



UNIVERSITE DU BURUNDI

**FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**BAC II
MATHS & PHYSIQUE**

Syllabus

RELATIVITE RESTREINTE

45 heures

Par

Dr René SIMBIZI

Année Académique 2025 – 2026

Contents

	Page
Descriptif du cours	1
1 LA RELATIVITÉ EN MÉCANIQUE CLASSIQUE	3
1.1 PRINCIPE DE RELATIVITÉ GALILÉENNE	3
1.1.1 Systèmes de référence d'inertie	3
1.1.2 Le concept de temps absolu	5
1.1.3 La transformation de Galilée	5
1.1.4 Principe de relativité galiléenne et invariance des lois de la mécanique	6
1.2 PROPAGATION DE LA LUMIÈRE	7
1.2.1 Expérience de Michelson et Morley	8
1.2.2 Expérience de Fizeau	10
1.2.3 Invariance de la vitesse de la lumière	11
1.3 ELECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE	12
1.3.1 Invariance de la charge électrique	12
1.3.2 Postulat de l'invariance galiléenne de la force de Lorentz	12
1.3.3 L'invariance galiléenne de la force de Lorentz n'est pourtant pas strictement vérifiée	13
1.3.4 Non-invariance galiléenne des équations de Maxwell	15
1.3.5 La transformation de Galilée mise en cause	17
1.3.6 Vitesse de la lumière	17
2 RELATIVITE DU TEMPS ET DE L'ESPACE	18
2.1 POSTULATS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE	18
2.1.1 Propriétés de l'espace-temps	18
2.1.2 Principe de relativité	19
2.1.3 Causalité	20
2.2 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ SPECIALES	20
2.2.1 Notion d'événement	20
2.2.2 Transformations homogènes	21
2.2.3 Transformations spéciales	22
2.2.4 Loi de composition des vitesses	24
2.3 RELATIVITE DU TEMPS	25
2.3.1 Dilatation des temps	25
2.3.2 Relativité de la simultanéité	26
2.3.3 Durées propre et impropre	27
2.3.4 Mesures des positions et des temps, synchronisation des horloges	28

2.4	RELATIVITÉ DES LONGUEURS	29
3	L'ESPACE-TEMPS	32
3.1	Intervalle entre deux événements	32
3.2	Durée propre	33
3.3	Relativité et géométrie: les diagrammes espace-temps	36
3.3.1	Lignes d'univers et diagrammes espace-temps	36
3.3.1.1	Concepts fondamentaux	36
3.3.1.2	Représentation graphique dans un espace-temps à deux dimensions	37
3.3.1.3	Cônes de lumière et hypercônes dans l'espace-temps	39
3.4	Construction des coordonnées d'un autre observateur	40
3.5	Relation de causalité	42
3.5.1	Intervalles réels et imaginaires	42
3.5.1.1	Intervalle du genre temps	42
3.5.1.2	Intervalle du genre espace	43
3.5.2	Cône de lumière	43
3.5.2.1	Passé et futur absolus	44
3.5.2.2	Éloignement absolu	44
3.5.3	Événements liés par une relation de causalité	44
3.6	Contraction de la longueur: longueur propre	45
4	QUADRIVECTEURS	48
4.1	Quadrivecteur déplacement	48
4.2	Propriétés de quadrivecteurs et métrique de Minkowski	52
4.3	Composantes covariantes	53
4.4	Quadrivecteur vitesse	57
4.5	Quadrivecteur accélération	58
4.6	Limites de la relativité restreinte	59
5	Dynamique relativiste	62
5.1	Equation fondamentale	62
5.2	Equivalence masse-énergie	64
5.3	Le quadrivecteur énergie-impulsion	66
5.4	Quadrivecteur force	68
5.5	Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion	68
5.6	Particule de masse nulle	71
5.6.1	Caractéristiques du quadrivecteur énergie-impulsion	71
5.6.2	Aberration et effet Doppler	72
5.7	Quadrivecteur fréquence	74
5.8	Vitesse limite de particule	75
5.9	Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion et Collisions	75
5.9.1	Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion	75
5.9.2	Applications: Fusée relativiste	77
5.9.3	Référentiel du Centre de Masse	78
5.9.4	Désintégrations et collisions	79
6	CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE	83
6.1	Champs tensoriels et dérivées covariantes	83
6.2	Equations de Maxwell	84
6.3	Potentiels vecteur et scalaire, changement de jauge	85

6.4 Les potentiels et leurs sources, choix d'une jauge	86
6.5 Quadri-courant	88
6.6 Quadri-vecteur du potentiel électromagnétique	89
6.7 Equations de propagation des potentiels	89
6.8 Tenseur électromagnétique	90
6.9 Tenseur dual de F	93
6.10 Transformation du champ électromagnétique	95
6.11 Force de Lorentz	95
6.12 Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme	97
6.13 Potentiel et Champ d'une charge en mouvement	98

Descriptif du cours

ECUE : MAT2307 & PHYS2307- Relativité Restreinte

Niveau : BAC 2 Mathématiques & Physique

Processus	Paramètres	Description
Élaboration	Thème	Étude du mouvement dans l'espace-temps.
	Objectif général	À la fin de l'ECUE, l'étudiant sera capable de traiter le mouvement dans l'espace à quatre dimensions (espace-temps).
	Objectifs spécifiques	<ul style="list-style-type: none"> - Expliquer la notion de référentiel inertiel ; - Expliquer l'insuffisance de la mécanique classique ; - Expliquer la notion de relativité du temps et de l'espace ; - Expliquer l'invariance de la vitesse de la lumière ; - Décrire et expliquer l'invariance des lois de la mécanique lors des mouvements relativistes ; - Expliquer et appliquer les transformations de Lorentz ; - Expliquer le concept de dynamique relativiste ; - Résoudre des problèmes liés au mouvement relativiste.
	Prérequis	Maîtrise des notions vues en mécanique générale, électromagnétisme, analyse et géométrie, maîtrise du français.
	Conditions générales	Supports : Syllabus ; Modalités: 45 heures (cours + TD).
	Bref contenu de l'ECUE	<ul style="list-style-type: none"> - Physique newtonienne et ses insuffisances; - Électromagnétisme classique; - Relativité du temps et de l'espace; - Quadrivecteurs; - Dynamique relativiste; - Champ électromagnétique et relativité.
	Références bibliographiques	- C. Semay and B. Silvestre-Brac, <i>Relativité restreinte : Bases et applications – Cours et exercices corrigés</i> , 4 ^e édition, Dunod, Paris, 2021.

Processus	Paramètres	Description
		<p>- L. D. Landau and E. M. Lifshitz, <i>The Classical Theory of Fields</i>, 4th ed., Vol. 2 of <i>Course of Theoretical Physics</i>, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998;</p> <p>- J. Hladik and M. Chrysos, <i>Introduction à la relativité restreinte : Cours et exercices corrigés</i>, Dunod, Paris, 2023..</p>
	Informations	Nécessité d'approfondir la matière et d'avoir le syllabus imprimé dès le début.
	Activités	Exercices pratiques, travaux collectifs et individuels, correction des exercices par les étudiants.
Intervention	Déroulement	Moments d'introduction, développement, discussion, exercices en groupes ou individuels, synthèse et remédiation.
	Production	Rapports/comptes rendus individuels et/ou collectifs sur les calculs et l'interprétation physique.
	Motivation	Importance pour les métiers utilisant la relativité restreinte (accélération de particules, radiothérapie, satellites).
	Interactions	Entre enseignant et étudiants, entre étudiants lors des exercices pratiques.
Approbation	Évaluation	<p>- Évaluation diagnostique au début de l'enseignement-apprentissage ;</p> <p>- Évaluation formative des compétences en développement (40%) ;</p> <p>- Évaluation sommative des compétences développées à la fin de l'enseignement-apprentissage (60%).</p>

LA RELATIVITÉ EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

LA théorie appelée relativité restreinte a été élaborée dans un article d'Einstein paru en 1905. Cette théorie n'avait pas pour but d'élucider des phénomènes inexpliqués par la mécanique de Newton, mais visait plutôt, à la suite d'une réflexion sur le concept de temps, à intégrer certains résultats connus de l'électromagnétisme de Maxwell en étendant le principe de relativité de Galilée à ce dernier.

La relativité restreinte est l'aboutissement des travaux exceptionnellement riches de mathématiciens et physiciens de la seconde moitié du XIX^e siècle, et plus particulièrement de Hendrik Lorentz (1853-1928) et Henri Poincaré (1854-1912). Ces travaux furent ensuite développés par Albert Einstein (1879-1955), dont l'histoire de la relativité a surtout retenu le nom. En science, il convient toutefois de se rappeler la remarque de Newton à propos des recherches de ses prédécesseurs dont il s'inspira :

Si j'ai vu plus loin, c'est parce que j'étais assis sur les épaules de géants.

Outre les travaux théoriques mentionnés ci-dessus, il ne faut pas oublier le rôle essentiel des recherches expérimentales. En particulier, l'expérience d'Albert Michelson (1852-1931), prix Nobel de physique en 1907, dont les résultats contribuèrent de manière décisive à l'élaboration de la théorie de la relativité.

1.1 PRINCIPE DE RELATIVITÉ GALILÉENNE

1.1.1 Systèmes de référence d'inertie

Pour repérer la position d'un corps, en mécanique classique, on utilise **un système de coordonnées spatiales**. En relativité, il est nécessaire d'adjoindre *une horloge marquant le temps à chaque système de coordonnées*. On appelle alors **système de référence**, ou **référentiel**, un tel système de coordonnées muni d'une horloge. Ainsi, le référentiel \mathcal{R} (Fig. 1.2) est défini par les coordonnées cartésiennes x, y, z et par le temps t .

Le mouvement d'un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure est appelé **mouvement libre**.

Lorsque ce mouvement libre s'effectue à vitesse constante par rapport à un référentiel, on dit que celui-ci est **un référentiel d'inertie**, également appelé **référentiel galiléen**. Si un référentiel est galiléen, alors tout autre référentiel se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier est également un référentiel galiléen.

Il existe donc une infinité de référentiels d'inertie.

Les lois de la mécanique classique ont été formulées par Newton, après les travaux conceptuels fondamentaux de Galilée. La première loi peut être énoncée comme suit :

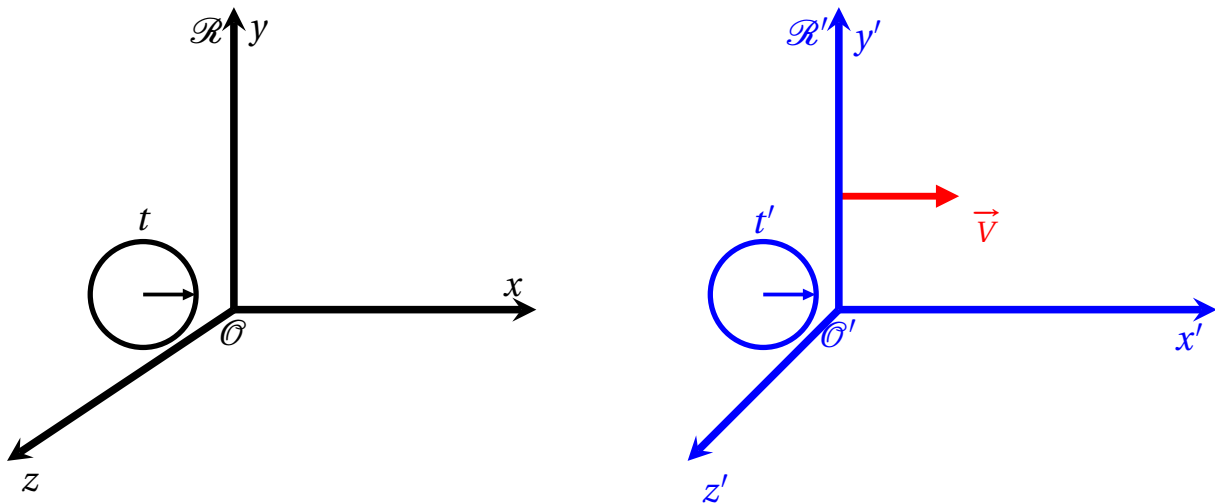


Figure 1.1

Il existe une classe de référentiels particuliers, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout corps conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force extérieure.

La seconde loi de Newton s'écrit Pour repérer la position d'un corps, en mécanique classique, on utilise **un système de coordonnées spatiales**. En relativité, il est nécessaire d'adjoindre *une horloge marquant le temps à chaque système de coordonnées*. On appelle alors **système de référence**, ou **référentiel**, un tel système de coordonnées muni d'une horloge. Ainsi, le référentiel \mathcal{R} (Fig. 1.2) est défini par les coordonnées cartésiennes x, y, z et par le temps t .

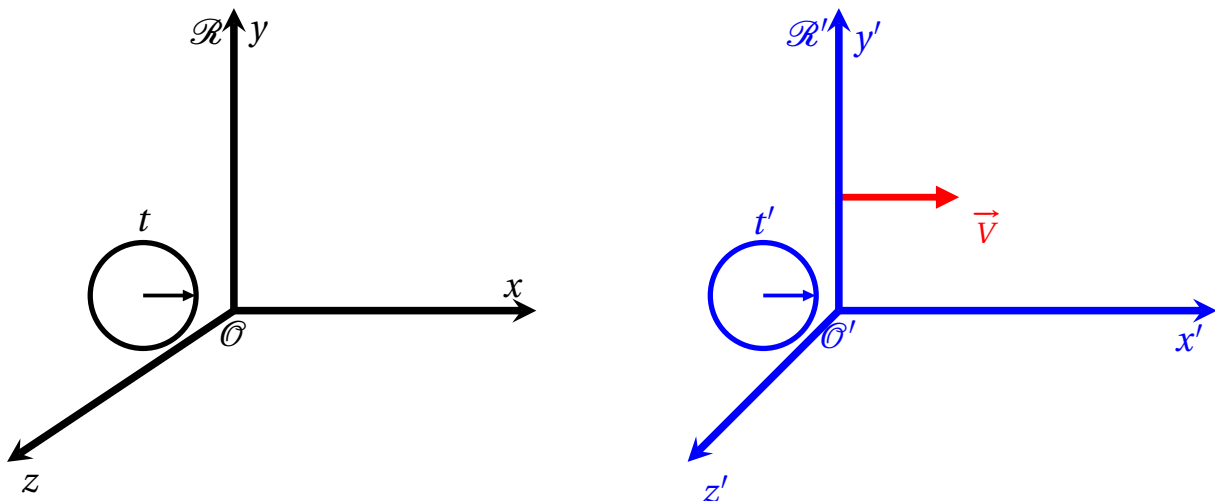


Figure 1.2

Le mouvement d'un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure est appelé **mouvement libre**.

Lorsque ce mouvement libre s'effectue à vitesse constante par rapport à un référentiel, on dit que celui-ci est **un référentiel d'inertie**, également appelé **référentiel galiléen**. Si un référentiel est galiléen, alors tout autre référentiel se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier est également un référentiel galiléen.

Il existe donc une infinité de référentiels d'inertie.

Les lois de la mécanique classique ont été formulées par Newton, après les travaux conceptuels fon-

damentaux de Galilée. La première loi peut être énoncée comme suit :

Il existe une classe de référentiels particuliers, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout corps conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force extérieure.

La seconde loi de Newton s'écrit

$$\vec{F} = m \vec{a}. \tag{1.1}$$

1.1.2 Le concept de temps absolu

En mécanique classique, on suppose implicitement qu'il existe une horloge universelle. Le temps s'écoule de manière identique en tout point de l'espace et dans tous les référentiels.

Newton introduisit ainsi la notion de temps absolu :

Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à quoi que ce soit d'extérieur, s'écoule uniformément.

Ainsi, en mécanique newtonienne, **le temps est absolu et indépendant du référentiel**. Toutes les horloges peuvent être synchronisées.

En relativité restreinte, en revanche, **le temps dépend du mouvement** et ne peut plus être considéré comme absolu.

—

1.1.3 La transformation de Galilée

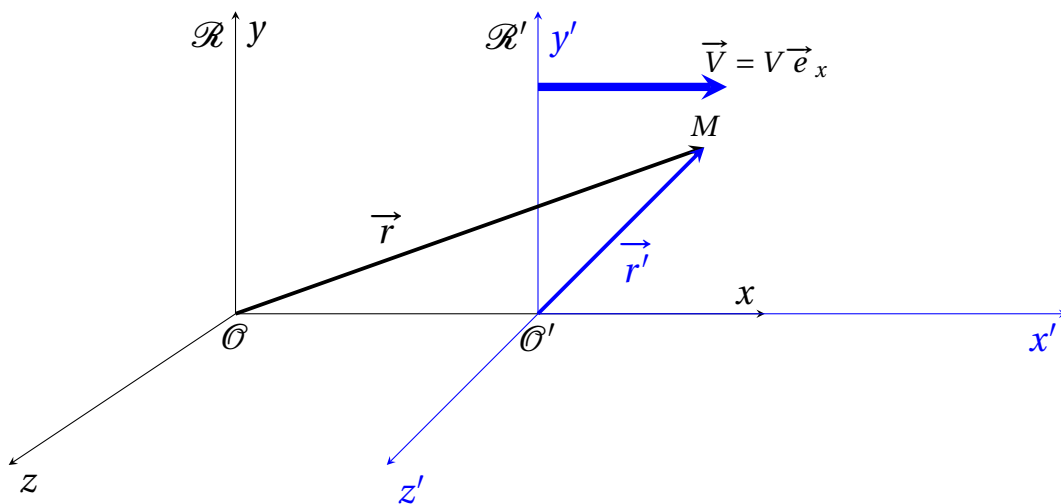


Figure 1.3: \vec{V} étant une vitesse constante, si \mathcal{R} est galiléen, \mathcal{R}' l'est également.

Les transformations de Galilée s'écrivent :

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1.2}$$

Dans leur forme vectorielle :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t. \tag{1.3}$$



Remarque

La figure 1.3 illustre deux référentiels dont les axes sont parallèles et dont le mouvement relatif est rectiligne uniforme.

1.1.4 Principe de relativité galiléenne et invariance des lois de la mécanique

Toutes les observations montrent l'existence d'un principe de relativité selon lequel toutes les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie. Cela signifie que les équations qui décrivent les phénomènes mécaniques, en fonction des coordonnées et du temps, ont la même forme quel que soit le référentiel d'inertie considéré. C'est **le principe de relativité galiléenne**.

La mécanique classique est donc basée, entre autres, sur un postulat fondamental appelé **postulat de la relativité galiléenne** :

Les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

Selon la loi fondamentale de la dynamique, la force \vec{F} appliquée à un corps de masse m lui communique une accélération \vec{a} proportionnelle à cette force. En mécanique classique, la masse m , appelée *masse d'inertie*, est *une constante intrinsèque indépendante du référentiel considéré*. Elle est considérée comme un *attribut de la particule et ne peut dépendre de son état de mouvement*.

Si ces grandeurs sont mesurées dans le référentiel \mathcal{R} , on a :

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.4)$$

Dans un autre référentiel d'inertie (\mathcal{R}'), les transformations de Galilée donnent :

$$\vec{a}' = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt'^2} (\vec{r} - \vec{V} t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.5)$$

D'autre part, la force \vec{F}' appliquée à la masse m , et mesurée dans \mathcal{R}' , doit être indépendante du référentiel par rapport auquel elle est mesurée. En effet, elle ne peut dépendre que des positions relatives et éventuellement des vitesses relatives des corps avec lesquels interagit la particule considérée ; ces deux caractéristiques sont des grandeurs indépendantes du référentiel.

