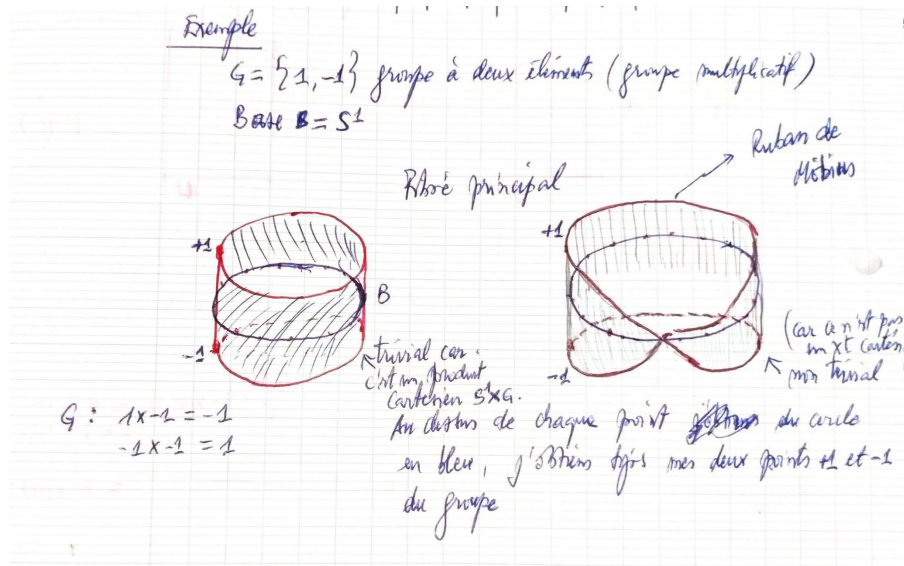
Définition 4.1.4. Soit (P, M, π, G) un fibré principal. On dit que $\sigma : M \rightarrow P$ est une section globale si pour tout $x \in M$, on a $\pi \circ \sigma(x) = x$.

Dans le fibré principal, le choix de trivialisations locales ψ donne un choix naturel de section σ (car dans la définition on ne précise pas les ψ qu'il faut prendre) donc le $\exists \psi$ donne la liberté au lecteur de quel ψ il peut choisir.

Le fait d'écrire $M = P/G$ nous fait penser que M est recouvert des points x qui sont des projections de toutes les fibres. Voir le schéma ci-dessous



Deux exemples simples de fibré principaux.

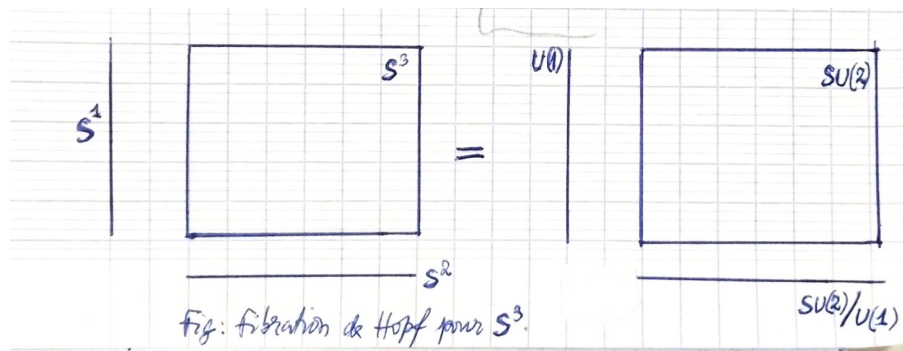


On peut encore voir que les exemples suivants sont simples

1. Le cylindre (du type premier schéma ci dessus) $\mathbb{R} \times S^1$ est un fibré principal de groupe structural S^1 sur la droite \mathbb{R} (fibré principal trivial).
2. Le tore $S^1 \times S^1$ est fibré principal de groupe structural S^1 sur le cercle S^1 (fibré principal trivial).
3. En faisant les identifications suivantes [4] $S^3 \cong SU(2)$, $U(1) \cong S^1$ on a le quotient

$$SU(2)/U(1) \cong S^2.$$

On obtient la fibration de Hopf pour S^3 : un fibré principal non trivial (voir schéma ci dessous.)



Soient $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}$,

$$S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + |t|^2 = 1\}$$

et $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Les sphères S^1 et S^3 sont des groupes de Lie par rapport à la multiplication induite par \mathbb{C} . La sphere $U(1) = S^1$ agit sur S^3 par $(z_1, z_2) \cdot e^{i\theta} = (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta})$ notée formellement par $(z_1, z_2) \cdot \lambda = (z_1 \lambda, z_2 \lambda)$, avec $(z_1, z_2) \in S^3$ et $\lambda \in S^1$. Cette action à droite par multiplication complexe est libre et transitive. On a l'espace total $P = S^3$, la base $M = S^2$ qu'on peut encore identifier à $\mathbb{C}P^1$.

Soit donc $\pi_{\mathbb{C}} : S^3 \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\pi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = (2z_2 \bar{z}_1, |z_1|^2 - |z_2|^2), \quad (z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

L'application induite $\pi_{\mathbb{C}} : S^3 \rightarrow S^2$ est un fibré principal de groupe structural S^1 .

Exercice 4.1.5. En paramétrant S^3 par

$$z_1 = \cos \frac{\theta}{2} e^{\psi_1 i}, \quad z_2 = \sin \frac{\theta}{2} e^{\psi_2 i}, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \psi_1, \psi_2 < 2\pi,$$

- Trouver les expressions de $\pi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)$
- En prenant les voisinages $U_1 = S^2 \setminus \{S\}$ et $U_2 = S^2 \setminus \{N\}$ où S et N sont les pôles sud et nord respectivement, déterminer $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U_k)$; $k = 1, 2$.

- En définissant les trivialisations du fibré $\pi_{\mathbb{C}} : S^3 \rightarrow S^2$ par

$$f_k : \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times U(1)$$

définie par $f_k(z_1, z_2) = (\pi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2), \frac{z_k}{|z_k|})$ avec $k = 1, 2$ et en posant $f_{k,p} = f_k|_{\pi^{-1}(p)}$.
Trouver la fonction de trivialisation

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \rightarrow U(1)$$

du fibré associé à cette trivialisation.

Solution:

Vu qu'un élément de S^2 est du type $(z, t) = (x, y, t)$ avec $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$ et $t \in \mathbb{R}$,

- on a alors que

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) &= (2\operatorname{Re}(z_2 \bar{z}_1), 2\operatorname{Im}(z_2 \bar{z}_1), |z_1|^2 - |z_2|^2) \\ &= (\sin \theta \cos(\psi_2 - \psi_1), \sin \theta \sin(\psi_2 - \psi_1), \cos \theta) \end{aligned}$$

- Partant de la définition trivialisant les voisinages U_k , on voit que

$$\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U_k) = \{(z_1, z_2) \in S^3 : z_k \neq 0, k = 1, 2\}$$

- Soient donnés $p = (\sin \theta \cos \theta, \sin \theta \sin \theta, \cos \theta) \in U_1 \cap U_2$, $e^{\alpha i} \in U(1)$ avec $0 < \alpha < 2\pi$. En tenant compte de la paramétrisation de S^3 et de l'expression de la projection π , on obtient que

$$f_k(z_1, z_2) = (\sin \theta \cos(\psi_2 - \psi_1), \sin \theta \sin(\psi_2 - \psi_1), \cos \theta, e^{\psi_k i}).$$

Donc on obtient

$$f_{1,p}^{-1}(e^{\alpha i}) = \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{\alpha i}, \sin \frac{\theta}{2} e^{(\varphi + \alpha) i} \right).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} (f_{2,p} \circ f_{1,p}^{-1})(e^{\alpha i}) &= f_{2,p}(f_{1,p}^{-1}(e^{\alpha i})) \\ &= f_{2,p} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{\alpha i}, \sin \frac{\theta}{2} e^{(\varphi + \alpha) i} \right) \\ &= \left(\pi_{\mathbb{C}} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{\alpha i}, \sin \frac{\theta}{2} e^{(\varphi + \alpha) i} \right), \frac{\sin \frac{\theta}{2} e^{(\varphi + \alpha) i}}{|\sin \frac{\theta}{2} e^{(\varphi + \alpha) i}|} \right) \end{aligned}$$