Par conséquent, on a $\vec{F} = \vec{F}'$, ce qui implique :

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{a}' = \vec{F}' \quad (1.6)$$

La forme de la loi de la dynamique est donc identique quel que soit le référentiel d'inertie considéré. On dit que **la loi est invariante lorsqu'on lui applique la transformation de Galilée**.

On peut alors exprimer le principe de relativité galiléenne sous la forme suivante :

Principe de relativité galiléenne

Les lois de la mécanique classique sont invariantes par rapport à la transformation de Galilée.

Autrement dit, **la loi est la même dans les deux référentiels.**

Par conséquent, une autre manière d'énoncer le postulat de la relativité galiléenne est :

Les expériences de mécanique réalisées à l'intérieur de référentiels d'inertie ne permettent pas de déceler la vitesse relative de ces référentiels.

Une conséquence immédiate des équations de transformation de Galilée est la loi d'addition des vitesses. Si un objet est animé d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} et d'une vitesse \vec{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' , alors, en vertu des équations (1.2) et (1.3), on a :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (1.7)$$

Les trois vitesses intervenant dans cette relation sont appelées respectivement: - **vitesse absolue**, - **vitesse relative**, - **vitesse d'entraînement**

1.2 PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

Les interrogations des physiciens sur la nature de la lumière et sur son mode de propagation sont à l'origine de la théorie de la relativité restreinte. Ce ne fut qu'à partir du XVII^e siècle qu'ils commencèrent à se poser la question: **La lumière est-elle une substance particulière qui se déplace ?** ou bien simplement **s'agit-il d'un mouvement transmis par un milieu inconnu imprégnant tout l'espace ?**

Selon **René Descartes**, l'univers était empli d'une matière qui transmettait la *pression* engendrée par les corps lumineux. Les théories issues du cartésianisme vont attribuer à la lumière une nature purement cinétique :

la lumière n'est pas un corps particulier qui se déplace mais un mouvement spécifique au sein d'un milieu, appelé *éther lumineux*, qui emplit l'espace.

En opposition à la théorie de Descartes, **Newton** proposa, en 1672, une théorie entièrement substantielle de la lumière. Il imagina que la lumière est constituée de particules infiniment petites, lancées à très grande vitesse par les corps lumineux. Cette théorie corpusculaire s'imposa jusqu'au début du XIX^e siècle.

Ce fut **Augustin Fresnel** qui réussit à démontrer que la lumière possède une nature vibratoire, grâce à l'interprétation des phénomènes d'interférences et de diffraction. Il fallait donc un support pour transmettre de telles vibrations, comme par exemple l'air pour les vibrations sonores. L'éther lumineux fit ainsi sa réapparition ; ce devait être une substance élastique qui imprégnait tous les corps ainsi que le vide.

De nombreux expérimentateurs essayèrent alors en vain de mettre en évidence ce milieu éthéré. Retenons deux expériences réalisées dans ce but, et qui montrent essentiellement que la loi d'addition des

vitesse de la relativité galiléenne n'est pas vérifiée par la lumière: *l'expérience de Michelson et Morley et l'expérience de Fizeau.*

1.2.1 Expérience de Michelson et Morley

Au XIX^e siècle, des physiciens comme Augustin-Jean Fresnel pensaient que la lumière ne pouvait pas se propager sans support matériel. Ils ont donc proposé l'existence d'un milieu hypothétique appelé **éther**, supposé remplir tout l'univers et transmettre les ondes électromagnétiques. La lumière devait alors se propager avec une vitesse c uniquement dans les milieux au repos par rapport à cet éther. Cependant, l'éther devait posséder des propriétés contradictoires: être assez rigide pour transmettre des ondes lumineuses tout en n'opposant aucune résistance au mouvement des planètes. Pour détecter ce milieu, l'expérience célèbre de Albert A. Michelson et Edward W. Morley (Michelson-Morley experiment) a tenté de *mesurer des variations de la vitesse de la lumière dues au mouvement de la Terre dans l'éther, en utilisant des phénomènes d'interférences lumineuses.*

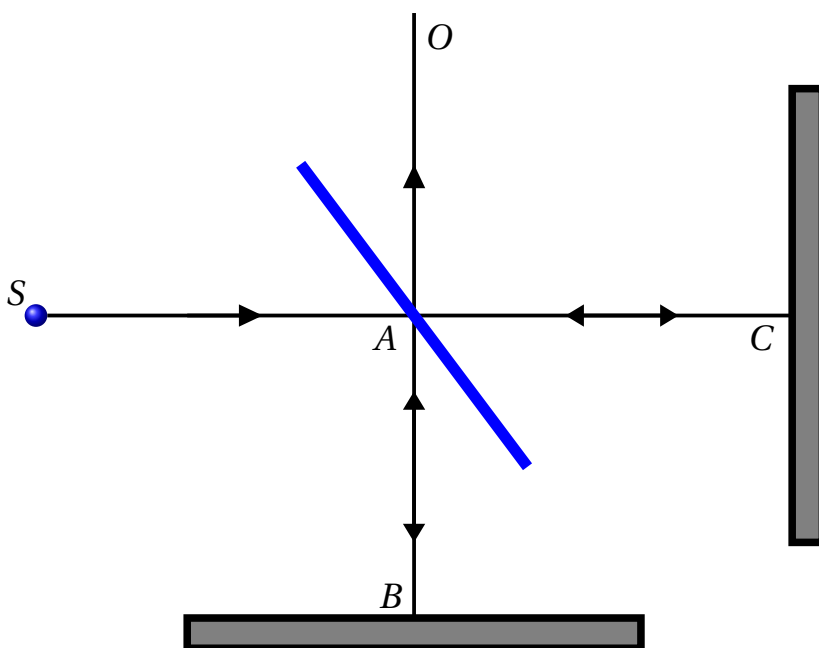


Figure 1.4: Schéma de principe de l'expérience de Michelson et Morley.

Partant du principe que la Terre est en mouvement dans l'éther et que la vitesse de la lumière est constante par rapport à l'éther, **Michelson suppose que la mesure de la vitesse de la lumière doit donner des résultats différents suivant l'orientation de la vitesse de la Terre par rapport à l'éther.** L'idée est alors d'essayer de mettre en évidence ces variations en faisant intervenir des phénomènes d'interférence lumineuse.

La figure 1.4 montre le schéma de principe de l'expérience. Dans l'expérience de l'interféromètre, un faisceau lumineux provenant d'une source est séparé en deux par une lame semi-transparente inclinée à 45° . Les deux rayons parcourent des trajets différents puis se recombinaient à l'observateur, produisant des interférences qui dépendent de la différence de temps de propagation entre les deux chemins. Cette différence dépend uniquement des temps de parcours dans les deux bras de l'interféromètre. Plus précisément, l'aspect interférentiel dépend de la différence de phase $2\pi\nu\Delta t$, où ν est la fréquence du rayonnement. Les trajets SA et AO étant communs pour les deux rayons, Δt ne dépend que des temps de parcours $t(AB)$ et $t(AC)$ des rayons dans les bras AB et AC . Nous allons maintenant calculer la quantité $t(AB) - t(AC)$ pour deux configurations différentes de l'interféromètre. La figure 1.4 montre en fait la situation pour laquelle le dispositif serait immobile par rapport à l'éther.

Supposons maintenant que l'ensemble soit en mouvement par rapport à l'éther dans lequel la lumière se propage, selon l'hypothèse de l'époque, avec la vitesse c . Considérons, par exemple, qu'au moment de l'expérience, la vitesse d'entraînement du système, \vec{V} , qui est en gros la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, soit parallèle à la direction du bras AB .

Posons $\ell_1 = AB$ et $\ell_2 = AC$. Calculons le temps que met un rayon lumineux pour parcourir le bras AB pour un trajet aller retour. Pour évaluer ce temps, t_1 , plaçons-nous dans un référentiel lié à la Terre. Les vitesses s'ajoutant algébriquement, on aurait

$$t(AB) = t_1 = \frac{\ell_1}{c - V} + \frac{\ell_1}{c + V} \tag{1.8}$$

Dans le bras AC , le temps t_2 pour un trajet aller-retour se calcule plus aisément dans un référentiel lié à l'éther (voir figure 1.5). Le rayon lumineux parcourt dans ce cas les deux bras d'un triangle isocèle (de base $2h$) avec la vitesse c . On obtient

$$t(AC) = t_2 = \frac{1}{c} \cdot 2 \cdot \sqrt{\ell_2^2 + h^2} \quad \text{avec} \quad V t_2 = 2h \quad \Rightarrow \quad t(AC) = t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} \tag{1.9}$$

puisque la distance $2h$ est parcourue en une durée t_2 à la vitesse V . Les franges d'interférence à

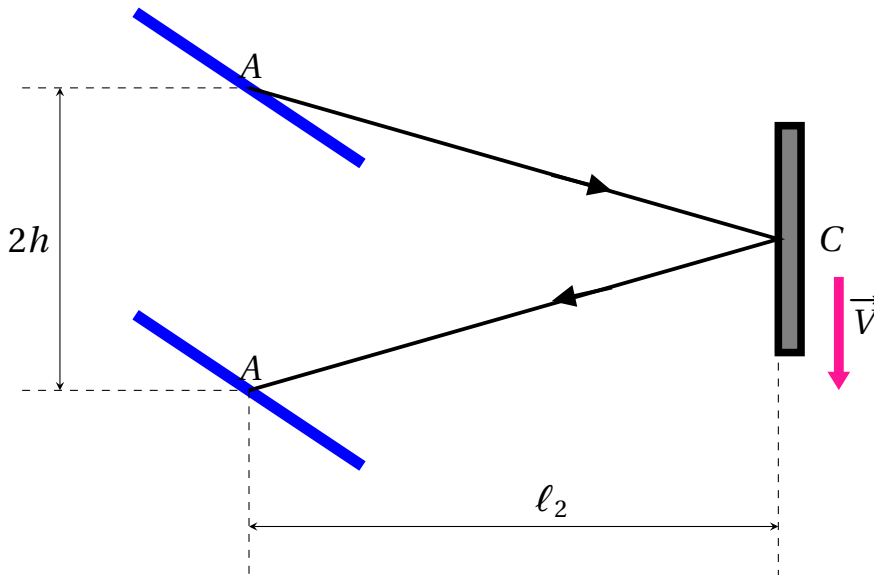


Figure 1.5: Trajet du rayon lumineux dans le bras AC de l'interféromètre de Michelson et Morley pour le référentiel lié à l'éther. La flèche épaisse montre le sens de déplacement de l'interféromètre par rapport à l'éther..

observer pour cette configuration dépendraient de la différence des temps de propagation $t(AB) - t(AC) = t_1 - t_2$.

Échangeons le rôle des deux bras de l'interféromètre en faisant pivoter l'ensemble de l'appareil d'un quart de tour. On obtient également

$$t(AB) = t_3 = \frac{2\ell_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad \text{et} \quad t(AC) = t_4 = \frac{\ell_2}{c + V} + \frac{\ell_2}{c - V} \tag{1.10}$$

La différence $t(AB) - t(AC) = t_3 - t_4$ contrôle maintenant l'aspect des franges d'interférence dans cette nouvelle configuration. La différence ΔT des différences de temps de propagation des rayons lumineux dans les deux configurations de l'interféromètre est donnée par

$$\Delta T = (t_1 - t_2) - (t_3 - t_4) \approx (\ell_1 + \ell_2) \frac{V^2}{c^3} \tag{1.11}$$

où on utilise le fait que $V \ll c$ pour faire un calcul approché. En effet, la vitesse d'entraînement du référentiel dans l'éther étant supposée proche de la vitesse de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 30 km/s , on a $V/c \approx 10^{-4}$. Après rotation du dispositif expérimental, on s'attend donc à observer une variation de la différence de phase égale à

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\Delta T \approx \frac{2\pi}{\lambda} (\ell_1 + \ell_2) \frac{V^2}{c^2} \quad (1.12)$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde la lumière utilisée. Cela se traduirait par un défilement de $n = \Delta\phi/(2\pi)$ franges d'interférence, puisqu'un déplacement d'une frange correspond à un retard de phase égal à 2π .

L'expérience est répétée plusieurs fois (*en particulier à des époques différentes de l'année, l'orientation de la vitesse de la Terre changeant tout au long de l'année dans un référentiel d'inertie lié au Soleil*). Les interférences étant caractérisées par des bandes alternativement sombres et lumineuses, celles-ci devraient alors être déplacées d'une certaine distance. **Toutes les expériences ont toujours donné le même résultat: $\Delta T = 0$!** On ne trouva donc pas la moindre trace du déplacement attendu.

Enfin, l'expérience de Michelson et Morley contribua à démontrer que *la vitesse de la lumière est dans le vide une constante, notée c , indépendante du mouvement de sa source. Sa vitesse ne s'additionne pas à celle de sa source contrairement à ce qu'exigerait la relativité galiléenne*. Aucun effet attribuable au mouvement orbital de la Terre, ni au mouvement du système solaire par rapport au rayonnement cosmique de fond, n'a jamais pu être observé.

1.2.2 Expérience de Fizeau

L'expérience réalisée par **Hippolyte Fizeau**, en 1851, partait de l'idée que si un milieu réfringent était en mouvement, on pouvait penser que l'éther lumineux serait entraîné par ce milieu. *La vitesse de la lumière devait alors résulter de l'addition de la vitesse de la lumière dans l'éther et de celle de l'éther éventuellement entraîné.*

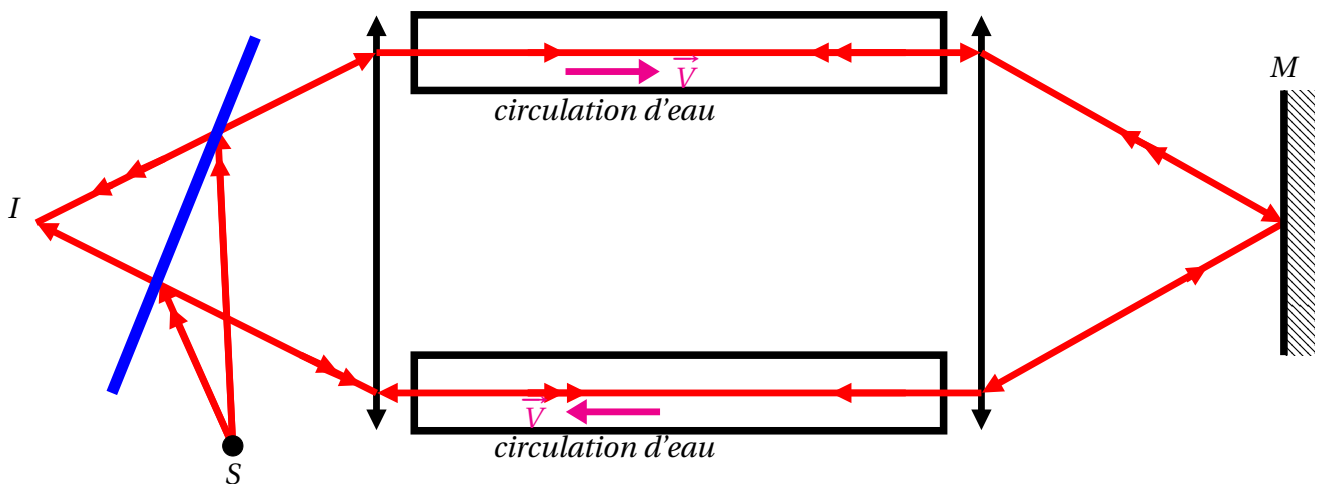


Figure 1.6

Afin de mettre en évidence un entraînement de l'éther, Fizeau étudia l'influence de la vitesse V d'un courant d'eau sur la vitesse de la lumière. Le principe de l'expérience est décrit par la Figure 1.6. De l'eau circule dans un tube coudé en verre dont les deux branches parallèles sont de même longueur. Deux rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle S , donc en phase au départ, sont envoyés à l'aide d'une lame semi-transparente, à travers les deux branches du tube. Les trajets parcourus par

les rayons sont de même longueur; ils sont renvoyés par un miroir M , et ils viennent interférer en I en fin de parcours. Lorsque l'eau est immobile, la vitesse de la lumière est égale à

$$c' = \frac{c}{n}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et n , l'indice de l'eau. Si l'on suppose que l'éther lumineux est un milieu entraîné par le courant d'eau, la vitesse du rayon lumineux marqué par des flèches simples devrait être égale à

$$\frac{c}{n} + V,$$

et l'autre, marqué par des flèches doubles, à

$$\frac{c}{n} - V$$

Les chemins optiques suivis par les deux rayons qui interfèrent sont donc différents, et l'on devrait observer un déplacement des franges d'interférence en fonction de la vitesse de l'eau.

Fizeau observa bien un déplacement des franges d'interférence, mais les résultats expérimentaux montrèrent que la vitesse de la lumière dans un courant d'eau allant dans un même sens que le rayon lumineux, est donnée par l'expression:

$$c'' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V \quad (1.13)$$

L'éther n'est donc pas complètement entraîné par l'eau puisque la formule d'addition des vitesses de la relativité galiléenne n'est pas vérifiée. On ne peut pas non plus en, conclure que l'éther est immobile. A l'époque, Fizeau conclut prudemment que la loi trouvée exprime simplement "*le changement de la vitesse de la lumière par l'effet du mouvement des corps*" sans faire d'hypothèse sur l'origine de ce changement.

Ce sera seulement cinquante ans plus tard que la théorie de la relativité restreinte permettra d'apporter une justification à la formule expérimentale de Fizeau.

1.2.3 Invariance de la vitesse de la lumière

La conclusion surprenante à laquelle conduisit l'expérience de Michelson et Morley fut, parmi d'autres idées, à la base de la théorie de la relativité restreinte. Cependant, cette idée, difficilement acceptable à l'époque, devait être testée à l'aide d'autres procédés expérimentaux, ce que firent de nombreux chercheurs au cours du XX^e siècle. Tous arrivèrent à la même conclusion pour des expériences réalisées à l'échelle du laboratoire :

la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de sa source.

Citons, par exemple, une expérience réalisée au CERN ("*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*" ou "*European Council for Nuclear Research*") en 1964, utilisant une source de lumière se déplaçant à très grande vitesse. Des photons furent produits lors de la désintégration de particules de très haute énergie, des pions neutres π^0 , qui avaient acquis une vitesse extrêmement proche de celle de la lumière, $V = 0,99975c$.

La mesure de la vitesse des photons, émis par cette source mobile animée de la vitesse V , donna une valeur égale à c avec une incertitude expérimentale estimée à ± 40 km/s, soit une erreur relative de l'ordre de 10^{-4} .

1.3 ELECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE

À la fin du XIX^e siècle, la relativité galiléenne posait une autre énigme aux savants. **James Maxwell** (1831 – 1879) avait effectué une synthèse de toutes les lois de l'électromagnétisme en quatre équations. Il en avait déduit que la lumière est aussi une onde électromagnétique, réalisant ainsi, en une seule théorie, l'unification de l'électricité, du magnétisme et de l'optique.

Aucun savant de l'époque ne doutait des équations de Maxwell. Cependant, deux des quatre équations de Maxwell ne restent pas invariantes par une transformation de Galilée, ainsi que nous allons le voir par la suite.

1.3.1 Invariance de la charge électrique

Une charge électrique a-t-elle une valeur différente selon qu'elle est au repos ou en mouvement dans un référentiel donné ? L'électromagnétisme classique tient implicitement pour acquis que la charge est une grandeur invariante par rapport à tout référentiel. *Mais en est-il réellement ainsi lorsque les vitesses des charges deviennent comparables à celle de la lumière ?* Ce n'est que l'expérience qui permet de montrer si une charge animée d'une vitesse élevée est ou non invariante.