Le calcul explicite (en utilisant la formule de $\pi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)$ plus haut) montre que

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbb{C}}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{\alpha i}, \sin\frac{\theta}{2}e^{(\varphi+\alpha)i}\right) &= \left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(\cos\varphi - i\sin\varphi), \cos\theta\right) \\ &= (\sin\theta e^{-\varphi i}, \cos\theta)\end{aligned}$$

De même, le calcul de $\frac{\sin\frac{\theta}{2}e^{(\varphi+\alpha)i}}{|\sin\frac{\theta}{2}e^{(\varphi+\alpha)i}|}$ montre qu'on obtient

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}e^{(\varphi+\alpha)i}}{|\sin\frac{\theta}{2}e^{(\varphi+\alpha)i}|} = e^{(\varphi+\alpha)i}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}(f_{2,p} \circ f_{1,p}^{-1})(e^{\alpha i}) &= (\sin\theta e^{-\varphi i}, \cos\theta, e^{(\varphi+\alpha)i}) \\ &= (\sin\theta e^{-\varphi i}, \cos\theta, g_{21}(p).v), \quad \text{où } v = e^{\alpha i} \in U(1).\end{aligned}$$

C'est-à-dire, la fonction de transition pour cette trivialisations est donc

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \rightarrow U(1) : (\sin\theta \cos\theta, \sin\theta \sin\theta, \cos\theta) \mapsto e^{\varphi i}.$$

4.2 Exemple fondamental: Fibré des repères linéaires (Frame bundle)

On commence à remarquer les analogies suivantes.

- L'espace total P est un ensemble des repères généralisés sur la base M
- Un élément $u \in P$ est un repère linéaire situé au point $x \in M$ avec $x = \pi(u)$.
- Une section locale $\sigma(x)$ est un repère mobile (généralisé) dans l'ouvert U .
- Les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions qui décrivent les changements de repères mobiles.

Soit M une variété différentielle de dimension n . En chaque point $x \in M$, nous avons un espace tangent $T_x M$. Pour tout $x \in M$, notons $F_x M$ l'ensemble des repères linéaires en x . Un repère linéaire d'une variété en un point $x \in M$ étant une base (e_1, \dots, e_n) de $T_x M$. L'ensemble

$$FM = \bigcup_{x \in M} F_x M$$

est le fibré principal sur M de groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$ qui s'appelle **fibré des repères linéaires (Frame bundle)**. En effet, $GL_n(\mathbb{R})$ agit librement à droite sur FM : si $A = (X_i^j) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(e_1, \dots, e_n) \in F_x M$, on pose

$$(e_1, \dots, e_n) = \left(\sum_{i=1}^n X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \sum_{i=1}^n X_n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \in F_x M.$$

Cette action est évidemment libre, i.e; si $(e_1, \dots, e_n).A = (e_1, \dots, e_n)$ alors on a $A = Id$. Si (U, φ) est une carte locale de M avec les coordonnées locales $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ alors les coordonnées locales d'un repère (e_1, \dots, e_n) dans $F_U M$ sont les n^2 coefficients $X_i^j = X_i^j(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}$ des vecteurs tangents.

Explicitement, on a que les $X_i^j(u)$ sont les coordonnées de $\{e_j\}$ dans la base $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_q\}$, c-à-d

$$(e_1, \dots, e_n) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_q \right) \begin{pmatrix} X_1^1(u) & \dots & X_n^1(u) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_1^n(u) & \dots & X_n^n(u) \end{pmatrix}$$

soit donc en notation simplifiée

$$e_i = \sum_{j=1}^n X_i^j(x^1, \dots, x^n) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x.$$

Tout élément $A \in GL_n(\mathbb{R})$ définit un nouveau repère (f_1, \dots, f_n) au même point mais réciproquement, tout repère détermine un et un seul élément A de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n).A.$$

On obtient donc une correspondance biunivoque entre les repères en x et les éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, bien entendu cette correspondance dépend du choix du repère de référence.