Ainsi, la comparaison entre la molécule d'hydrogène H_2 et l'atome d'hélium He a permis de mettre en évidence l'absence d'influence du mouvement sur les charges électriques. Dans la molécule H_2 , les deux protons sont séparés par une distance de l'ordre de $0,7\text{Å}$ et ils se déplacent lentement. Par contre, dans l'atome d'hélium, les protons sont fortement liés au noyau, où ils possèdent des énergies cinétiques de l'ordre du million d'électronvolts.

Or les deux électrons de la molécule d'hydrogène, ainsi que ceux de l'hélium, ont des vitesses semblables.

En conséquence, si la vitesse de déplacement des charges des protons avait un effet quelconque sur leur valeur, une compensation exacte de la charge électronique par la charge nucléaire ne pourrait avoir lieu à la fois dans la molécule H_2 et dans l'atome He.

Or la neutralité électrique est également vérifiée expérimentalement dans les deux cas avec une remarquable précision relative. Diverses considérations théoriques viennent également conforter les résultats expérimentaux relatifs à l'invariance d'une charge en mouvement.

Nous postulerons donc par la suite que **la charge électrique conserve la même valeur lorsqu'elle est au repos ou en mouvement.**

1.3.2 Postulat de l'invariance galiléenne de la force de Lorentz

Lorsqu'une particule chargée est au repos dans un référentiel \mathcal{R} , elle crée autour d'elle *un champ électrostatique* qui obéit au théorème de Gauss et dérive d'un potentiel scalaire. Lorsque cette particule chargée est en mouvement dans \mathcal{R} , elle engendre *un champ électrique* \vec{E} qui, lui aussi, obéit au théorème de Gauss mais ne dérive pas, en général, d'un tel potentiel.

Une seconde charge q , au repos ou en mouvement dans \mathcal{R} , subit une force électrique \vec{F}_e due à l'action de \vec{E} , qui est donnée par :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (1.14)$$

Lorsqu'une charge q est en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} , et si elle est soumise à la fois à *un champ électrique* \vec{E} et *une induction magnétique* \vec{B} , elle subit la force :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad (1.15)$$

où la force \vec{F} , somme des forces électrique et magnétique exercées sur la charge q , est appelée **force de Lorentz**. L'ensemble (\vec{E}, \vec{B}) forme le champ électromagnétique.

Considérons à présent un second référentiel d'inertie \mathcal{R}' , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse \vec{V} , de direction quelconque. La charge q se déplace alors dans \mathcal{R}' à une vitesse $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$. Notons (\vec{E}', \vec{B}') le champ électromagnétique mesuré dans \mathcal{R}' .

La force de Lorentz exercée sur la charge invariante q est :

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = q(\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{V}) \wedge \vec{B}') = \vec{F}'_e + \vec{F}'_m \quad (1.16)$$

Dans le cadre de la mécanique newtonienne, les forces mécaniques restent invariantes lors d'un changement de référentiel inertiel, ainsi que nous l'avons vu au début de ce chapitre.

On peut donc penser que l'invariance des forces ne doit pas se limiter aux seules forces mécaniques, mais s'étendre à toutes les autres forces physiques. **L'invariance galiléenne de la force de Lorentz est ainsi postulée**. Ce postulat est **vérifié expérimentalement pour des vitesses des particules chargées qui restent faibles par rapport à celle de la lumière**.

Afin de préserver l'invariance de la force de Lorentz, on doit écrire que $\vec{F} = \vec{F}'$, soit, compte tenu des relations (1.15) et (1.16) :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + (\vec{v} - \vec{V}) \wedge \vec{B}' \quad (1.17)$$

Pour assurer l'invariance galiléenne de la force de Lorentz, il faut donc admettre qu'il y a compensation entre les variations simultanées de la force magnétique et de la force électrique lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre. La relation (1.17) s'écrit alors :

$$\vec{E} - (\vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}') + \vec{v} \times (\vec{B} - \vec{B}') = 0 \quad (1.18)$$

Cette dernière relation **devant être vérifiée quelle que soit la vitesse \vec{v} de la particule**, impose l'annulation entre les termes indépendants de \vec{v} et ceux qui en dépendent, d'où :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}' \quad (1.19)$$

Si l'induction magnétique reste identique dans les deux référentiels, il n'en est pas de même pour le champ électrique, qui se transforme par l'intermédiaire d'un terme contenant leur vitesse relative. **C'est le prix à payer pour préserver l'invariance galiléenne** – imposée par l'intuition et vérifiée, tout au moins pour de faibles vitesses, par les expériences – **de la force totale exercée sur une charge**.

1.3.3 L'invariance galiléenne de la force de Lorentz n'est pourtant pas strictement vérifiée

Nous allons voir, sur un cas particulier, qu'une charge électrique en mouvement dans un champ magnétique créé par une autre charge en mouvement subit *une force qui ne reste pas invariante lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre*.

Pour cela, considérons une particule de charge électrique q qui se déplace à la vitesse uniforme \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} . Lorsqu'elle passe en un point M de \mathcal{R} où règne une induction magnétique \vec{B} , la particule est soumise à une force :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.20)$$

Supposons que l'induction magnétique soit créée par une autre particule de charge q_1 se déplaçant dans le référentiel \mathcal{R} parallèlement à la trajectoire de la première charge et à la même vitesse \vec{v} . Désignons par $\vec{r} = r\vec{e}_r$ le vecteur joignant q_1 à q , et utilisons le postulat d'invariance des charges en mouvement.

L'induction magnétique mesurée dans \mathcal{R} au point où se trouve la charge q s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}}{r^2} \wedge \vec{e}_r \quad (1.21)$$

soit encore, compte tenu de $1/\mu_0 = \epsilon_0 c^2$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \quad \text{où } \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (1.22)$$

désigne le champ électrique créé par la charge q_1 qui règne au point M . La force de Lorentz exercée sur la charge q s'écrit alors dans \mathcal{R} :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E} \right) \right) \quad (1.23)$$

Dans un second référentiel \mathcal{R}' , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse $\vec{V} = \vec{v}$, les particules de charges q et q_1 sont au repos. En conséquence, le champ dans \mathcal{R}' est purement électrostatique et l'induction magnétique nulle, soit $B' = 0$.

De plus, puisque le champ électrique \vec{E} ne dépend que du vecteur \vec{r} , qui reste inchangé lors du passage d'un référentiel à un autre, le champ électrique donné par (1.22), et par conséquent la force électrique, sont invariants :

$$\vec{E}' = \vec{E}; \quad \vec{F}'_e = \vec{F}_e \quad (1.24)$$

La première des relations (1.24) s'écrit encore, par suite de $B' = 0$:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}' \quad (1.25)$$

expression identique à celle de la transformation du champ électrique donnée par (1.19).

Par contre, compte tenu de la relation (1.22) et $B' = 0$, l'induction magnétique n'est plus invariante, et devient :

$$\vec{B} = \vec{B}' + \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}' \quad (1.26)$$

On note que la seconde relation de (1.19) n'est plus vérifiée. La force de Lorentz exercée sur la charge q , donnée dans \mathcal{R} par (1.24), s'écrit dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\vec{F}' = \vec{F}'_e = q \vec{E}' \quad (1.27)$$

ou encore, compte tenu de $\vec{v} = \vec{V}$ et de la relation (1.24) :

$$\vec{F}' = \vec{F} - q \frac{\vec{V}}{c} \times \left(\frac{\vec{V}}{c} \wedge \vec{E} \right) \quad (1.28)$$

Le deuxième terme du second membre de (1.28) n'étant pas nul, **la force de Lorentz n'est plus invariante**. Remarquons que, pour $\frac{V}{c} \ll 1$, on a: $\vec{F}' \simeq \vec{F}$ C'est la raison pour laquelle l'expérimentation, jusqu'au début du vingtième siècle, ne pouvait que valider l'invariance de la force de Lorentz.

L'exemple étudié ci-dessus montre **un comportement étonnant de la force de Lorentz** puisqu'elle **n'obéit pas au principe d'invariance galiléenne de la force**. Ainsi, dès le départ, l'électromagnétisme bouleverse le principe fondamental de la dynamique classique.

1.3.4 Non-invariance galiléenne des équations de Maxwell

Dans un référentiel \mathcal{R} où le champ électromagnétique a pour valeur (\vec{E}, \vec{B}) , les équations de Maxwell se répartissent en deux catégories :

- (1) Deux équations décrivant la structure du champ électromagnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.29)$$

- (2) Les deux autres équations relient le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} aux sources, c'est-à-dire aux distributions de charge ρ et de courant \vec{j} électriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (1.30)$$

Ici, ρ est la charge volumique et $\vec{j} = \rho \vec{v}$, le vecteur densité de courant électrique. Ces équations ne sont pas toutes invariantes sous une transformation de Galilée reliant deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Notons **div'** et **rot'** les symboles de la divergence et du rotationnel lorsque les dérivées partielles sont calculées par rapport aux coordonnées x', y', z' du référentiel \mathcal{R}' . En effet :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (1.31)$$

Or, d'après la première relation de (1.19), on a :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}', \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = E'_y + V B'_z \\ E_z = E'_z - V B'_y \end{cases} \quad (1.32)$$

De plus :

$$\begin{cases} x' = x - V t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{Ainsi:} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}' \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \end{cases} \quad (1.33)$$

d'où les identités suivantes :

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}', \quad \text{div} \equiv \text{div}', \quad \vec{\nabla} \wedge \equiv \vec{\nabla}' \wedge, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}' \quad (1.34)$$

De ces relations et de la seconde dans (1.19), on voit que les deux équations de (??) sont **toutes invariantes par les transformations de Galilée**. Ainsi, les équations (1.29) conservent leur forme lors du passage d'un référentiel à un autre en translation uniforme par rapport au premier.

- La première équation de (1.29) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (1.35)$$

avec $\vec{B} = \vec{B}'$ et $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$, etc., donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = 0 \quad (1.36)$$

- De même, grâce aux identités (1.34) et à la formule $\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{B}) = -(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$, la deuxième équation de (1.29) s'écrit :

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \quad (1.37)$$

En revanche, les équations (1.30), contenant les sources du champ électromagnétique, ne conservent pas leur forme dans une transformation galiléenne.

D'abord, l'invariance de la charge électrique assure que la charge volumique est conservée dans \mathcal{R}' : $\rho = \rho'$. L'expression du champ électrique (1.32) et la conservation de la charge volumique donnent :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + V \frac{\partial B'_z}{\partial y'}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - V \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad (1.38)$$

ce qui donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' + V \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' - \vec{\nabla}' \cdot (\vec{V} \wedge \vec{B}') = \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' + \vec{V} \cdot (\vec{\nabla}' \wedge \vec{B}') = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.39)$$

La forme de l'équation de Maxwell $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ n'est donc pas invariante par changement de référentiel galiléen.

De plus, la loi de composition des vitesses $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ montre que le vecteur densité de courant électrique dépend du référentiel :

$$\vec{j}' = \rho' \vec{v}' = \rho (\vec{v} - \vec{V}) = \vec{j} - \rho \vec{V} \quad (1.40)$$

Enfin, l'égalité $\vec{B} = \vec{B}'$ et l'identité $\vec{\nabla} \wedge = \vec{\nabla}' \wedge$ transforment la quatrième équation de Maxwell comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' &= \mu_0 \left(\vec{j}' + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \right) \\ &+ \mu_0 \left(\rho' \vec{V} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{V} \wedge \vec{B}') \right) - \epsilon_0 \mu_0 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}') (\vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}') \end{aligned} \quad (1.41)$$

Les deux derniers termes du second membre n'étant pas nuls en général, **la dernière des équations de Maxwell n'est également pas de forme invariante dans une transformation de Galilée.**



Contradiction avec le Principe de la relativité galiléenne

Les transformations (??) et (1.41) sont contradictoires avec le *Principe de la relativité galiléenne*, qui stipule que *les lois de la mécanique classique sont invariantes par rapport à la transformation de Galilée.*

1.3.5 La transformation de Galilée mise en cause

A la fin du XIX^e siècle, les physiciens s'interrogèrent donc sur **l'absence de vérification du principe de relativité galiléenne** par la théorie électromagnétique, ainsi que sur les mesures mettant en évidence la constance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels d'inertie.

Il semblait difficile d'imaginer que les équations de Maxwell étaient fausses, *mais pouvait-on admettre qu'elles ne soient pas de forme invariante vis-à-vis de la transformation de Galilée? Le postulat de relativité galiléenne ne devait-il pas être, sinon abandonné, tout au moins affiné et réadapté?* C'est ce qui allait être fait progressivement grâce aux travaux de **Lorentz, Poincaré et Einstein.**

1.3.6 Vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide est une constante fondamentale de la physique, essentielle en relativité restreinte, comme *la constante de Planck* en mécanique quantique ou *la constante gravitationnelle* en relativité générale. La première tentative de mesure fut réalisée par Galileo Galilei, mais sans résultat concluant. En 1676, Ole Rømer estima cette vitesse en observant les éclipses du satellite **Io** de Jupiter, obtenant environ 215000 km/s . En 1849, Hippolyte Fizeau mesura 315000 km/s grâce à un dispositif avec roue dentée et miroir. Aujourd'hui, la vitesse de la lumière est fixée par convention à $c = 299792458 \text{ m/s}$. Cela entraîne une nouvelle définition du **mètre** qui devient :

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de seconde.

En 1967, la définition suivante de la seconde a été adoptée :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (^{133}Cs).

L'erreur relative faite en assimilant la vitesse de la lumière à 300000 km/s est inférieure à $0,1\%$.

RELATIVITE DU TEMPS ET DE L'ESPACE

LA transformation de Galilée nous semble naturelle car elle est une transposition mathématique de notre perception immédiate. Il en est de même pour la loi d'addition des vitesses. Admettre que cette loi ne soit pas vérifiée par la lumière, mais conduite à la notion de vitesse limite, échappe à notre sensibilité, car nous n'avons aucune expérience directe des vitesses très grandes, de l'ordre de celle de la lumière. Seules la réflexion et la logique permettent d'explorer les propriétés de notre monde qui échappent à nos sens.

L'expérimentation contredit nos idées habituelles sur l'addition des vitesses. Or, la vitesse est définie comme le rapport entre deux intervalles : l'un d'espace, l'autre de temps. Les propriétés de l'espace et du temps sont donc directement impliquées dans cette nouvelle loi de la nature. Les notions newtoniennes d'espace et de temps absolus vont devoir être remises en cause.

2.1 POSTULATS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Un certain nombre de postulats également appelés **principes** ou **hypothèses** servent à fonder la relativité restreinte.

2.1.1 Propriétés de l'espace-temps

Toute la physique classique étudie les systèmes et les phénomènes dans le cadre de l'espace absolu newtonien. Celui-ci est conçu comme une immense scène où se déroulent, dans *le temps absolu*, tous les événements de l'Univers.

La relativité restreinte continue d'utiliser un cadre spatio-temporel abstrait, *mais l'espace et le temps ne sont plus considérés comme absolus et deviennent étroitement liés l'un à l'autre*. C'est un nouveau cadre dans lequel les lois de la nature peuvent être décrites de manière plus cohérente. Ce cadre se réduit à l'ancien lorsque les vitesses des systèmes considérés sont faibles par rapport à celle de la lumière.

Tous les événements physiques étant situés à la fois dans l'espace et le temps, ils sont déterminés par **quatre coordonnées, trois d'espace et une de temps**. L'espace ponctuel à quatre dimensions ainsi conçu est appelé *l'espace-temps*. C'est un espace abstrait qui reste indépendant de l'existence de la matière.

► Homogénéité de l'espace-temps

En relativité restreinte, puisque l'on ne considère pas a priori l'influence de la matière sur l'espace-temps, on postule que :

L'espace-temps est homogène, c'est-à-dire qu'il a les mêmes propriétés en chaque point de l'espace et à tout instant.

Autrement dit, l'espace et le temps sont invariants par translation ; les origines des référentiels d'espace-temps sont arbitraires pour l'expression des lois physiques.

► Isotropie de l'espace

Un milieu est dit **isotrope** lorsque ses propriétés sont indépendantes de toute direction. On postule, en relativité restreinte, que :

L'espace est isotrope, c'est-à-dire que toutes les directions dans l'espace sont physiquement équivalentes.

Autrement dit, après rotation dans l'espace d'un référentiel, celui-ci reste équivalent au référentiel d'origine.

2.1.2 Principe de relativité

Nous avons vu, au cours du premier chapitre, que les lois de la mécanique classique sont invariantes dans tous les référentiels d'inertie. Cependant, un désaccord apparaît entre observation et calcul théorique dans l'expérience de Michelson et Morley. Comment l'expliquer ?

L'expression des différences des temps de propagation de la lumière dans cette expérience s'obtient en supposant que **la loi galiléenne d'addition des vitesses** est valable pour les rayons lumineux. Or, comme nous l'avons déjà vu, les équations de Maxwell qui régissent le comportement de la lumière, contrairement aux équations de la mécanique classique, ne sont pas invariantes sous l'action des transformations de Galilée.

Comment concilier alors la mécanique classique de Newton, la théorie électromagnétique de Maxwell, la relativité galiléenne et les résultats de l'expérience de Michelson et Morley ? Plusieurs solutions étaient possibles pour les scientifiques du XIX^e siècle :

- Admettre que la théorie électromagnétique de Maxwell était fautive ;
- Rendre compatibles les postulats de la mécanique classique et de l'électromagnétisme ;
- Admettre que les postulats de la mécanique classique étaient faux.

Après plusieurs séries d'expériences, il a été révélé que c'est finalement la troisième voie qui est correcte : **reconnaître que la mécanique classique se fonde sur des postulats à abandonner**. Cette évolution a été progressive, avec des scientifiques comme FitzGerald, puis Lorentz et Poincaré. Cependant, **c'est Einstein, en 1905** (alors âgé de 26 ans) qui franchit le pas décisif en postulant le **caractère non absolu du temps et de l'espace**.

Einstein élabore une nouvelle mécanique qui permet d'expliquer l'ensemble des résultats théoriques et expérimentaux concernant les ondes électromagnétiques. Cette théorie, **la relativité restreinte**, repose sur deux postulats extrêmement simples :

Postulat 1 : Principe de la relativité

Les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, que l'observateur soit fixe ou entraîné dans un mouvement de translation uniforme.

Ce principe, postulant que la forme des lois doit être invariante dans tous les référentiels d'inertie, est également appelé **principe d'invariance**. En relativité restreinte, on postule donc que les référentiels équivalents sont des référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Ainsi, aucune expérience de physique réalisée dans un référentiel d'inertie ne permet de déceler le mouvement de ce référentiel : il n'existe ni état de mouvement absolu ni vitesse absolue. **Le seul mouvement observable est le mouvement relatif d'un objet par rapport à un autre.**

Postulat 2 : Universalité de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels. Elle ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.

Ce second postulat interdit de mesurer la vitesse de la lumière par rapport à un hypothétique référentiel absolu. Ces deux postulats impliquent que *les lois de transformations de Galilée doivent être remplacées par de nouvelles lois qui laissent, en particulier, invariante l'équation de propagation des ondes électromagnétiques.*

2.1.3 Causalité

Un principe fondamental de la physique est celui de **la causalité**. L'idée de cause est associée à toute recherche conceptuelle visant à rendre intelligible l'origine et le devenir de tout ce qui existe, et donc au postulat de l'existence de lois naturelles.

En particulier, si un phénomène \mathcal{A} est la cause d'un autre phénomène \mathcal{B} , alors \mathcal{A} doit se produire avant \mathcal{B} . Pour de tels couples de phénomènes, l'énoncé " **\mathcal{B} a lieu après \mathcal{A}** " est intrinsèque, c'est-à-dire valable quel que soit le référentiel considéré. **La notion de causalité doit donc être maintenue comme postulat en relativité restreinte.**

2.2 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ SPECIALES

Les transformations de Lorentz est un outil qui permet de passer d'un repère inertiel à un autre en évaluant les positions et vitesses des objets dans un repère inertiel à partir des mesures de positions et de vitesses de ces mêmes objets effectuées par un observateur se situant dans un autre repère inertiel. Ainsi, dans le premier chapitre, nous avons vu que les transformations de Galilée doivent être remplacées par de nouvelles transformations qui, en particulier, laissent invariante l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. Ces transformations sont appelées **transformations de Lorentz**.

2.2.1 Notion d'événement

Un événement est un phénomène physique supposé "**infiniment**" localisé dans l'espace et dans le temps, son étendue étant réduite à un point et sa durée à un instant infiniment court.

Dans un référentiel donné, un événement sera complètement caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (x, y, z) et le temps t , indiqué par une horloge immobile de ce référentiel au moment où se produit cet événement.

Un événement peut donc être représenté par **un point** d'un espace à quatre dimensions, appelé **espace-temps** (voir chapitre 3). Ses coordonnées sont (t, x, y, z) ou (ct, x, y, z) , la **coordonnée temporelle** ayant dans cette dernière notation *la même dimension que les coordonnées spatiales*.

Si un événement a pour coordonnées (t, x, y, z) dans un référentiel d'inertie \mathcal{R} et pour coordonnées (t', x', y', z') dans un autre référentiel d'inertie \mathcal{R}' , alors on peut faire correspondre à cet événement les coordonnées respectives (ct, x, y, z) et (ct', x', y', z') **car la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie.**

Dans la suite, les trois coordonnées spatiales seront toujours rapportées à un repère cartésien orthonormé. L'origine spatiale d'un référentiel désignera le point de l'espace $(x = 0, y = 0, z = 0)$ à un instant quelconque. Le point de l'espace-temps qui a pour coordonnées $(t = 0, x = 0, y = 0, z = 0)$ sera appelé **origine spatio-temporelle du repère**. Ces deux origines seront indifféremment notées \mathcal{O} .

2.2.2 Transformations homogènes

Nous savons que la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de la source et de l'observateur.

- Considérons un observateur immobile dans un référentiel inertiel \mathcal{R} , mesurant les positions et le temps par x, y, z, t .
- Supposons qu'une source lumineuse ponctuelle, située à l'origine spatiale \mathcal{O} de \mathcal{R} , émette à l'instant $t = 0$ une impulsion lumineuse sphérique.
- À un instant ultérieur t , le front d'onde sphérique de rayon R satisfait :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (2.1)$$

Considérons maintenant un second référentiel \mathcal{R}' , animé d'une vitesse \vec{V} par rapport à \mathcal{R} , avec des coordonnées x', y', z', t' .

- Supposons que les origines \mathcal{O} et \mathcal{O}' coïncident à $t = t' = 0$, c'est-à-dire que le front d'onde est émis simultanément depuis l'origine dans les deux référentiels.
- Dans \mathcal{R}' , le front d'onde sphérique satisfait :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2.2)$$

- La vitesse de la lumière c étant la même dans les deux référentiels, on définit les **transformations de Lorentz** comme les changements de coordonnées :

$$\begin{aligned} t &= t(t', x', y', z') \\ x &= x(t', x', y', z') \\ y &= y(t', x', y', z') \\ z &= z(t', x', y', z') \end{aligned} \quad (2.3)$$

de façon à transformer l'équation (2.1) en (2.2) :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \iff c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (2.4)$$

Homogénéité de l'espace et du temps :

- On suppose que l'espace et le temps sont homogènes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'origine spatio-temporelle absolue.
- Cette hypothèse entraîne la **linéarité** des transformations. En effet, une transformation non linéaire (par exemple $t = St'^2$) conduirait à des intervalles temporels différents selon le choix de l'origine, ce qui est incompatible avec l'homogénéité.
- Conclusion : *les transformations de Lorentz doivent être linéaires, pour l'espace comme pour le temps.*

Forme générale de la transformation :

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \kappa (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \quad (2.5)$$

Hypothèses supplémentaires pour déterminer κ :

- ▶ **Homogénéité** : Les propriétés de l'espace vide sont identiques partout et pour toujours.
- ▶ **Isotropie spatiale** : Les propriétés de l'espace sont les mêmes dans toutes les directions.
- ▶ Les propriétés extrinsèques des règles et horloges peuvent dépendre de leur état de mouvement, mais pas de leur état à un autre instant.

Conséquences :

- Le coefficient κ ne peut dépendre que de la vitesse relative \vec{V} entre les référentiels, et seulement de sa magnitude, pas de sa direction.
- Considérant trois référentiels $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$, avec vitesses relatives $\vec{V}_{12}, \vec{V}_{23}, \vec{V}_{13}$, on obtient :

$$\kappa(|\vec{V}_{13}|) = \kappa(|\vec{V}_{12}|) = \kappa(|\vec{V}_{23}|) \quad (2.6)$$

- Comme κ doit rester constant, on a $\kappa = 1$ et donc :

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.7)$$

- Ces transformations sont dites **homogènes**. Les origines spatiales et temporelles coïncident dans les deux référentiels :

$$x = y = z = ct = 0 \iff x' = y' = z' = ct' = 0$$

Dans un référentiel inertiel, t est la coordonnée temporelle, (x, y, z) les coordonnées spatiales et c la vitesse de la lumière. **Les transformations de Lorentz homogènes sont linéaires et laissent invariante la forme quadratique $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.**

2.2.3 Transformations spéciales

Nous allons déterminer la forme explicite d'une **rotation d'espace-temps** dans une situation physique particulière.

- Deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont reliés par **une transformation de Lorentz spéciale** si :
 - Leurs axes sont parallèles deux à deux.
 - Leur mouvement relatif est parallèle à un des axes (ici Ox).
 - Les origines spatiales \mathcal{O} et \mathcal{O}' coïncident à $t = t' = 0$.
- Cette configuration est illustrée sur la figure 2.1.
- Dans \mathcal{R} , la vitesse de \mathcal{R}' est :

$$V_x = V, \quad V_y = V_z = 0$$

- Les coordonnées d'un même événement sont (t, x, y, z) dans \mathcal{R} et (t', x', y', z') dans \mathcal{R}' .

Transformation de Galilée (pour comparaison) :

$$t = t', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.8)$$

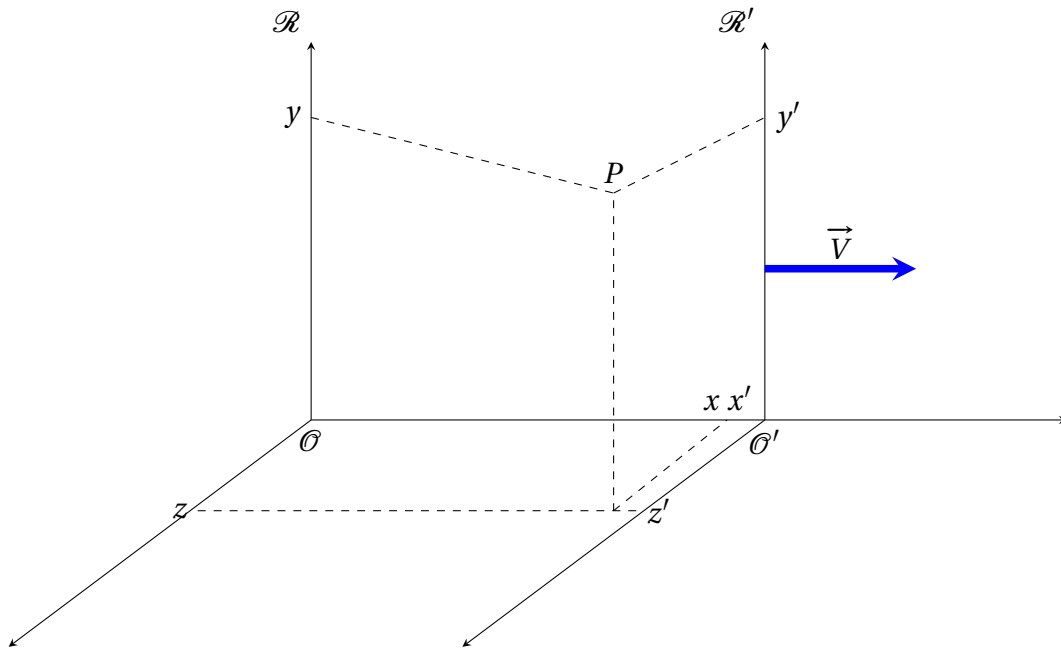


Figure 2.1: Référentiels d'inertie unis par une transformation spéciale de Lorentz.

Transformation spéciale de Lorentz :

- On suppose la linéarité et que les coordonnées y et z restent inchangées :

$$ct = Act' + Bx', \quad x = Cct' + Dx', \quad y = y', \quad z = z' \tag{2.9}$$

- Les coefficients A, B, C, D sont déterminés par l'invariance de la forme quadratique (2.7) :

$$A^2 - C^2 = 1, \tag{2.10a}$$

$$B^2 - D^2 = -1, \tag{2.10b}$$

$$AB - CD = 0 \tag{2.10c}$$

- En introduisant le paramètre θ (la rapidité), on obtient :

$$A = D = \cosh \theta, \quad B = C = \sinh \theta$$

Transformations de Lorentz le long de Ox :

$$ct = \cosh \theta ct' + \sinh \theta x', \quad x = \sinh \theta ct' + \cosh \theta x', \quad y = y', \quad z = z' \tag{2.11}$$

Lien entre rapidité et vitesse relative V :

$$\frac{V}{c} = \tanh \theta, \quad \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \sinh \theta = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2.12}$$

Avec les conventions (2.12), on a $\cosh \theta = \gamma$, $\sinh \theta = \beta\gamma$ et $\tanh \theta = \beta$. Les transformations de Lorentz spéciales s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x'), \\ x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Les transformations (2.13) relient donc les coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) d'un événement \mathcal{E} dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} aux coordonnées spatio-temporelles (ct', x', y', z') du même événement \mathcal{E} dans le référentiel d'inertie \mathcal{R}' .

On peut également montrer que:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.14)$$

- Le facteur γ implique $|V| < c$.
- Pour $V \ll c$, les transformations se réduisent aux transformations de Galilée :

$$t \approx t', \quad x \approx x' + Vt' \quad (2.15)$$

- Les coordonnées temporelles et spatiales ne sont plus absolues : le temps d'un observateur est un mélange du temps et de l'espace d'un autre.
- L'espace et le temps forment une seule entité : **l'espace-temps**.

2.2.4 Loi de composition des vitesses

- Considérons un mobile de vitesse \vec{v}' dans \mathcal{R}' , entraîné à la vitesse \vec{V} (selon Ox) par rapport à \mathcal{R} .
- En différentiant les transformations de Lorentz, on obtient :

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right), \quad (2.16a)$$

$$dx = \gamma (dx' + V dt'), \quad (2.16b)$$

$$dy = dy', \quad (2.16c)$$

$$dz = dz'. \quad (2.16d)$$

- Les composantes de la vitesse dans \mathcal{R} sont :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, & v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v_y &= \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)}, & \text{ou} & \quad v'_y &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}, \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)}, & v'_z &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Remarques

- Les composantes transverses v_y et v_z ne sont pas invariantes.
- Le vecteur vitesse ne se transforme pas comme le vecteur position ; il nécessite le concept

2.3 RELATIVITE DU TEMPS

2.3.1 Dilatation des temps

Les résultats de l'expérience de Michelson et Morley peuvent être très simplement expliqués par l'application du second postulat d'Einstein. Si la vitesse de la lumière est identique dans tous les référentiels d'inertie, alors les temps de propagation des rayons lumineux le long des deux bras de l'interféromètre sont donnés par

$$t_1 = t_3 = \frac{2\ell_1}{c} \quad t_2 = t_4 = \frac{2\ell_2}{c} \quad (2.18)$$

Une conséquence immédiate, et *a priori* surprenante, des postulats d'Einstein est qu'il n'existe pas de temps absolu et que l'écoulement du temps dépend de l'état de mouvement de l'observateur par rapport à un système de référence donné.

Il est possible d'illustrer simplement ce phénomène en construisant *mentalement* une horloge battant la mesure du temps au moyen de photons.

Imaginons deux miroirs parallèles se faisant face l'un positionné au-dessus de l'autre séparés par une distance d . Un observateur du référentiel propre \mathcal{R}' de ces deux miroirs observe un photon effectuant des allers-retours perpendiculairement aux miroirs. L'aller définit le "tic" et le retour le "tac" de l'horloge (voir figure 2.2).

Ce dispositif est appelé *horloge à photons*, ou encore *horloge d'Einstein-Langevin* ou *horloge de Feynman*. Ce modèle conceptuel d'horloge est souvent utilisé pour illustrer les effets relativistes car son fonctionnement repose directement sur la propagation de la lumière.

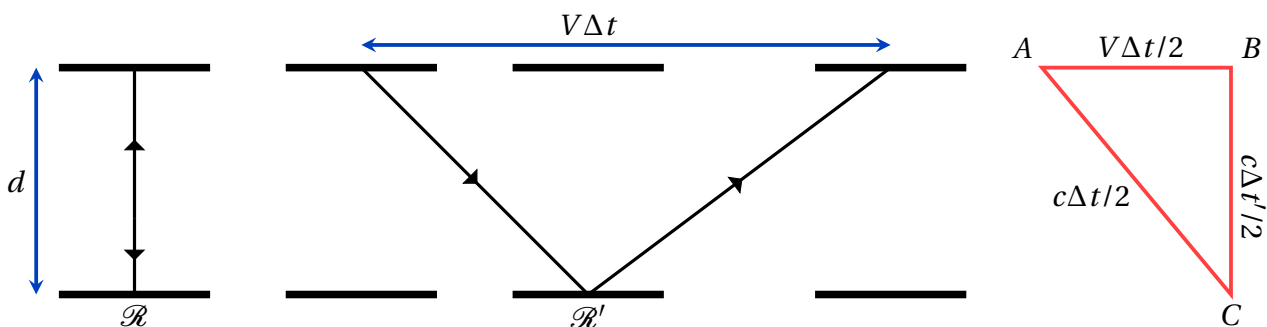


Figure 2.2: Trajets aller-retour du photon dans l'horloge à photons pour les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Dans le référentiel propre \mathcal{R}' , le photon se déplace verticalement entre les deux miroirs. Le temps nécessaire pour un aller-retour est donc simplement

$$\Delta t' = 2 \frac{d}{c} \quad (2.19)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Supposons maintenant que le référentiel \mathcal{R}' soit animé d'une vitesse constante \vec{V} parallèle aux miroirs par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Un observateur dans \mathcal{R} ne verra plus le photon se déplacer verticalement entre les miroirs. Il observera au contraire une trajectoire oblique, comme indiqué sur la figure 2.2.

Un aller-retour dans le référentiel \mathcal{R} prend évidemment plus de temps que dans le référentiel \mathcal{R}' , car le photon se déplace toujours à la même vitesse c mais doit parcourir une distance plus grande.

Appelons Δt le temps d'un aller-retour dans le référentiel \mathcal{R} . La distance D parcourue par le photon est alors

$$D = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (2.20)$$

Par de simples manipulations algébriques, il est possible de relier Δt et $\Delta t'$, c'est-à-dire le temps d'un aller-retour dans le référentiel \mathcal{R} (où l'horloge est mobile) et dans le référentiel \mathcal{R}' (où elle est stationnaire).

On retrouve la même relation en examinant la figure 2.2 et en appliquant simplement le théorème de Pythagore $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. On obtient finalement

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.21)$$

Notons que cette équation se réduit bien à $\Delta t = \Delta t'$ lorsque $V = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux référentiels sont immobiles l'un par rapport à l'autre.



Dilatation des temps

La relation (2.21) est la fameuse formule d'Einstein de *dilatation des temps*. Elle montre que

$$\Delta t \geq \Delta t'$$

et que $\Delta t \rightarrow \infty$ lorsque $V \rightarrow c$.

Tout se passe donc comme si l'horloge à photons en mouvement battait la mesure du temps plus lentement qu'une horloge identique dans un référentiel où elle est au repos.

Lorsque $V > c$, l'équation (2.21) indique que l'intervalle de temps Δt devient imaginaire, ce qui constitue déjà une indication mathématique qu'il est *impossible de dépasser la vitesse de la lumière*.

2.3.2 Relativité de la simultanéité

Considérons deux événements de coordonnées respectives (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) ayant lieu dans un référentiel \mathcal{R} .

Supposons que ces événements soient *simultanés* dans \mathcal{R} , c'est-à-dire tels que $t_1 = t_2$. Autrement dit, la durée entre ces deux événements est nulle :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.$$

Il n'en sera pas de même dans un référentiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} .

Pour le voir, calculons la durée $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ dans \mathcal{R}' . D'après les transformations de Lorentz (2.14), on a

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2} \right) \quad \text{et} \quad t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2} \right) \quad (2.22)$$

d'où

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) = -\gamma \frac{V}{c^2} \Delta x \quad (2.23)$$

Puisque les deux événements ne sont pas localisés au même point de l'espace, on a en général

$$\Delta x = (x_2 - x_1) \neq 0, \quad \text{et par conséquent} \quad \Delta t' \neq 0. \quad (2.24)$$

Simultanéité

Deux événements ayant lieu en des points différents de l'espace, qui sont simultanés dans un référentiel \mathcal{R} , ne le sont plus dans tout autre référentiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} .

La notion de simultanéité perd ainsi son caractère universel. En *mécanique classique*, la simultanéité de deux événements est la même dans tous les référentiels puisque $t = t'$.

La formule (2.23) montre que ce postulat du temps absolu est vérifié seulement dans la limite où l'on considère que la vitesse de la lumière c devient infinie.

2.3.3 Durées propre et impropre

La durée $\Delta t'$ entre deux événements situés au même point de l'espace, mesurée par une seule horloge H' fixe dans son référentiel \mathcal{R}' , est appelée **durée propre**. L'horloge H' mesure ainsi **le temps propre** du lieu où elle est fixée.

La durée Δt entre deux événements mesurée en deux endroits différents par deux horloges distinctes H_1 et H_2 , fixes dans leur référentiel, est appelée **durée impropre**.

Différentes horloges d'un même référentiel, placées en des positions différentes mais immobiles les unes par rapport aux autres, mesurent le temps propre à ce référentiel.

On a la relation suivante entre la durée propre et la durée impropre associées à deux mêmes événements :

$$\text{durée propre} < \text{durée impropre}$$

Autrement dit, une horloge qui mesure la durée propre entre deux événements enregistre une durée plus courte que deux horloges distinctes mesurant une durée impropre entre ces mêmes événements.

Un point de vue simplifié consisterait à dire que l'horloge de \mathcal{R}' , en mouvement par rapport à \mathcal{R} , "**retarde**" par rapport aux horloges immobiles dans \mathcal{R} , c'est-à-dire qu'elle ne bat plus au même rythme que les horloges de \mathcal{R} .

Il n'en est cependant rien puisque les trois horloges sont, par hypothèse, strictement identiques ; elles fonctionnent donc de la même manière dans tous les référentiels inertiels équivalents vérifiant le principe de relativité.

On peut d'ailleurs remarquer que toute horloge est immobile dans son propre référentiel.