4.3 Transformations de Jauge

Nous décrivons ici les transformations de P dans P du type $P \rightarrow P : u \mapsto u' = u.g$ avec $g \in G$. Les physiciens les désignent sous le nom de **transformations de Jauge globales** et désignent G lui-même sous le nom de **groupe de Jauge**.

Si $\tilde{\sigma}$ est une autre trivialisation (i.e. un autre choix de Jauge) du fibré $F \rightarrow U$, avec $U \subset M$, on écrit

$$\tilde{\sigma}(x) = T(x)\sigma(x), \quad x \in U, \quad T(x) \in GL(F_x) \quad (4.3.1)$$

où $T(x) \in GL(F_x)$ est une application linéaire inversible de F_x , i.e. une matrice $r \times r$ inversible qui transforme la base $\sigma(x)$ en la base $\tilde{\sigma}(x)$.

On dit que Eq.(4.3.1) est **une transformation de Jauge** et $T(x) \in GL(F_x)$ dépend de $x \in U$ de façon C^∞ .

Noter que si le fibré F est hermitien et que les bases $\tilde{\sigma}, \sigma$ sont orthonormées, alors $T(x) \in U(r)$ est une transformation unitaire (ou $T(x) \in O(r)$ orthogonale dans le cas d'un fibré réel). Si de plus le fibré est de rang $r = 1$, alors

$$T(x) = e^{i\varphi(x)}, \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}.$$

est un nombre de module 1, caractérisé par une phase $\varphi(x)$.

4.4 Morphismes entre fibrés principaux

Définition 4.4.1. Soient

$$\pi : E \rightarrow M, \quad \pi' : E' \rightarrow M'$$

deux fibrés principaux de groupes structuraux respectifs G et G' .

Un **morphisme de fibrés principaux** est la donnée :

- d'une application différentiable

$$\phi : E \rightarrow E',$$

- d'un homomorphisme de groupes

$$\gamma : G \rightarrow G',$$

tels que

$$\phi(u.g) = \phi(u).\gamma(g), \quad u \in E, g \in G.$$

On dit alors que ϕ est γ -**équivariante**.

Interprétation géométrique

La condition

$$\phi(u.g) = \phi(u).\gamma(g)$$

signifie que ϕ respecte l'action des groupes structuraux.

Autrement dit :

- agir d'abord par g puis appliquer ϕ ,
- ou appliquer ϕ puis agir par $\gamma(g)$,

donne le même résultat.

Ainsi, le morphisme préserve la structure principale du fibré.

Exemple simple

Considérons le fibré principal trivial

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times SO(2) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

où l'action de $SO(2)$ est donnée par

$$(x, A) \cdot B = (x, AB).$$

Définissons

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times SO(2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times SO(2)$$

par

$$\phi(x, A) = (x, A^2).$$

Prenons

$$\gamma : SO(2) \rightarrow SO(2), \quad \gamma(B) = B^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi((x, A) \cdot B) &= \phi(x, AB) \\ &= (x, (AB)^2) \\ &= (x, A^2 B^2) \\ &= (x, A^2) \cdot B^2 \\ &= \phi(x, A) \cdot \gamma(B). \end{aligned}$$

Donc ϕ est un morphisme de fibrés principaux.

Proposition 4.4.2. Soient

$$\pi_1 : E_1 \rightarrow M, \quad \pi_2 : E_2 \rightarrow M$$

deux fibrés principaux de même base et de même groupe structural G .

Si

$$f : E_1 \rightarrow E_2$$

est un morphisme de fibrés principaux, alors f est un isomorphisme.

Démonstration 4.4.3. Comme les bases sont les mêmes, on a

$$\pi_2 \circ f = \pi_1.$$

Fixons un point $x \in M$ et considérons la restriction

$$f_x : \pi_1^{-1}(x) \rightarrow \pi_2^{-1}(x).$$

Nous allons montrer que f_x est bijective.