On pourrait être tenté de dire que la durée “réelle” d’un phénomène est sa durée propre, mais encore faudrait-il définir précisément ce que l’on entend par “réalité”. Les durées impropres seraient-elles alors “non réelles” ? Cette question illustre le caractère relatif des mesures temporelles en relativité restreinte.

2.3.4 Mesures des positions et des temps, synchronisation des horloges

Dans un référentiel d’inertie \mathcal{R} , les coordonnées spatio-temporelles d’un événement sont mesurées **localement** par un observateur muni de son horloge, au repos dans ce référentiel : il enregistre la coïncidence entre l’événement qui se produit à l’endroit où il se trouve et le temps indiqué par son horloge.

Le deuxième postulat (Postulat 2 de la section 2.1.2 du chapitre précédent) permet de définir l’unité de longueur à partir de l’unité de temps.

L’observateur peut par exemple mesurer la distance qui le sépare de l’origine spatiale \mathcal{O} de son référentiel en faisant réfléchir un signal lumineux sur un miroir placé en \mathcal{O} . La distance est alors **le produit par $c/2$ du temps écoulé entre l’émission du signal lumineux et la réception du signal réfléchi**.

Dans ce référentiel \mathcal{R} , on peut synchroniser toutes les horloges qui y sont au repos. En effet, puisque la vitesse de la lumière est une constante universelle, il suffit de placer au milieu du segment reliant deux horloges une source qui, à un instant quelconque, envoie un signal lumineux dans toutes les directions. Les deux horloges considérées sont synchronisées si elles indiquent le même temps à la réception de ce signal, puisque la vitesse de la lumière est identique dans toutes les directions (voir figure 2.3).

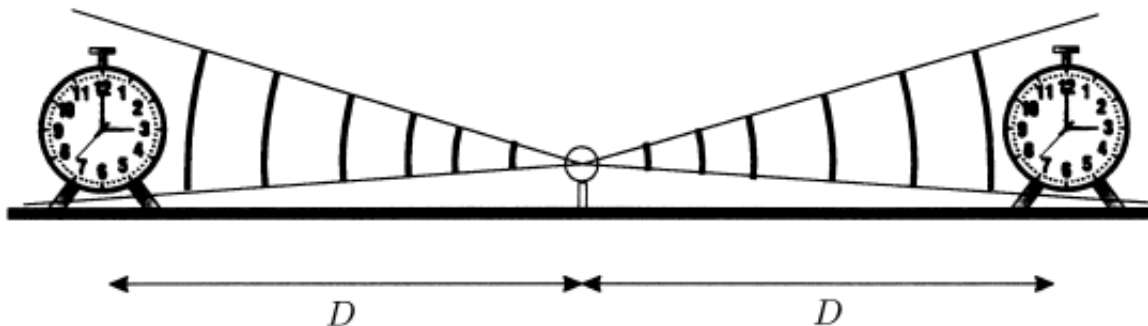


Figure 2.3: Synchronisation de deux horloges au repos dans un référentiel d’inertie au moyen de signaux lumineux

Ce protocole de synchronisation permet d’éviter le déplacement des horloges, empêchant ainsi le phénomène de dilatation des temps d’affecter leur fonctionnement. Le processus de synchronisation repose en réalité sur la propriété suivante: **le temps s’écoule de la même façon pour toutes les horloges parfaites et identiques immobiles les unes par rapport aux autres dans un même référentiel d’inertie**.

L’horloge située par exemple à l’origine spatiale peut servir de référence pour la synchronisation de toutes les horloges de notre “cristal d’horloges” par le protocole précédent ou par tout autre protocole équivalent. Les mesures de temps et de distances peuvent s’effectuer suivant les mêmes principes dans un autre référentiel d’inertie \mathcal{R}' . Le premier postulat garantit en effet que tous les observateurs inertiels peuvent construire des horloges équivalentes basées sur le même étalon de fréquence.

De plus, il assure que les lois de la physique ne dépendent pas du choix de cet étalon. On peut également synchroniser toutes les horloges au repos dans cet autre référentiel d’inertie. Toutefois, nous

avons vu qu'il fallait abandonner la notion de temps absolu.

Cela signifie que *le temps indiqué par les horloges au repos dans le référentiel \mathcal{R}' ne peut en général pas être identique au temps indiqué par les horloges au repos dans le référentiel \mathcal{R} .*

2.4 RELATIVITÉ DES LONGUEURS

Considérons une règle rigide fixe dans un référentiel \mathcal{R} et placée le long de l'axe Ox . Ses extrémités A et B sont situées respectivement aux abscisses x_1 et x_2 . La longueur de la règle est alors

$$L_p = x_2 - x_1 \quad (2.25)$$

La longueur L_p est appelée **longueur propre** de la règle, et le référentiel \mathcal{R} , par rapport auquel la règle est immobile, est appelé **référentiel propre** de cette règle. *Comment comparer la longueur de cette règle, fixe dans \mathcal{R} , avec sa longueur mesurée dans un référentiel \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse V selon l'axe des X croissants par rapport à \mathcal{R} ?*

Pour cela, il faut déterminer les coordonnées des extrémités A et B de la règle dans le référentiel \mathcal{R}' , notées respectivement x'_1 et x'_2 . Les mesures de ces deux coordonnées doivent être effectuées **au même instant** dans \mathcal{R}' , puisque la règle est en mouvement dans ce référentiel.

Notons $L' = x'_2 - x'_1$ la longueur de la règle dans \mathcal{R}' et t'_0 l'instant où ces coordonnées sont mesurées.

La transformation de Lorentz donne :

$$x_1 = \gamma(x'_1 + V t'_0), \quad x_2 = \gamma(x'_2 + V t'_0) \quad (2.26)$$

La différence entre ces coordonnées donne alors la longueur propre :

$$L_p = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L' \quad (2.27)$$

On retrouve ainsi **le phénomène de relativité des longueurs**. La longueur L' de la règle en mouvement par rapport à l'observateur de \mathcal{R}' est appelée **longueur impropre**.

On a alors

$$\text{longueur impropre} < \text{longueur propre}$$

La longueur propre d'une règle est toujours plus grande que sa longueur impropre.

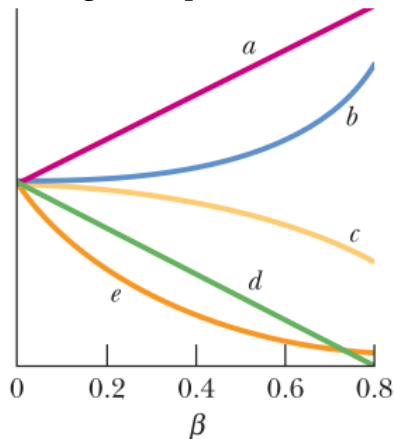
Il existe évidemment une infinité de longueurs impropres puisque l'on peut donner à la vitesse V toute valeur inférieure à c .

Notons que la détermination d'une longueur impropre correspond en réalité à la mesure d'une distance entre deux événements. Dans le cas présent, ces deux événements sont le passage simultané (dans \mathcal{R}') des extrémités de la règle aux abscisses x'_1 et x'_2 .

Remarquons enfin que *la longueur propre d'une règle placée **perpendiculairement à l'axe Ox** dans un référentiel \mathcal{R} reste identique à sa longueur mesurée dans un autre référentiel d'inertie \mathcal{R}' en translation selon l'axe des x .* Ce résultat exprime **l'invariance des dimensions transversales**.

EXERCICES

1. Une tige se déplace à vitesse constante v le long de l'axe des x du référentiel \mathcal{R} , la longueur de la



tige étant parallèle à cet axe. Un observateur dans le référentiel \mathcal{R} mesure la longueur L de cette tige. Laquelle des courbes de la Figure ci-contre donne le mieux la longueur L (axe vertical du graphique) en fonction du paramètre de vitesse β ?

2. À huit chiffres significatifs, quel est la valeur du paramètre de vitesse β si le facteur de Lorentz γ est (a) 1,0100000, (b) 10,000000, (c) 100,00000, et (d) 1000,0000 ?
3. Vous souhaitez faire un voyage aller-retour depuis la Terre dans un vaisseau spatial, en voyageant à vitesse constante en ligne droite pendant exactement 6 mois (comme vous mesurez l'intervalle de temps) puis en revenant à la même vitesse constante. Vous souhaitez en outre, à votre retour, retrouver la Terre telle qu'elle sera exactement 1000 ans plus tard. à huit chiffres significatifs près, à quel paramètre de vitesse β devez-vous voyager ?
4. Trouvez dans le référentiel \mathcal{R}' le temps où se produit un événement qui arrive dans \mathcal{R} pour $x = 95\text{ m}$, $y = 65\text{ m}$, $z = 33\text{ m}$ et $t = 25\text{ m}$. L'événement se produit à $x' = 125\text{ m}$ dans \mathcal{R}' . La vitesse entre les \mathcal{R} et \mathcal{R}' est de 0,8 selon l'axe des x . Donner la matrice de transformation des coordonnées de \mathcal{R} à celles de \mathcal{R}' .
5. Le savant Paul Langevin imaginait (1911) un cosmonaute qui quitterait la Terre avec une vitesse avoisinant celle de la lumière et qui y reviendrait au bout de deux ans de son temps propre, en conclut qu'il trouverait, à son retour, la Terre vieillie de deux siècles. Ainsi, d'après ce raisonnement, deux frères jumeaux, de 35 ans: Jf est resté sur Terre et Jm parti faire un tour et revenu voir son frère après 9 ans passés en fusée ultra-rapide ($4/5$ de la vitesse de la lumière). On demande les âges respectifs des jumeaux aux retrouvailles relativistes?
6. Une règle d'un mètre fonce vers nous et paraît mesurer 0.5 m. Quelle est sa vitesse?
7. Considérons deux trains A et B , voyageant sur un même axe, vers la droite, à des vitesses $v(A) = \frac{4}{5}c$ et $v(B) = \frac{3}{5}c$, et ayant tous les deux une longueur propre L . A est initialement loin derrière B mais le rattrape progressivement car plus rapide. Selon un observateur immobile C , quelle sera la durée entre
 - (i) le moment où l'avant de A coïncide avec l'avant de B et
 - (ii) le moment où l'arrière de A coïncide avec l'avant de B ? On cherche donc la durée de dépassement de B par A , en fonction de L et de c .
8. Après avoir synchronisé leurs horloges, une fusée avec à son bord un observateur (O') - référentiel (\mathcal{R}') - quitte un observateur terrestre (O) - référentiel (\mathcal{R}) - avec la vitesse \vec{v} . Au bout d'un temps t_1 , mesuré dans le référentiel de (\mathcal{R}), une seconde fusée avec à son bord un observateur (O'') - référentiel (\mathcal{R}'') - quitte à son tour la Terre avec une vitesse \vec{u} . On considère que \vec{v} et \vec{u} ont même direction et même sens et que, en module, $u > v$. Dans le référentiel terrestre (\mathcal{R})

l'observateur (O'') rattrape (\mathcal{O}') à l'instant t_2 .

- (1) Calculer t_2 en fonction de t_1 , u et v
 - (2) Pour les horloges au repos dans (\mathcal{R}') à quel instant (O'') a-t-il quitté la Terre?
 - (3) Pour les horloges au repos dans (\mathcal{R}') à quel instant (O'') a-t-il rattrapé (\mathcal{O}')?
 - (4) Déterminer dans le référentiel (\mathcal{R}') la distance séparant (\mathcal{O}') de (\mathcal{O}) à l'instant où (O'') rattrape (\mathcal{O}').
 - (5) En déduire l'expression de la vitesse de (O'') quand elle est mesurée par (\mathcal{O}').
9. Un observateur (\mathcal{O}') à bord d'une fusée croise selon un mouvement rectiligne uniforme un autre observateur terrestre (\mathcal{O}) à la vitesse $v = 0,6c$. Les horloges de (\mathcal{O}) et de (\mathcal{O}') sont synchronisées et mises à zéro au moment du croisement. Chaque minute, mesurée à bord de la fusée, (\mathcal{O}') émet un flash lumineux ($\Delta t'_1 = 1 \text{ min}$).
- (1) Quelle est la période Δt_1 d'émission par (\mathcal{O}') des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O})?
 - (2) Quelle est la période Δt_2 de réception par (\mathcal{O}) des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O})?
 - (3) Quelle est la période $\Delta t'_2$ de réception par (\mathcal{O}) des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O}')?
10. (a) Un photon se déplace avec une vitesse $v' = c = 1$ dans la direction des x dans un repère \mathcal{R}' se déplaçant avec une vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$ dans \mathcal{R} . Déterminer sa vitesse dans \mathcal{R} .
- (b) Au cas où la vitesse du photon dans \mathcal{R} était dans la direction des y c'est-à-dire $v_y = c = 1$, quelle serait sa vitesse dans \mathcal{R}' .

L'ESPACE-TEMPS

LA position d'un point M immobile dans l'espace, représentant le lieu d'un événement, peut être déterminée par **trois coordonnées** x, y, z . De plus, pour chaque point M , il existe un nombre quelconque d'autres points situés au voisinage de M dont la position peut être déterminée par des coordonnées aussi proches que l'on veut de celles de M . On dit alors que l'espace est **un continuum** à trois dimensions.

Cependant, tous les événements physiques se déroulent également dans **le temps** t . Ils sont donc déterminés par **quatre coordonnées** x, y, z, t . L'ensemble des événements ainsi définis constitue également un continuum puisque, pour chaque événement donné, il existe un nombre quelconque d'autres événements, réalisés ou imaginés, dont les coordonnées diffèrent aussi peu que l'on veut de celles de l'événement considéré.

Ce continuum dans lequel se situent tous les événements est appelé **l'espace-temps**.

3.1 Intervalle entre deux événements

Considérons un premier événement consistant en l'émission d'un signal qui se propage à la vitesse c à partir d'un point de l'espace-temps de coordonnées t_1, x_1, y_1, z_1 dans un référentiel \mathcal{R} .

Un second événement correspond à l'arrivée de ce signal au point de coordonnées t_2, x_2, y_2, z_2 .

Le signal se propageant à la vitesse c , la distance ℓ_{12} parcourue pendant la durée $(t_2 - t_1)$ est donnée par

$$\ell_{12} = c(t_2 - t_1).$$

Cette distance ℓ_{12} peut également être exprimée à partir des coordonnées spatiales des deux événements :

$$\ell_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.1)$$

On peut donc écrire la relation suivante entre les coordonnées des deux événements dans le référentiel \mathcal{R} :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (3.2)$$

Observons maintenant la propagation de ce même signal dans un autre référentiel d'inertie \mathcal{R}' .

Notons t'_1, x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées du premier événement dans \mathcal{R}' , et t'_2, x'_2, y'_2, z'_2 celles du second événement.

La vitesse limite c étant la même dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , on obtient également

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Les quantités (3.2) et (3.3) conservant une même valeur nulle quel que soit le référentiel, on peut se demander si, pour des *événements quelconques*, la quantité suivante

$$(S_{12})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (3.4)$$

n'est pas invariante par une transformation de Lorentz.

C'est précisément le cas. En effet, si l'on transforme les coordonnées de \mathcal{R} apparaissant dans (3.4) en celles de \mathcal{R}' au moyen des formules (2.13), on obtient

$$(S'_{12})^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \quad (3.5)$$

La quantité S_{12} est appelée **l'intervalle entre les deux événements**.

Cette quantité possède la même valeur dans tous les référentiels d'inertie : c'est donc **un invariant vis-à-vis des transformations de Lorentz** lorsque l'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre.

Autrement dit, *l'intervalle est une grandeur indépendante de l'observateur.*

Pour des événements infiniment voisins, on a

$$t_2 - t_1 = dt, \quad x_2 - x_1 = dx, \quad y_2 - y_1 = dy, \quad z_2 - z_1 = dz$$

L'intervalle infinitésimal ds entre ces événements s'écrit alors sous la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.6)$$

Postulat 3

L'intervalle d'espace-temps entre deux événements, défini comme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2 \quad (3.7)$$

est un invariant dans tout référentiel inertiel, où c est une constante universelle dont la valeur est d'environ

$$3 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

3.2 Durée propre

Dans la section 2.3.3, nous avons appelé **temps propre d'un référentiel d'inertie** le temps mesuré par une horloge attachée en un point arbitraire de ce référentiel.

Plus généralement, considérons un corps animé d'un mouvement quelconque de vitesse \mathbf{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Ce mouvement peut être considéré comme une succession infinie de translations uniformes dont chacune s'effectue pendant un intervalle de temps dt à vitesse \mathbf{v} constante.

En conséquence, nous pouvons, à chaque instant t , attacher à ce corps en mouvement une horloge et un système de coordonnées qui, pendant un temps dt , définissent un autre référentiel $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$ en translation uniforme à la vitesse \mathbf{v} par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Pendant la durée impropre infiniment petite dt mesurée dans le référentiel \mathcal{R} , l'horloge mobile parcourt une distance $d\ell$ telle que

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2 \quad (3.8)$$

où v est la norme du vecteur vitesse \mathbf{v} .

Notons t', x', y', z' les coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$ et appelons τ le **temps propre mesuré** par l'horloge attachée à $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$.

Cette horloge étant fixe dans $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$, on a

$$dx' = dy' = dz' = 0 \quad (3.9)$$

L'intervalle ds' dans $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$, correspondant à ce déplacement infinitésimal de l'horloge dans \mathcal{R} , se réduit donc à

$$ds' = c d\tau \quad (3.10)$$

L'invariance de l'intervalle d'espace-temps permet alors d'écrire, compte tenu des relations (3.8) et (3.10) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2 = dt^2(c^2 - v^2) = ds'^2 = c^2 d\tau^2 \quad (3.11)$$

Cette relation conduit immédiatement à l'expression suivante de la durée propre dans $\mathcal{R}'(\mathbf{v})$ pour ce déplacement dans \mathcal{R} :

$$\frac{ds}{c} = d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma(v)} \quad (3.12)$$

Nous retrouvons ainsi **la relation entre les durées propre $d\tau$ et impropre dt** donnée également par la formule (2.21).

On appelle donc **temps propre** (τ) le temps séparant deux événements mesuré par l'horloge du référentiel dans lequel ces deux événements se produisent au même endroit (mêmes coordonnées d'espace).

La relation (3.12) est appelée **relation fondamentale du temps propre**.

Dans la relation (3.12), le coefficient $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ est en général une fonction du temps puisque $v = v(t)$. Le facteur de Lorentz correspondant vérifie alors

$$1 \leq \gamma \leq \infty.$$

Ainsi, les temps indiqués par une horloge en mouvement diffèrent de ceux indiqués par la même horloge lorsqu'elle est au repos.

Dans cette expression, \vec{v} représente la vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

d'un mobile qui parcourt l'élément de déplacement $d\vec{r}$ durant l'intervalle de temps dt .

Puisque $d\tau$ est un invariant relativiste, on peut écrire, par exemple, dans deux référentiels d'inertie différents \mathcal{R} et \mathcal{R}'

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = dt', \quad (3.13)$$

où le référentiel \mathcal{R}' coïncide avec le référentiel propre du mobile à l'instant considéré puisque $\vec{v} = \vec{0}$ à cet instant.

On voit donc que la grandeur $d\tau$ définie par la relation (3.12) mesure l'intervalle de temps infinitésimal qui s'écoule dans le référentiel propre du mobile alors qu'un observateur inertiel, qui voit le mobile animé d'une vitesse \vec{v} , mesure un intervalle de temps dt .

Il est important de noter que, contrairement à la vitesse relative \vec{V} entre deux référentiels d'inertie, la vitesse \vec{v} d'une particule n'est pas nécessairement constante. Dès lors, pour éviter toute confusion, nous utiliserons la notation explicite

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

La notation $\gamma = \gamma(V)$ sera réservée au facteur intervenant dans une transformation de Lorentz.