(i) Injectivité

Supposons que

$$f_x(e) = f_x(e').$$

Comme l'action de G est transitive sur chaque fibre, il existe $g \in G$ tel que

$$e' = e.g.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(e') &= f(e.g) \\ &= f(e).g \end{aligned}$$

par équivariance.

Mais

$$f(e') = f(e),$$

donc

$$f(e).g = f(e).$$

Or l'action de G sur les fibres est libre, donc

$$g = e_G$$

(élément neutre de G).

Ainsi

$$e' = e.g = e.$$

Donc f_x est injective.

(ii) Surjectivité

Soit

$$y \in \pi_2^{-1}(x).$$

Prenons un point arbitraire

$$z \in \pi_1^{-1}(x).$$

Alors

$$f(z) \in \pi_2^{-1}(x).$$

Comme l'action de G est transitive sur la fibre $\pi_2^{-1}(x)$, il existe $g \in G$ tel que

$$f(z).g = y.$$

Par équivariance :

$$f(z.g) = f(z).g = y.$$

Posons

$$y' = z.g.$$

Alors

$$f(y') = y.$$

Donc f_x est surjective.

Ainsi f_x est bijective pour tout $x \in M$.

On peut donc définir

$$g : E_2 \rightarrow E_1$$

par

$$g(y) = f_x^{-1}(y), \quad y \in \pi_2^{-1}(x).$$

Cette application est l'inverse de f , donc f est un isomorphisme.

Exemple : automorphisme d'un fibré trivial

Considérons le fibré trivial

$$E = M \times G.$$

Définissons

$$f : M \times G \rightarrow M \times G$$

par

$$f(x, g) = (x, a(x)g),$$

où

$$a : M \rightarrow G$$

est une application lisse.

Alors

$$\begin{aligned} f((x, g)h) &= f(x, gh) \\ &= (x, a(x)gh) \\ &= (x, a(x)g)h \\ &= f(x, g)h. \end{aligned}$$

Donc f est un morphisme de fibrés principaux.

Son inverse est

$$f^{-1}(x, g) = (x, a(x)^{-1}g).$$

Ainsi f est un automorphisme du fibré principal trivial.

Proposition 4.4.4. Si

$$\phi : E_1 \rightarrow E_2$$

est un morphisme de fibrés principaux, alors il existe une unique application différentiable

$$\varphi : M \rightarrow M'$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\phi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\pi_2 \circ \phi = \varphi \circ \pi_1.$$

Démonstration 4.4.5. Soit $u \in E_1$ et posons

$$x = \pi_1(u).$$

Nous voulons définir

$$\varphi(x) = \pi_2(\phi(u)).$$

Il faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de u dans la fibre au-dessus de x .

Supposons donc que

$$u, v \in \pi_1^{-1}(x).$$

Comme u et v appartiennent à la même fibre, il existe $g \in G$ tel que

$$v = u.g.$$

Alors

$$\begin{aligned} \pi_2(\phi(v)) &= \pi_2(\phi(u.g)) \\ &= \pi_2(\phi(u).\gamma(g)). \end{aligned}$$

Or l'action du groupe structural ne change pas la projection sur la base :

$$\pi_2(y.g') = \pi_2(y).$$

Donc

$$\pi_2(\phi(v)) = \pi_2(\phi(u)).$$

Ainsi la définition de φ est indépendante du choix du représentant dans la fibre. Nous obtenons donc une application bien définie

$$\varphi : M \rightarrow M'$$

satisfaisant

$$\pi_2 \circ \phi = \varphi \circ \pi_1.$$

L'unicité provient du fait que π_1 est surjective.

Enfin, comme π_1 est une submersion, la différentiabilité de φ découle de celle de ϕ .

Exemple concret

Considérons les deux fibrés principaux triviaux

$$\pi_1 : E_1 = \mathbb{R}^2 \times SO(2) \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

et

$$\pi_2 : E_2 = \mathbb{R}^3 \times SO(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

où les projections sont données par

$$\pi_1((x, y), A) = (x, y),$$

et

$$\pi_2((x, y, z), A) = (x, y, z).$$

L'action de $SO(2)$ sur chaque fibré est

$$((x, y), A) \cdot B = ((x, y), AB),$$

et

$$((x, y, z), A) \cdot B = ((x, y, z), AB).$$

Définissons maintenant

$$\phi : E_1 \rightarrow E_2$$

par

$$\phi((x, y), A) = ((x, y, 0), A).$$

Cette application envoie :

- le point de base $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur le point $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$;
- la composante de groupe $A \in SO(2)$ sur elle-même.