Considérons maintenant la ligne d'univers d'une particule animée d'un mouvement quelconque dans un référentiel \mathcal{R} . Durant le trajet de la particule, entre les instants t_1 et t_2 dans ce référentiel, une horloge constamment immobile par rapport à cette particule mesure un intervalle de temps propre fini $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ donné par

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt. \quad (3.15)$$

La quantité $\Delta\tau = (t'_2 - t'_1)$ représente l'intervalle de temps entre deux "ticks" d'une horloge dans le référentiel dans lequel cette horloge est au repos.

D'après l'équation (3.12), il s'ensuit que

$$\Delta\tau \leq \Delta t = (t_2 - t_1).$$

Ainsi, comme l'a montré l'équation (2.21),

les horloges mobiles fonctionnent plus lentement d'un facteur γ .

L'invariance de l'intervalle montre que la durée propre $d\tau$ est un invariant dans une transformation de Lorentz.

L'invariance de la durée propre constitue une autre manière d'exprimer que la marche de deux horloges identiques, placées respectivement dans deux référentiels d'inertie différents, reste physiquement la même conformément au principe de relativité.

Conclusions

Le *temps propre* entre deux événements est défini comme ***l'intervalle de temps séparant ces événements dans un référentiel où ils se produisent au même endroit.***

La durée indiquée par une horloge dans un référentiel où cette horloge est au repos est appelée *durée propre*.

Évidemment, le temps propre n'est pas défini entre deux événements séparés par une distance spatiale dans le référentiel considéré.

La durée $\Delta t'$ entre deux événements situés au même point, mesurée par une seule horloge H' fixe dans son référentiel \mathcal{R}' , est appelée ***durée propre***. L'horloge H' mesure donc le *temps propre* du point où elle est fixée.

La durée Δt entre deux événements mesurée en deux endroits différents par deux horloges distinctes H_1 et H_2 , fixes dans leur référentiel, est appelée ***durée impropre***.

Différentes horloges d'un même référentiel, placées en des points différents, mesurent *le temps du référentiel*.

On obtient ainsi la relation fondamentale entre durée propre et durée impropre pour deux mêmes événements :

$$\text{durée propre} < \text{durée impropre} \quad (3.16)$$

3.3 Relativité et géométrie: les diagrammes espace-temps

Pour introduire la géométrie de la relativité restreinte, nous utiliserons un outil graphique permettant de visualiser de manière intuitive les événements¹ et les phénomènes comme des positions dans l'espace-temps: c'est le ***diagramme espace-temps***, également appelé ***diagramme de Minkowski***.

Ce diagramme exploite la géométrie particulière de Minkowski, caractéristique de la relativité restreinte, pour représenter de façon claire les trajectoires des particules et des photons dans l'espace-temps.

3.3.1 Lignes d'univers et diagrammes espace-temps

3.3.1.1 Concepts fondamentaux

1. **Événement \mathcal{E}** : un événement est un point précis dans l'espace-temps, caractérisé par des coordonnées (ct, x, y, z) .

¹Les lettres cursives (\mathcal{E} , \mathcal{R} , \mathcal{P} , etc.) seront utilisées pour désigner les événements.

2. **Ligne d'univers de la lumière** : c'est la trajectoire d'un photon dans l'espace-temps. Elle apparaît sur un diagramme espace-temps comme une ligne inclinée à 45° par rapport à l'axe temporel, reflétant le fait que la lumière se déplace à la vitesse c .
3. **Ligne d'univers d'une particule matérielle** : c'est la trajectoire d'une particule ayant une vitesse $v \leq c$. Sur le diagramme, sa ligne d'univers forme un angle α avec l'axe du temps, inférieur à 45° . La vitesse de la particule est donnée par l'inverse de la pente de la ligne d'univers :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha$$

Le cadre naturel de la relativité restreinte est **l'espace-temps à quatre dimensions** (trois dimensions d'espace et une dimension temporelle). Chaque particule possède une **trajectoire** dans l'espace-temps, même si elle est immobile dans l'espace, appelée **ligne d'univers de la particule**.

De manière générale, on définit une ligne d'univers comme un ensemble continu d'événements (appelés aussi **points d'univers**) dans l'espace-temps, pouvant se paramétrer par un paramètre λ :

$$(ct, x, y, z) = (ct(\lambda), x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) \tag{3.17}$$

où t, x, y, z sont des fonctions de λ . Dans le cas le plus simple, λ peut être choisi comme la coordonnée temporelle t , de sorte que $t(\lambda) = t = \lambda$.

Par exemple, la ligne d'univers, entre les temps 0 et T , d'une particule de vitesse constante $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ passant par l'origine spatiale à $t = 0$ s'écrit :

$$(ct, x, y, z) = (ct, V_x t, V_y t, V_z t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.18}$$

3.3.1.2 Représentation graphique dans un espace-temps à deux dimensions

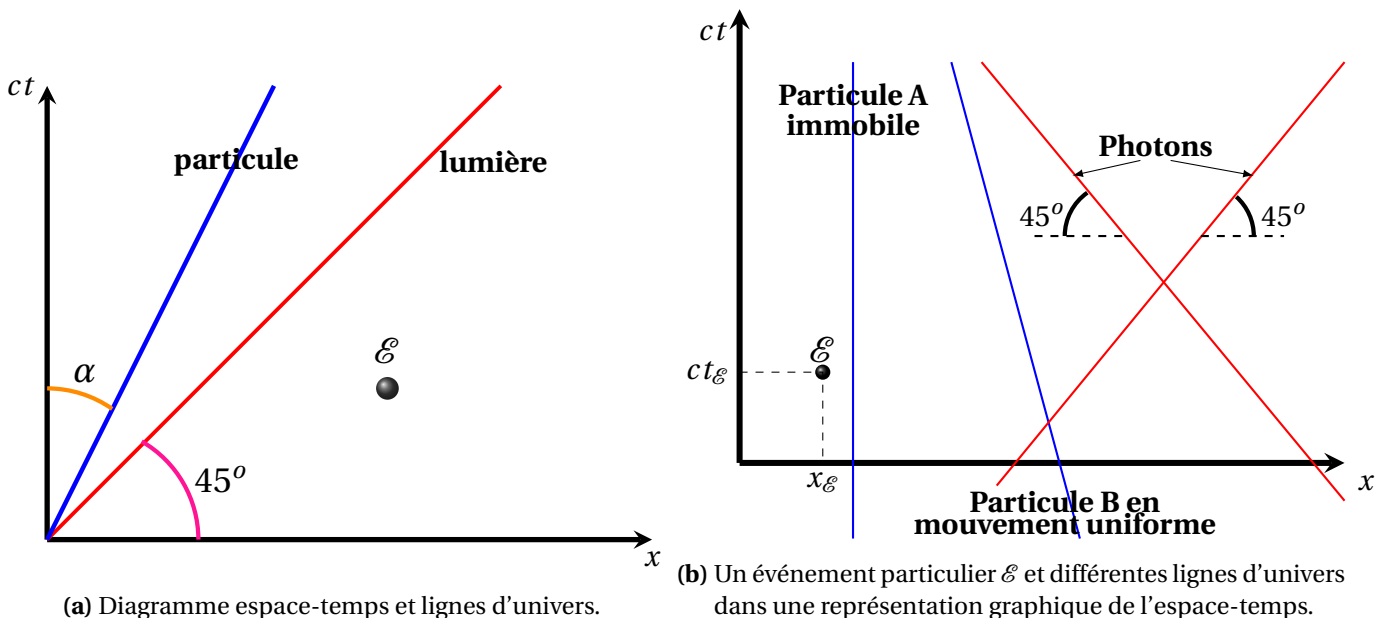


Figure 3.1

La figure 3.1 illustre une **représentation graphique d'un espace-temps à deux dimensions** pour un référentiel donné, où l'axe vertical correspond au temps (ct) et l'axe horizontal à l'espace (x). Elle permet de visualiser les **lignes d'univers**, c'est-à-dire les trajectoires dans l'espace-temps de différentes entités (particules matérielles ou photons) et un **événement particulier** \mathcal{E} .

La figure 3.1a - Diagramme espace-temps et lignes d'univers - montre de manière simplifiée la distinction entre les trajectoires d'un photon et d'une particule matérielle :

- La ligne rouge représente la **trajectoire d'un photon**, inclinée à 45° , indiquant que le photon se déplace à la vitesse de la lumière c . Dans un diagramme espace-temps, l'angle de 45° par rapport à l'axe temporel est une conséquence directe de la relation $x = \pm ct$, ou $V/c = \pm 1$.
- La ligne bleue représente la **trajectoire d'une particule matérielle**, avec un angle $\alpha < 45^\circ$ par rapport à l'axe temporel, reflétant le fait que sa vitesse v est inférieure à c . La pente de cette ligne est liée à la vitesse par $v = \tan \alpha = \Delta x / \Delta t$ avec $V/c < 1$.
- L'événement \mathcal{E} , représenté par un point noir, est un point précis de l'espace-temps où quelque chose se produit (collision, émission, observation, etc.).
- Les arcs indiquant 45° et α illustrent graphiquement la différence entre la vitesse d'un photon et celle d'une particule matérielle.

Cette figure 3.1b approfondit l'analyse pour montrer les trajectoires relatives de plusieurs objets et la relation avec un événement \mathcal{E} :

- La ligne verticale bleue correspond à la **particule A immobile**, car sa position spatiale x ne change pas avec le temps.
- La ligne inclinée bleue correspond à la **particule B en mouvement uniforme**, illustrant une vitesse constante V : $\Delta x = (V/c)\Delta(ct)$.
- Les lignes rouges et les arcs indiquent les **trajectoires des photons**, inclinées à 45° , qui montrent que la lumière se déplace toujours à la vitesse c , indépendamment du mouvement des particules.
- Les lignes en pointillés et les coordonnées projetées $(x_{\mathcal{E}}, ct_{\mathcal{E}})$ permettent de visualiser comment l'événement \mathcal{E} est relié aux trajectoires dans l'espace-temps, servant de référence pour mesurer les positions et temps relatifs.

Ces figures mettent en évidence plusieurs concepts clés de la relativité restreinte :

1. **Lignes d'univers** : Chaque particule ou photon possède une trajectoire dans l'espace-temps, qui peut être verticale (immobile), inclinée (particule matérielle) ou à 45° (photon).
2. **Relation vitesse-pente** : La pente d'une ligne d'univers par rapport à l'axe temporel donne directement la vitesse de l'objet.
3. **Relativité du mouvement** : Seul le mouvement relatif est observable. Dans un autre référentiel inertiel, les lignes d'univers des particules peuvent changer d'inclinaison, mais les photons restent toujours à 45° .
4. **Invariant de la lumière** : Les photons se déplacent toujours à la vitesse c , ce qui garantit que les cônes de lumière associés à chaque événement sont des structures invariables de l'espace-temps.

Ainsi, ces diagrammes permettent de visualiser de manière intuitive comment les événements, les particules et la lumière interagissent dans un espace-temps à deux dimensions, tout en introduisant la **géométrie de Minkowski** qui est le fondement de la relativité restreinte.

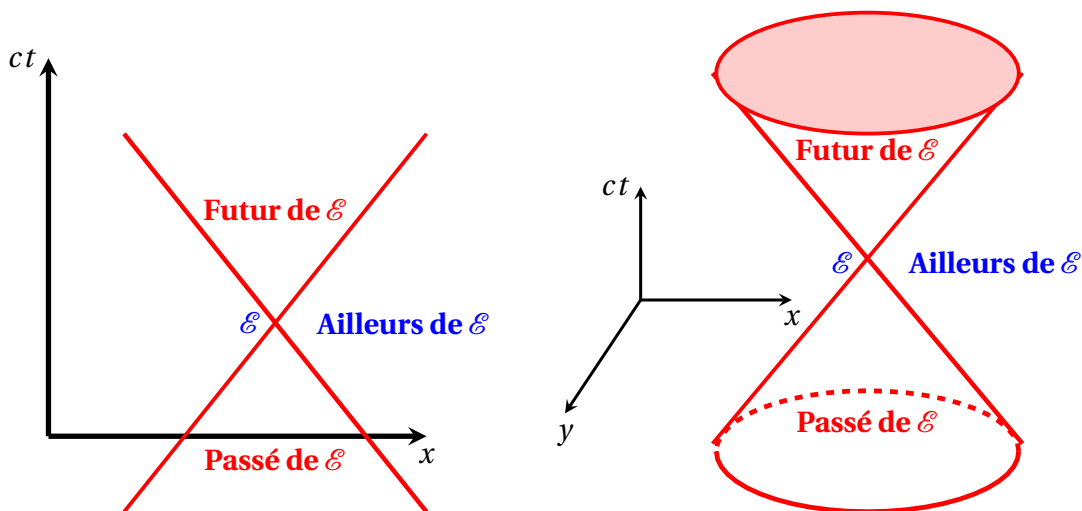
Il est important de rappeler que **seul le mouvement relatif entre objets est observable**.



Représentation graphique de l'espace-temps

L'axe du temps est traditionnellement vertical. Un plan perpendiculaire à cet axe représente l'espace bidimensionnel à un instant donné. Une représentation graphique de l'espace-temps à deux ou trois dimensions est appelée *diagramme d'espace-temps*.

3.3.1.3 Cônes de lumière et hypercônes dans l'espace-temps



(a) Cône de lumière dans un espace-temps à une dimension spatiale.

(b) Cône de lumière dans un espace-temps à deux dimensions spatiales.

Figure 3.2: Cônes de lumière associés à un événement \mathcal{E} dans un espace-temps de Minkowski.

Interprétation et explications : La figure 3.2 illustre la propagation de la lumière et la position des particules matérielles dans l'espace-temps. Les points clés sont :

- Une **source lumineuse ponctuelle** émet, à un instant donné, une impulsion lumineuse dans toutes les directions. Le front d'onde ainsi généré se propage à la vitesse c dans toutes les directions, formant une **structure sphérique** dans l'espace physique.
- La figure 3.2a représente un **espace-temps à une dimension spatiale**. Ici, le cône rouge indique le **futur de l'événement** \mathcal{E} , tandis que le cône rouge inversé montre le **passé de** \mathcal{E} . Les zones extérieures à ces cônes sont appelées **ailleurs**, où aucune influence causale ne peut encore intervenir.
- La figure 3.2b illustre un **espace-temps à deux dimensions spatiales**. Le front d'onde de lumière circulaire s'étend avec un rayon $c \Delta t$ à chaque intervalle de temps Δt , créant ainsi un **hypercône dans l'espace-temps**. La ligne d'univers d'une particule matérielle reste toujours à l'intérieur de ce cône, car sa vitesse v est toujours inférieure à c .
- Cette structure démontre la **causalité relativiste** : aucun signal ou particule matérielle ne peut se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Ainsi, tout événement matériel reste à l'intérieur du cône de lumière futur de sa position initiale.
- L'invariance de la vitesse de la lumière garantit que tous les observateurs inertiels s'accordent sur la position de ces cônes, formant une **structure fondamentale de l'espace-temps** : le **espace-temps de Minkowski**, proposé pour la première fois par **H. Minkowski**.



Remarques

Les cônes de lumière permettent de visualiser graphiquement les notions de **passé, futur et ailleurs** pour un événement donné. Ils constituent un outil essentiel pour comprendre la relativité restreinte et la structure causale de l'espace-temps. Toute particule matérielle a sa ligne d'univers contenue à l'intérieur du cône futur de son événement d'émission de lumière, alors que les photons se déplacent toujours sur les bords de ce cône, correspondant à une inclinaison de 45° dans un diagramme à une dimension spatiale.

3.4 Construction des coordonnées d'un autre observateur

Nous avons vu comment représenter des événements dans le référentiel \mathcal{R} associé à l'observateur \mathcal{O} à l'aide d'un diagramme d'espace-temps (x, ct) . Nous allons maintenant examiner comment représenter les coordonnées d'un second observateur \mathcal{O}' appartenant à un référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à vitesse constante V suivant l'axe x par rapport à \mathcal{R} .

L'objectif est de représenter sur un même diagramme les systèmes de coordonnées des deux observateurs. Comme tous les observateurs décrivent les mêmes événements physiques dans l'espace-temps, il est possible de tracer la ligne d'univers de l'observateur \mathcal{O}' sur le diagramme construit par \mathcal{O} . Cette construction repose sur les postulats fondamentaux de la relativité restreinte, en particulier l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels inertiels.

Axes de coordonnées dans un référentiel en mouvement

Supposons que l'observateur \mathcal{O} utilise les coordonnées (x, t) et que l'observateur \mathcal{O}' utilise les coordonnées (x', t') . Le référentiel \mathcal{R}' se déplace à vitesse constante V dans la direction x par rapport à \mathcal{R} .

- **Axe ct'**

L'axe ct' représente la ligne d'univers de l'origine spatiale du référentiel \mathcal{R}' . Tous les événements situés sur cette droite vérifient $x' = 0$ et correspondent donc à la position de l'observateur \mathcal{O}' .

Dans le diagramme espace-temps du référentiel \mathcal{R} , cet axe apparaît incliné par rapport à l'axe ct , ce qui traduit le mouvement uniforme de \mathcal{O}' . L'angle d'inclinaison est lié à la vitesse relative entre les deux référentiels.

- **Axe x'**

L'axe x' correspond à l'ensemble des événements pour lesquels $t' = 0$, c'est-à-dire aux événements que l'observateur \mathcal{O}' considère simultanés avec l'origine.

La construction de cet axe repose sur une procédure de synchronisation des horloges utilisant des signaux lumineux. Un signal est émis depuis l'origine \mathcal{O}' à l'instant $t' = -a$, atteint un point \mathcal{P} situé sur l'axe x' , puis est réfléchi et revient vers l'origine à l'instant $t' = +a$ (événement \mathcal{R}).

Dans le référentiel \mathcal{R}' , l'événement \mathcal{P} est donc simultané avec l'origine puisque $t' = 0$. L'axe x' est ainsi défini comme le lieu des événements satisfaisant cette condition de simultanéité.

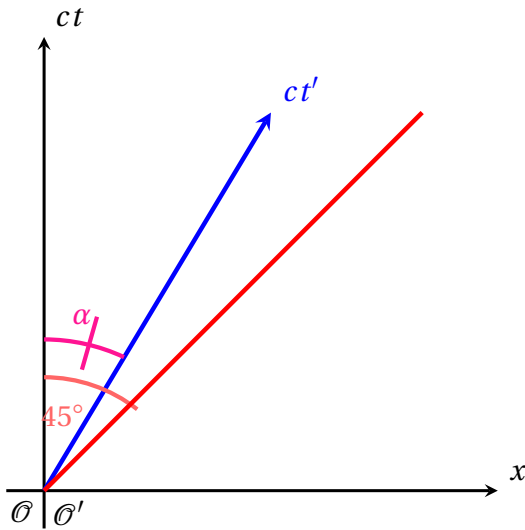


Figure 3.3: Diagramme espace-temps montrant l'axe temporel ct' du référentiel \mathcal{R}' dans le diagramme de \mathcal{R} . Les droites inclinées à 45° représentent les trajectoires des signaux lumineux.