1. Vérification de l'équivariance

Soit $B \in SO(2)$.

Alors

$$\begin{aligned}\phi(((x, y), A) \cdot B) &= \phi((x, y), AB) \\ &= ((x, y, 0), AB).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\phi((x, y), A) \cdot B &= ((x, y, 0), A) \cdot B \\ &= ((x, y, 0), AB).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\phi(u \cdot B) = \phi(u) \cdot B,$$

donc ϕ est un morphisme de fibrés principaux.

2. Construction de l'application induite

Le théorème précédent affirme qu'il existe une unique application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

telle que

$$\pi_2 \circ \phi = \varphi \circ \pi_1.$$

Voyons explicitement comment elle apparaît.

Prenons un point

$$u = ((x, y), A) \in E_1.$$

Calculons séparément les deux membres.

Premier chemin :

$$E_1 \xrightarrow{\phi} E_2 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^3.$$

On applique d'abord ϕ :

$$\phi((x, y), A) = ((x, y, 0), A).$$

Puis on projette par π_2 :

$$\pi_2(((x, y, 0), A)) = (x, y, 0).$$

Donc

$$(\pi_2 \circ \phi)((x, y), A) = (x, y, 0).$$

Deuxième chemin :

$$E_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3.$$

On applique d'abord π_1 :

$$\pi_1((x, y), A) = (x, y).$$

Pour que le diagramme commute, il faut alors définir

$$\varphi(x, y) = (x, y, 0).$$

Ainsi

$$(\varphi \circ \pi_1)((x, y), A) = \varphi(x, y) = (x, y, 0).$$

On obtient bien

$$\pi_2 \circ \phi = \varphi \circ \pi_1.$$

3. Interprétation géométrique

Le morphisme ϕ agit en réalité à deux niveaux :

- sur la base, il plonge le plan \mathbb{R}^2 dans l'espace \mathbb{R}^3 via

$$(x, y) \mapsto (x, y, 0),$$

c'est-à-dire comme le plan horizontal $z = 0$;

- sur les fibres, il laisse inchangée la composante du groupe $SO(2)$.

Ainsi, le morphisme de fibrés "recouvre" l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Le diagramme commutatif signifie que :

projeter après avoir appliqué ϕ revient au même que projeter d'abord puis appliquer φ .

Autrement dit, le morphisme entre les espaces totaux est compatible avec la géométrie des espaces de base.

4. Vue fibre par fibre

Fixons un point

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La fibre de E_1 au-dessus de (x, y) est

$$\pi_1^{-1}(x, y) = \{((x, y), A) ; A \in SO(2)\}.$$

Cette fibre est envoyée par ϕ sur la fibre de E_2 au-dessus de $(x, y, 0)$:

$$\pi_2^{-1}(x, y, 0) = \{((x, y, 0), A) ; A \in SO(2)\}.$$

Donc ϕ transforme fibres en fibres :

$$\phi(\pi_1^{-1}(x, y)) \subset \pi_2^{-1}(\varphi(x, y)).$$

C'est exactement la propriété fondamentale d'un morphisme de fibrés principaux.