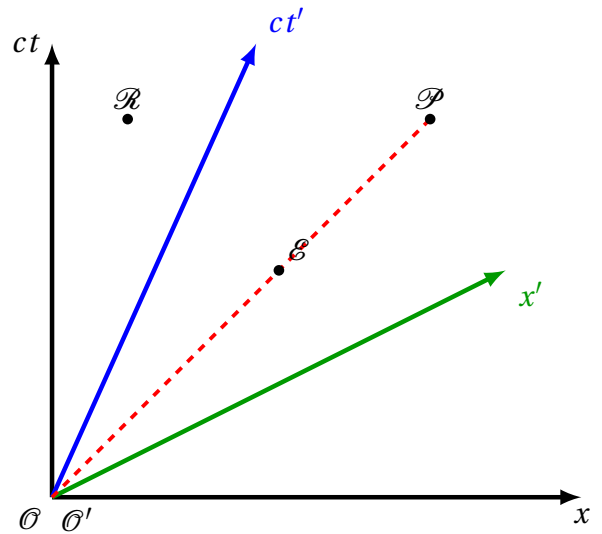


Figure 3.4: Construction géométrique des axes (x', ct') dans le diagramme espace-temps de \mathcal{R} .

Il est important de remarquer que l'axe $O'x'$ est disposé symétriquement à ct' par rapport à la **ligne d'univers de la lumière** (cf. figure 3.5).

On voit aisément, par exemple, que deux événements simultanés dans un repère ne le sont pas dans l'autre (cf. figure 3.5). Dans \mathcal{R} , de tels événements sont sur une droite parallèle à l'axe Ox , donc perpendiculaire à l'axe Ot . Par contre dans \mathcal{R}' , les projections de ces événements sur l'axe $O't'$ montrent des instants différents (les projections se font toujours parallèlement aux axes). Cette simultanéité relative vient du fait que la vitesse de la lumière a une grandeur finie. Cela avait échappé à Newton et à ses successeurs. En faisant du temps une quantité absolue, Newton supposait implicitement une synchronisation des horloges à l'aide d'un signal de vitesse infinie.

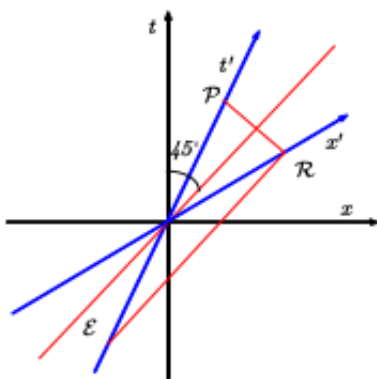


Figure 3.5: Trajet des rayons lumineux dans un diagramme espace-temps.

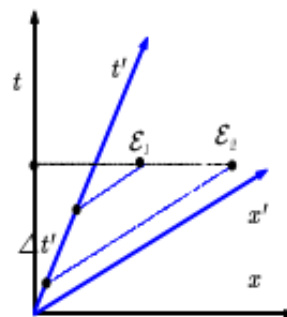


Figure 3.6: Deux événements simultanés Dans \mathcal{R} ne le sont pas dans \mathcal{R}' . Pour le système \mathcal{R}' , on détermine les coordonnées (x', t') en se déplaçant parallèlement aux axes $O't'$ et $O'x'$ pour atteindre les axes $O'x'$ et $O't'$ respectivement.

3.5 Relation de causalité

Etant donné la relativité du temps et de l'espace, on peut se demander ce que devient une notion fondamentale en physique, celle de relation de causalité entre deux événements. En particulier, il faut que *les notions de passé et de futur aient un sens absolu pour deux événements liés par une relation de cause à effet*. Si cette relation devenait à son tour relative, notre conception du monde serait sérieusement mise en cause, ce qui ne vas pas être le cas ainsi que nous allons le voir.

3.5.1 Intervalles réels et imaginaires

Suivant les valeurs respectives des quantités spatiales ou temporelles, le carré de l'intervalle peut être positif, nul ou négatif. **Puisque l'intervalle est un invariant pour tous les référentiels d'inertie, la propriété d'être positif, nul ou négatif est une caractéristique indépendante de tout référentiel.** Suivant la valeur de ds^2 , on distingue:

- ▶ Si $ds^2 = 0$, les deux événements peuvent être reliés par un rayon lumineux ainsi que le montre la formule (3.2). *L'intervalle est dit du genre lumière.*

$$\underbrace{c^2(dt)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} = \underbrace{(d\ell)^2}_{\text{distance parcourue par les événements}} \quad (3.19)$$

- ▶ Si $ds^2 > 0$, la partie temporelle de l'intervalle prédomine sur la partie spatiale. *L'intervalle est un nombre réel, et il est dit du genre temps.*

$$\underbrace{c^2(dt)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} > \underbrace{(d\ell)^2}_{\text{distance parcourue par les événements}} \quad (3.20)$$

- ▶ Si $ds^2 < 0$, la partie spatiale de l'intervalle prédomine sur la partie temporelle. *L'intervalle est un nombre imaginaire pur, et il est dit du genre espace.*

$$\underbrace{c^2(dt)^2}_{\text{distance parcourue par la lumière}} < \underbrace{(d\ell)^2}_{\text{distance parcourue par les événements}} \quad (3.21)$$

Remarques

Par suite de l'invariance de l'intervalle, il est remarquable que la propriété d'être du genre lumière, temps ou espace est indépendante du référentiel considéré; c'est une propriété intrinsèque de l'intervalle.

3.5.1.1 Intervalle du genre temps

Considérons deux événements qui ont lieu dans un référentiel \mathcal{R} , de coordonnées respectives (t_1, x_1, y_1, z_1) , et (t_2, x_2, y_2, z_2) . Notons ℓ_{12} la longueur du segment séparant ces deux événements:

$$\ell_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (3.22)$$

Peut-on trouver un référentiel \mathcal{R}' dans lequel ces deux événements aient lieu en un même point, c'est-à-dire tels que $\ell_{12} = 0$? En vertu de l'invariance de l'intervalle, on a:

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \ell_{12}^2 = s_{12}'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - \ell_{12}'^2 \quad (3.23)$$

Puisque $\ell'_{12} = 0$, la relation (3.23) donne:

$$s_{12}^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 > 0 \quad (3.24)$$

En conséquence le référentiel \mathcal{R}' n'existe que si le carré s_{12}^2 est **positif**, c'est-à-dire **si l'intervalle est du genre temps**. L'intervalle entre deux événements est alors un nombre réel. On en conclut que ***lorsqu'un intervalle entre deux événements est du genre temps, il existe un référentiel dans lequel ces événements coïncident dans l'espace.***

Notons que deux événements relatifs à une même particule matérielle sont séparés par un intervalle qui est nécessairement du genre temps. En effet, la distance parcourue par le corps entre les deux événements doit rester inférieure à $c(t_2 - t_1)$. On a donc toujours $c(t_2 - t_1) > \ell_{12}$, soit $(s_{12})^2 > 0$.

Remarquons qu'il en est toujours ainsi dans le référentiel propre de la particule, c'est-à-dire celui où la particule est au repos. Soit en effet \mathcal{R}' ce référentiel propre. On a alors $\ell'_{12} = 0$, et selon (3.24), $(s_{12})^2 > 0$.

3.5.1.2 Intervalle du genre espace

Cherchons à présent s'il est possible de trouver un référentiel \mathcal{R}' tel que les deux événements soient **simultanés**, c'est-à-dire que $t'_2 = t'_1$. La relation (3.23) est toujours valable mais nous donne à présent:

$$s_{12}^2 = -\ell'^2_{12} < 0 \quad (3.25)$$

Dans ce cas, le référentiel \mathcal{R}' cherché ne peut exister que si l'intervalle s_{12} entre les deux événements est **un nombre imaginaire**. En conséquence, ***lorsque l'intervalle entre deux événements est du genre espace, il existe un référentiel dans lequel ces événements coïncident dans le temps.***

Le fait que les événements se produisent au même instant à des endroits différents prouve qu'***ils ne peuvent être liés par un lien de causalité***, la relativité n'admettant pas d'action instantanée à distance. On peut voir rapidement que, dans ce cas, le signe de t dépend de la transformation. Comme il n'y a pas de relation de causalité relativiste entre ces événements, leur ordre temporel peut dépendre du référentiel. Notons enfin que le carré de l'intervalle est dans ce cas l'opposé de la distance entre les deux événements dans le référentiel où ils se produisent au même instant. Il s'agit d'une longueur propre, telle que nous la définissons plus précisément dans un instant.

3.5.2 Cône de lumière

Lorsque l'***intervalle entre deux événements est nul***, ces événements peuvent être reliés par **un rayon lumineux** ainsi que le montre la formule (3.2).

Considérons alors le lieu de tous les événements possibles qui peuvent être reliés par un signal lumineux à un événement déterminé que nous allons prendre pour origine \mathcal{O} de l'espace-temps. Les intervalles entre tous les événements $\mathcal{M}(ct, x, y, z)$ reliés par un rayon lumineux à \mathcal{O} , notés $S_{\mathcal{O}\mathcal{M}}$, sont tels que $S^2_{\mathcal{O}\mathcal{M}} = 0$. Les coordonnées ct, x, y, z des événements \mathcal{M} vérifient donc l'équation:

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.26)$$

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, l'équation (3.26) est celle d'**un hypercône** représentant le lieu des trajectoires des rayons lumineux issus de l'origine \mathcal{O} . Afin de pouvoir visualiser une telle hypersurface et de mieux étudier ses propriétés, limitons nous aux événements pour lesquels $z = 0$. Considérant ct comme un paramètre, on obtient alors l'équation:

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 \quad (3.27)$$

C'est l'équation d'une famille continue de cercles, centrés sur l'axe du temps, chaque cercle étant de rayon ct . On obtient l'équation d'un cône appelé **cône de lumière**. La figure 3.1 représente le cône de lumière rapporté aux coordonnées ct, x, y . Son angle au sommet est de 90° ainsi qu'on le voit en considérant la projection de cette surface sur le plan (ct, x) , dont l'équation est:

$$ct = \pm x \tag{3.28}$$

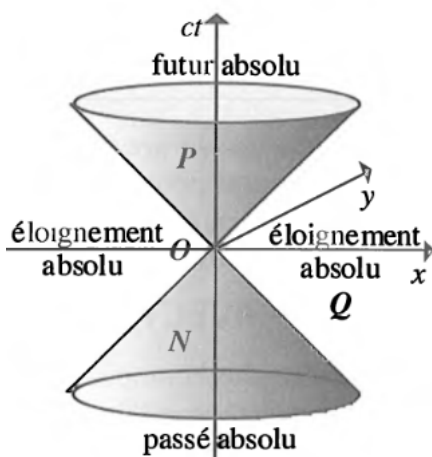
C'est l'équation de deux droites, génératrices du cône de lumière, et qui sont les bissectrices de l'angle formé par les axes $\mathcal{O}x$ et $\mathcal{O}ct$ car:

$$\frac{d(ct)}{dx} = \pm 1 = \pm \tan \frac{\pi}{4} \tag{3.29}$$

Par suite, ces droites forment entre elles un angle de 90° .

3.5.2.1 Passé et futur absolus

Tous les intervalles du genre temps entre l'événement \mathcal{O} et un événement quelconque sont situés à l'intérieur du cône de lumière. Ceux du genre espace sont à l'extérieur du cône. Celui-ci possède deux nappes: l'une sur laquelle $t > 0$, l'autre $t < 0$. Considérons un événement \mathcal{P} quelconque situé à l'intérieur du cône de lumière, dans la région $t > 0$; l'événement \mathcal{P} est donc situé **"après"** l'événement \mathcal{O} . Cependant, si l'on change de référentiel, l'événement \mathcal{P} est-il toujours postérieur à \mathcal{O} ?



Nous avons vu que *deux événements séparés par un intervalle du genre temps ne peuvent être simultanés dans aucun référentiel*. En conséquence, **lorsqu'on change de référentiel, le point \mathcal{P} se déplace dans le cône de lumière mais il ne peut pas sortir de la nappe $t > 0$ car il lui faudrait franchir le sommet ou la surface du cône qui sont des lieux du genre lumière**. Tous les événements situés dans la région $t > 0$ à l'intérieur du cône de lumière sont donc postérieurs à l'événement \mathcal{O} quel que soit le référentiel d'inertie. Pour cette raison, cette région est appelée région du **futur absolu**.

De façon analogue, tous les événement \mathcal{N} situés dans la région $t < 0$ intérieure au cône de lumière sont antérieurs à l'événement \mathcal{O} dans tous les référentiels. Cette région est appelée la région du **passé absolu**.

3.5.2.2 Éloignement absolu

Dans la région extérieure au cône de lumière, tout intervalle entre l'événement \mathcal{O} et un événement quelconque \mathcal{Q} est du genre espace. Si l'on change de référentiel, ces événements auront lieu en des points différents de l'espace qui appartiendront toujours à la région extérieure au cône. Cette région peut donc être appelée région d'**éloignement absolu**.

Pour cette région, il existe des référentiels où un événement quelconque \mathcal{Q} est soit antérieur, soit postérieur à l'événement \mathcal{O} , et il existe un référentiel où cet événement est simultané à \mathcal{O} . Les notions de **"avant"**, **"après"** et **"simultanément"** sont donc relatives pour tous les événements de cette région.

3.5.3 Événements liés par une relation de causalité

Pour que deux événements puissent être reliés par une relation de cause à effet, il faut qu'une interaction de vitesse inférieure ou égale à la vitesse de la lumière puisse se propager entre eux.

Or, à l'intérieur du cône de lumière, une interaction allant de l'origine 0 à un point quelconque parcourt une distance $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ durant un temps dt . La vitesse de l'interaction est égale à $\sqrt{dx^2 + dy^2}/dt$. Puisque les intervalles sont du genre temps, on a :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2)^2 > 0 \quad (3.30)$$

d'où :

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} < c \quad (3.31)$$

L'interaction se propage toujours avec une vitesse inférieure à c . **Tous les événements situés à l'intérieur du cône de lumière peuvent donc avoir une relation de cause à effet.** Il en est de même pour les événements situés sur le cône de lumière qui peuvent être reliés par un signal de vitesse c . Deux événements ne peuvent donc être liés par une relation de causalité que si leur intervalle est du genre temps ou du genre lumière. L'existence d'un futur et d'un passé absolus pour ces événements montre que la notion de causalité conserve toujours un sens en relativité restreinte.



Conclusions

Comme on l'a vu dans la figure 3.2, par rapport à un événement donné \mathcal{E} , l'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment **le passé absolu de \mathcal{E}** ; ceux du cône supérieur, **le futur absolu de \mathcal{E} (événements du genre-temps)**. Ceux qui sont à l'extérieur du cône constituent **l'ailleurs de \mathcal{E} (événements du genre-espace)**.

- ② $(ds)^2 < 0$: genre - espace (**causalité impossible**)
- ③ $(ds)^2 > 0$: genre - temps (**causalité possible**)
- ③ $(ds)^2 = 0$: genre - lumière (**causalité possible par la lumière**)

Ainsi, **si deux événements sont séparés par un intervalle de genre temps, il existe un référentiel dans lequel ils se produisent au même endroit.**

De même, **Si deux événements sont séparés par un intervalle de genre espace, il existe un référentiel dans lequel ils se produisent simultanément.**

3.6 Contraction de la longueur: longueur propre

Ayant vu que les mesures d'intervalle de temps dans deux référentiels sont différentes, il est naturel de s'attendre à la même chose pour les mesures de longueur. La définition de la longueur propre va dans le même sens que celle du temps propre.

Définition

La **longueur propre** d'un objet est **sa longueur mesurée dans un repère dans lequel l'objet est au repos.**

Comparons la longueur d'une règle mesurée dans deux référentiels : R dans lequel la règle de longueur L est au repos, disons, par rapport à la direction x , et un autre cadre \mathcal{R}' en mouvement par rapport à R le long de la direction des x avec une vitesse v . Les lignes d'univers de la règle dans les deux référentiels sont montrées comme ci-dessous.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les deux événements auxquels les deux extrémités de la règle croisent l'observateur. Dans \mathcal{R} :

$$\mathcal{A} = (ct_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{A}}); \quad \mathcal{B} = (ct_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{B}}) \quad (3.32)$$

et dans \mathcal{R}' :

$$\mathcal{A} = (ct'_{\mathcal{A}}, 0); \quad \mathcal{B} = (ct'_{\mathcal{B}}, 0) \quad (3.33)$$

Alors la longueur de l'objet dans \mathcal{R}' est donnée par

$$L' = v(t'_{\mathcal{B}} - t'_{\mathcal{A}}). \quad (3.34)$$

L'intervalle spatio-temporel entre \mathcal{A} et \mathcal{B} est le même dans les deux référentiels. Cela donne

$$\begin{aligned} c^2(t'_{\mathcal{B}} - t'_{\mathcal{A}})^2 &= c^2(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}})^2 - (x_{\mathcal{B}} - x_{\mathcal{A}})^2 \\ \Rightarrow c^2 \frac{L'^2}{v^2} &= c^2 \frac{L^2}{v^2} - L^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

ou

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma} \quad (3.36)$$

Puisque $\gamma \geq 1$, $L' \leq L$, c'est-à-dire que **les objets en mouvement apparaissent plus petits dans la direction du mouvement.**

La longueur L est appelée la longueur propre de la règle, et le référentiel \mathcal{R} , par rapport auquel la règle est fixe, est son référentiel propre.

La longueur L' de la règle dans le référentiel \mathcal{R}' en mouvement par rapport à \mathcal{R} est appelée longueur impropre.

$$\text{longueur impropre} < \text{longueur propre} \quad (3.37)$$

PS

Nous n'avons considéré que la contraction le long de la direction du mouvement. Cependant, il est simple de montrer (en utilisant des diagrammes spatio-temporels détaillés) que *dans les deux autres directions, c'est-à-dire la direction perpendiculaire au mouvement, il n'y a pas de contraction.*

EXERCICES

- Un repère s' se déplace à une vitesse 0.8 par rapport au repère s . Deux événements se produisent: l'événement \mathcal{E}_1 à $x_1 = 10 \text{ m}$, $t_1 = 60 \text{ m}$ et l'événement \mathcal{E}_2 à $x_2 = 50 \text{ m}$, $t_2 = 90 \text{ m}$.
 - Construisez deux diagrammes espace-temps illustrant ce cas, l'un montrant le point de vue de s (axes t et x orthogonaux) et l'autre le point de vue de s' (axes t' et x' orthogonaux).
 - L'un des deux événements décrits peut-il influencer l'autre et, si oui, lequel?
- Une particule passe du point **1** $(t, x, y, z) = (1, 1, 1, 1)$ au point **2** $(t, x, y, z) = (3, 2, 1, 1)$ dans le repère \mathcal{R} .

- (a) Calculez ses coordonnées dans le repère \mathcal{R}' si \mathcal{R}' se déplace avec une vitesse $V = 0.8$ dans la direction des x par rapport à \mathcal{R} .
- (b) Calculez l'intervalle entre les deux points dans les deux repères.
3. Un événement \mathcal{A} a lieu à l'origine du repère \mathcal{R} à $t = 0$. Un autre événement \mathcal{B} , séparé du premier par une distance de $2.5 \times 10^9 m$ a lieu 10 secondes plus tard. Trouvez la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} pour laquelle les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} :
- (a) *ont lieu au même point?*
- (b) *ont lieu simultanément?*
- (c) Dans le cas (a), quel est le délai t' entre \mathcal{A} et \mathcal{B} ?
4. De quel genre (temps, lumière ou espace) sont les événements suivant? (Les unités sont telles que la vitesse de la lumière $c = 1$)
- (a) $(0, 0, 0, 0)$ et $(-1, 1, 0, 0)$
- (b) $(1, 1, -1, 0)$ et $(-1, 1, 0, 2)$
- (c) $(-1, 1, -1, 1)$ et $(4, 1, -1, 6)$

QUADRIVECTEURS

NOUS allons donner un cadre plus formel à la théorie de la relativité restreinte par l'utilisation du calcul tensoriel¹. Le calcul tensoriel dans le cadre de la relativité d'Einstein se révèle être un outil de calcul très efficace et constitue la base grâce à laquelle la relativité restreinte a pu être généralisée pour intégrer la gravitation. Dans la suite, nous utilisons *des indices grecs* (μ, ν , etc) pour numérotter *des composantes spatio-temporelles* (0, 1, 2, 3) des grandeurs, et *des indices latins* (i, j , etc) pour numérotter *leurs composantes spatiales* (1, 2, 3).