Table des Matières

0.1	Contenu-matière	1
0.2	Objectif général du cours	1
0.3	Objectifs spécifiques	1
0.4	Compétences théoriques et mesurables visées	2
0.5	Méthodologie d'enseignement	2
0.5.1	Présentation du cours	2
0.5.2	Travaux pratiques et dirigés	2
0.5.3	Syllabus du cours	3
0.5.4	Mode d'évaluation	3
1	Les bases de la géométrie différentielle	4
1.1	Variétés différentielles	4
1.2	Espaces tangents sur les espaces euclidiens \mathbb{R}^n	21
1.2.1	Définition géométrique d'un vecteur tangent	21
1.2.2	Définition analytique d'un vecteur tangent	28
1.2.3	Dérivation entre espaces tangents	32
1.3	Espaces tangents sur les Variétés différentielles	36
1.3.1	Définition géométrique d'un vecteur tangent	37
1.3.2	Définition analytique d'un vecteur tangent	38
1.3.3	Espace tangent	38
1.4	Espace cotangent sur une variété différentielle	41
2	Espace fibré sur une variété différentielle	43
2.1	Fibration	43
2.2	Trivialisations locales	55
2.3	Fonctions de transition sur un espace fibré	56
2.4	Fibré en droites et exemples	61
2.5	Fibré tangent et fibré cotangent	62
2.5.1	Espace fibré tangent	62
2.5.2	Caractérisation du crochet de Lie de deux champs de vecteurs	71
2.5.3	La différentielle d'une application différentiable	74

2.5.4	Fibré cotangent	76
2.6	Fibré vectoriel sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$	78
2.7	Métrique et forme symplectique canonique sur le fibre cotangent	80
2.7.1	Métrique sur une variété différentielle	80
2.7.2	Écriture de g en coordonnées locales	81
2.7.3	Forme symplectique canonique sur T^*M	85
2.7.4	Applications: Les lois de la mécanique classique d'après Hamilton	88
2.7.5	Équations de Hamilton	88
2.7.6	Loi de Newton et conservation de l'énergie	90
2.8	Formes différentielles et champs de vecteurs	92
2.8.1	Pullback des formes différentielles	95
2.8.2	Produit intérieur	99
2.8.3	La différentielle	100
2.8.4	Complexe de de Rham	101
2.8.5	Dérivée de Lie	107
2.9	Exercices sur les formes différentielles et champs de vecteurs	114
3	Espaces fibrés et connexions	122
3.1	Formules de changement de coordonnées pour les formes différentielles	122
3.2	Changement de coordonnées et intégrales	123
3.3	Variété orientable	124
3.4	Dérivée extérieure	126
3.5	Intégration sur les variétés:formule de Stokes	129
3.6	Connexion affine et dérivée covariante	133
3.7	Connexion covariante sur un fibré vectoriel	135
3.7.1	Expression locale de la dérivée covariante	136
3.7.2	Interprétation géométrique	137
3.7.3	Forme de connexion sur le fibré tangent	137
3.7.4	Forme de connexion et courbure	138
3.7.5	Exemples de calcul de forme de connexion	138
3.8	Transport parallèle et géodésique	142
3.9	Courbure et torsion d'une connexion affine	143
3.10	Tenseurs de Courbure et de Ricci	145
3.11	Connexion de Levi-Civita	146
3.12	Exercices corrigés	150
4	Fibrés principaux	154
4.1	Définitions et exemples	154
4.2	Exemple fondamental:Fibré des repères linéaires(Frame bundle)	159
4.3	Transformations de Jauge	160

4.4 Morphismes entre fibrés principaux 161

Bibliographie

- [1] H. Brian. *Lie groups, Lie algebras, and Representations, An elementary Introduction.* Graduate Texts in Mathematics, Second Edition Springer, 2015.
- [2] W-H. Steeb and Y. Hardy. *Problems and Solutions in Introductory and advanced matrix calculus, Second Edition.* World Scientific, 2016.
- [3] A. McInerney. *First Steps in Differential Geometry, Riemannian, Contact, Symplectic* Undergraduate Texts in Mathematics Springer, 2013.
- [4] P-M. Gadea and J-M. Masque and I-V. Mykytyuk. *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds, A workbook for students and Teachers, Second Edition.* Springer, 2013.
- [5] M. Taylor. *Partial differential equations. Vol I.* Springer, 1996.
- [6] P. Petersen. *Riemannian geometry. Vol 171.* Springer, 2006.
- [7] J.M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature. Vol 176.* Springer, 2006.
- [8] P.J. Olver. *Application of Lie groups to differential equations. Second Edition.* Graduate Texts in Mathematics, 107. Springer, 1986.