On peut définir l'espace-temps de Minkowski comme l'espace de tous les événements. Du point de vue mathématique, l'espace-temps de la relativité restreinte, ou espace-temps de Minkowski, est *un espace ponctuel affine* muni d'une métrique particulière, dite **métrique de Minkowski**. Un espace vectoriel est associé à cet espace-temps, dont les éléments sont appelés **des quadrivecteurs**. Il est également nécessaire de construire des entités plus complexes, les tenseurs. Nous allons développer ces points dans les trois sections suivantes.

4.1 Quadrivecteur déplacement

L'espace-temps de Minkowski est, au départ, *un espace de points*, ou *espace ponctuel*, de dimension 4. Le temps et l'espace étant intimement liés par les transformations de Lorentz, il est assez naturel d'intégrer toutes les coordonnées spatio-temporelles dans un même formalisme. Un point de cet espace-temps est en fait *un événement*. Une paire ordonnée d'événements (\mathcal{A}, \mathcal{B}) permet de définir un vecteur dans l'espace-temps, c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel (avec toutes les propriétés qui en découlent) associé à cet espace ponctuel. Muni de cet espace vectoriel, l'espace-temps est dit *affine*. Nous appelons *quadrivecteur* un élément de cet espace vectoriel.

Nous construisons un repère dans l'espace-temps en se donnant un point particulier \mathcal{O} de cet espace-temps, appelé origine spatio-temporelle, et quatre quadrivecteurs particuliers ($\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) constituant une base de l'espace vectoriel associé à l'espace-temps. De manière abrégée, ce repère associé au référentiel \mathcal{R} pourra être noté $(\mathcal{O}; \mathbf{e}_\mu)$. Les coordonnées d'un événement x , (x^0, x^1, x^2, x^3) , sont les composantes du *quadrivecteur position* $x(\mathcal{O}x)$, qui joint l'origine \mathcal{O} au point x , dans la base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (cfr figure 4.1).

$$x(\mathcal{O}x) = x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (4.1)$$

Dans la suite nous utiliserons toujours la convention, dite d'Einstein, de sommation sur les indices répétés figurant une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, étant entendu que l'indice de sommation varie de 0 à 3. La relation (4.1) devient donc simplement

$$x(\mathcal{O}x) = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (4.2)$$

¹text

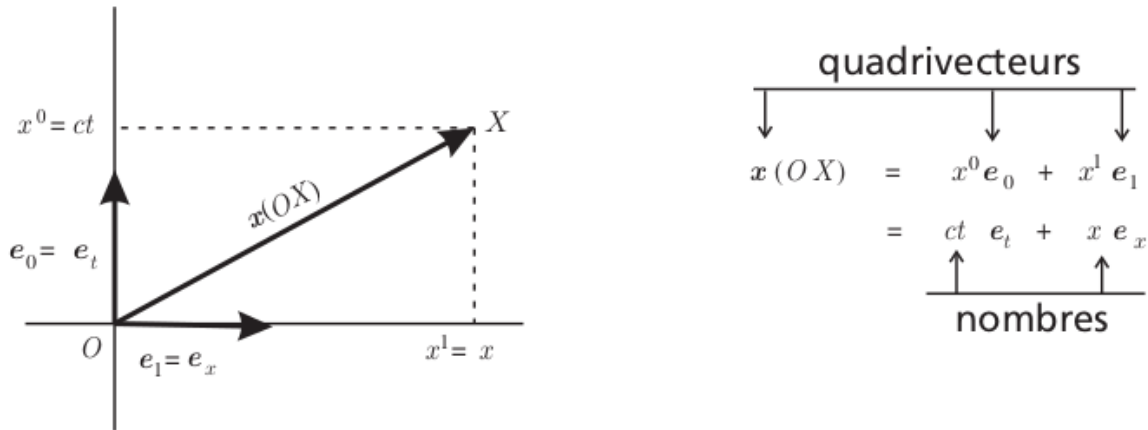


Figure 4.1: Coordonnées contravariantes d'un événement dans un espace-temps de Minkowski à deux dimensions.

Si deux événements \mathcal{A} et \mathcal{B} ont respectivement pour coordonnées $x^\mu(\mathcal{A})$ et $x^\mu(\mathcal{B})$, **le quadrivecteur déplacement** $d(\mathcal{A}\mathcal{B})$ entre ces deux événements est par définition:

$$d(\mathcal{A}\mathcal{B}) = x(\mathcal{A}\mathcal{O}) + x(\mathcal{O}\mathcal{B}) = x(\mathcal{O}\mathcal{B}) - x(\mathcal{A}\mathcal{O}) \tag{4.3}$$

Dans la base (\mathbf{e}_μ) , ce quadrivecteur a donc pour composantes les grandeurs

$$d^\mu(\mathcal{A}\mathcal{B}) = x^\mu(\mathcal{B}) - x^\mu(\mathcal{A}) \tag{4.4}$$

Avec un choix de quadrivecteurs de base:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_t \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z, \tag{4.5}$$

un événement se produisant à l'instant t au point de l'espace (x, y, z) a pour coordonnées spatio-temporelles

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z. \tag{4.6}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Les composantes x^μ d'un quadrivecteur position ont les dimensions d'une longueur; les quadrivecteurs de base \mathbf{e}_μ sont, eux, dépourvus de dimension.

Considérons maintenant deux repères dans l'espace-temps $(\mathcal{O}; \mathbf{e}_\mu)$ et $(\mathcal{O}; \mathbf{e}'_\mu)$ caractérisés par la même origine spatio-temporelle \mathcal{O} et par des quadrivecteurs de base \mathbf{e}_μ et \mathbf{e}'_μ différents. Dans ces deux bases, le quadrivecteur position associé à un événement \mathcal{X} peut s'écrire:

$$x(\mathcal{O}\mathcal{X}) = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu \tag{4.7}$$

L'équation (4.7) montre qu'un quadrivecteur position existe indépendamment de tout choix de la base. Les deux bases \mathbf{e}_μ et \mathbf{e}'_μ sont reliées par la matrice de changement de base Λ^μ_ν

$$\mathbf{e}'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \mathbf{e}_\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \mathbf{e}'_\nu \tag{4.8}$$

Les deux matrices de transformation sont telles que:

$$\Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha \Lambda^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{4.9}$$

où δ_{ν}^{μ} , ou **delta Krnonicker** est **le symbole de Kronicker** défini par:

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.10)$$

Afin de satisfaire à l'égalité (4.7), les coordonnées spatio-temporelles d'un événement doivent se transformer suivant la loi:

$$x^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x'^{\nu} \quad \text{et} \quad x'^{\mu} = (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (4.11)$$

Remarques

De façon générale, **une grandeur avec un indice en position inférieure**, comme **un vecteur de base** \mathbf{e}_{μ} , est dite **covariante**; elle se transforme lors d'un changement de base suivant la loi (4.8). **Une grandeur avec un indice en position supérieure**, comme **une coordonnée spatio-temporelle** x^{μ} , est dite **contravariante**; elle se transforme lors d'un changement de base suivant la loi (4.11).

où la répétition d'indice grec (ex. $\mu, \nu, \lambda, \sigma, \dots$) sous-entend la somme sur des indices 0, 1, 2, 3. Toutefois, la répétition d'indice latin (ex. i, j, k, l, \dots) sous-entend la somme sur des indices 1, 2, 3. **à noter des indices identiques ici, il y a un indice inférieur (covariant) et un indice supérieur (contravariant) et la somme correspond à un produit scalaire de Lorentz.**

Remarquons que la transformation (4.11) est bien caractérisée par le fait que les origines spatio-temporelles des deux référentiels coïncident car $x'^{\mu} = 0 \iff x^{\mu} = 0$. Elle est donc **homogène**.

Si l'origine du repère spatiotemporel est déplacée de \mathcal{O} à \mathcal{O}' , le quadrivecteur position associé à un événement x particulier est modifié. De $x(\mathcal{O}x)$, il devient $x(\mathcal{O}'x)$, et les coordonnées de l'événement sont changées. Si, dans l'ancien repère, le quadrivecteur λ qui joint \mathcal{O} à \mathcal{O}' s'écrit $\lambda(\mathcal{O}\mathcal{O}') = \lambda^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$, alors les nouvelles coordonnées de l'événement x sont $x^{\mu} - \lambda^{\mu}$ car

$$x'(\mathcal{O}'x) = x(\mathcal{O}x) - \lambda(\mathcal{O}\mathcal{O}') = (x^{\mu} - \lambda^{\mu}) \mathbf{e}_{\mu} \quad (4.12)$$

Il découle des relations (4.3) et (4.12) qu'**un changement d'origine spatio-temporelle ne modifie pas les composantes d'un quadrivecteur déplacement**. La relativité restreinte ne s'accommode pas de changements de base quelconques. Nous avons déjà vu que, d'une part, les référentiels considérés doivent être inertiels et, d'autre part, la vitesse de la lumière doit rester invariante dans un changement de référentiel. Cela nous impose le choix d'un produit scalaire bien défini et une forme particulière pour les matrices Λ admissibles, les transformations de Lorentz.

Notons que d'après l'équation (2.13), on a:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x'), \\ x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned}$$

avec $\beta = \frac{V}{c}$, la première équation de la relation (4.11) s'écrit:

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \\ x^1 &= \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \\ x^2 &= x'^2, \\ x^3 &= x'^3. \end{aligned} \tag{4.13}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle ainsi:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

où la **matrice de transformation de Lorentz du quadrivecteur** $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$ est la matrice Λ_ν^μ donnée par:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Notons que

$$\Lambda_\nu^\mu x^\nu \neq \Lambda_i^\mu x^i \tag{4.16}$$

puisque la somme dans le terme de droite ne s'effectue que sur les composantes $i = 1, 2, 3$. La transformation inverse de Lorentz peut aussi s'écrire dans cette

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

ou

$$x'^\mu = \tilde{\Lambda}_\nu^\mu x^\nu \tag{4.18}$$

avec

$$\tilde{\Lambda} = (\Lambda)^{-1} \tag{4.19}$$

Les coordonnées x^μ d'un événement peuvent être considérées comme les composantes d'un vecteur $\mathbf{R} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r})$, appelé **rayon-vecteur**, dans l'espace-temps à quatre dimensions. Lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie \mathcal{R} à un autre \mathcal{R}' se déplaçant parallèlement à l'axe des x à la vitesse uniforme \vec{V} , les composantes de ce rayon-vecteur se transforment selon l'équation (4.17).

Par définition, **les quadrivecteurs** (ou encore **4-vecteur**) sont donc des **vecteurs à quatre dimensions qui sont covariants**.

On vérifie aisément que

$$\det \Lambda = 1$$

4.2 Propriétés de quadrivecteurs et métrique de Minkowski

Nous partons d'une analogie avec l'espace ordinaire à 3 dimensions. Cet espace, muni du produit scalaire habituel, est dit **euclidien**. Il est formé de points qui représentent la position des objets. Ainsi, la donnée de deux points définit un vecteur position, dont les composantes sur les vecteurs de base ont pour dimension une longueur. Dans ce même espace, d'autres quantités physiques telles qu'une vitesse, une accélération, une force, etc (en général dérivées des vecteurs déplacement et caractérisées par des composantes sur les mêmes vecteurs de base) peuvent être définies et ont des dimensions qui ne sont pas des longueurs.

Il en va donc de même avec l'espace de Minkowski. Celui-ci servant de support aux quadrivecteurs position, on peut construire, à partir de quadrivecteurs déplacement (éventuellement infinitésimaux), différentes quantités dont les composantes spatio-temporelles ont la dimension d'une vitesse, d'une quantité de mouvement, etc. Un changement d'origine spatio-temporelle ne modifie pas ces quantités, et leurs composantes restent inchangées. Si ces quantités se comportent comme les quadrivecteurs position lors des changements de quadrivecteurs de base, nous les appelons aussi quadrivecteurs. **La différence fondamentale avec l'espace ordinaire est, outre une dimension supplémentaire, le fait que l'espace-temps n'est plus euclidien, mais minkowskien. Les quadrivecteurs sont les éléments d'un espace vectoriel. On en conclut qu'une combinaison linéaire de quadrivecteurs est encore un quadrivecteur.**

Un quadrivecteur quelconque \mathbf{A} existe indépendamment de tout référentiel (sauf un quadrivecteur position qui dépend de l'origine du repère). Nous avons déjà vu qu'un changement de base ne modifie pas le quadrivecteur, mais ses composantes sont modifiées. Connaissant le développement du quadrivecteur dans deux repères différents, on peut écrire:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu \mathbf{e}_\mu = A^\mu \mathbf{e}_\mu = A'^\mu \mathbf{e}'_\mu. \quad (4.20)$$

où A^μ (A'^μ) sont **les composantes contravariantes** du quadrivecteur \mathbf{A} dans la base \mathbf{e}_μ (\mathbf{e}'_μ). Les nombres A^μ (A'^μ) sont les composantes contravariantes. La loi de transformation de Lorentz de la relation (4.20) s'écrit:

$$A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu A^\nu \quad \text{et} \quad e'^\mu = \Lambda^\mu_\nu e^\nu \quad (4.21)$$

L'espace-temps de Minkowski est muni d'un produit scalaire faisant correspondre deux quadrivecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} un invariant noté:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv (A^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (B^\nu \mathbf{e}_\nu) = A^\mu B^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad (4.22)$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad (4.23)$$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un objet à 2 indices, appelé **le tenseur métrique** \mathbf{g} ou simplement **la métrique** ou **métrique de Minkowski**¹. Ce tenseur est **symétrique**, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. D'affine, l'espace-temps de Minkowski devient **métrique**.

La loi de transformation des composantes de la métrique pour un changement de base est donnée par

¹Dans ce cours, on utilise **la signature** (+, -, -, -) dans l'expression de la pseudo-norme, où le temps est compté positivement et l'espace négativement. Selon les ouvrages, on peut aussi trouver la convention inverse (-, +, +, +). Les deux conventions sont bien évidemment équivalentes.

$$g'_{\mu\nu} = \mathbf{e}'_{\mu} \cdot \mathbf{e}'_{\nu} = \left(\Lambda_{\mu}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \right) \cdot \left(\Lambda_{\nu}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \right) = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta} \quad (4.24)$$

Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs de base sont *orthogonaux*, soit

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu \quad (4.25)$$

e donc

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{\mu} B^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu} \quad (4.26)$$

Pour le cas des quadrivecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la *ñlongueur généralisée*, la *pseudo-norme*, d'un vecteur espace-temps est reliée à l'intervalle:

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x^2 = x^{\mu} x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu} \\ &= (x^{\mu})^2 \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu} \\ &= (x^0)^2 \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (x^1)^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (x^2)^2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + (x^3)^2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (\Delta s)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

alors, la *pseudo-norme* des vecteurs de base est

$$\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu} = \begin{cases} [lr]1 & \text{si } \mu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.29)$$

et le tenseur métrique s'écrit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

4.3 Composantes covariantes

Ci-haut, nous avons vu que le vecteur \mathbf{A} est défini en terme des *composantes contravariantes* A^{μ} , c'est-à-dire $\mathbf{A} = A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$. Cette définition n'est pas unique. Il est possible et souvent utile d'utiliser un autre choix de vecteurs unitaires et de composantes, les *composantes covariantes*. Les *composantes covariantes* sont des *projections orthogonales de \mathbf{A} sur les vecteurs de base \mathbf{e}_{μ}* . Par exemple,

$$\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{A} \equiv A_{\mu} \quad (4.31)$$

(à noter l'indice inférieur) ou autrement dit:

$$\begin{aligned} A_{\mu} &\equiv \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot A^{\nu} \mathbf{e}_{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} A^{\nu} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le vecteur \mathbf{A} peut alors s'écrire en se servant des *composantes covariantes* et les vecteurs de base \mathbf{e}^{μ}

$$\mathbf{A} \equiv A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} \quad (4.33)$$

et de la même façon on peut définir

$$g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^{\mu} \cdot \mathbf{e}^{\nu} \quad (4.34)$$

et on vérifie que $g^{\mu\nu}$ est aussi

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

à noter, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$ coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (4.36)$$

et

$$g^{\mu\nu}_{\nu\lambda} = I_{4 \times 4} = \delta^{\mu}_{\lambda} \quad (4.37a)$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = Tr(I_{4 \times 4}) = 4. \quad (4.37b)$$

Finalement, on en tire la relation entre les composantes contravariantes et covariantes

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad (4.38a)$$

$$A_{\nu} = g_{\mu\nu} A^{\mu}. \quad (4.38b)$$

Par exemple, pour le quadrivecteur contravariant de position

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}), \quad (4.39)$$

on aura un quadrivecteur covariant de position $x_{\nu} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= g_{\mu\nu} x^{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} x^{\nu} &= g^{\mu\nu} x_{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pour un vecteur arbitraire \mathbf{a} dont les composantes contravariantes sont a^{μ}

$$a^{\mu} = (t, \mathbf{a}) \quad \text{composantes contravariantes} \quad (4.42a)$$

$$a_{\mu} = (t, -\mathbf{a}) \quad \text{composantes covariantes} \quad (4.42b)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} quelconques est donné par:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b_\mu$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^\mu b_\mu \\ &= (a^0, \mathbf{a}) \cdot (b^0, -\vec{b}) \\ &= a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= a_\mu b^\mu. \end{aligned}$$

Remarques

Pour deux vecteurs de Lorentz \mathbf{a} et \mathbf{b} , le produit scalaire

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b_\mu$$

est **un invariant de Lorentz**, c'est-à-dire que cette quantité **n'est pas affectée par une transformation de Lorentz** et donc **a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels**.

La loi de transformation des composantes de la métrique pour un changement de base est donnée par:

$$g'_{\mu\nu} = e'_\mu \cdot e'_\nu = (\Lambda_\mu^\alpha e_\alpha) \cdot (\Lambda_\nu^\beta e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \tag{4.43}$$

Ces composantes se transforment donc comme un quadrivecteur de base mais avec deux matrices de transformation: on dit que ce tenseur est deux fois covariant et, comme il se doit, les indices apparaissent en position inférieure. D'une manière générale, le nombre et la position des indices sur un tenseur déterminent sa variance. La condition $g'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$ peut s'écrire sous forme matricielle:

$$g = \tilde{\Lambda} g \Lambda \tag{4.44}$$

où g et Λ représentent respectivement la matrice métrique et une matrice de transformation de Lorentz, et où $\tilde{\Lambda}$ est la matrice transposée de Λ . Puisque g^2 est la matrice identité, la relation (4.44) implique le lien suivant entre une matrice Λ et son inverse Λ^{-1} :

$$\Lambda^{-1} = g \tilde{\Lambda} g \tag{4.45}$$

La relation (4.44) implique que $(\det \Lambda)^2 \det g = \det g$, c'est-à-dire que $\det \Lambda = \pm 1$. On a également

$$1 = g_{00} = \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu g_{\mu\nu} = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2. \tag{4.46}$$

Ce qui entraîne $|\Lambda_0^0| \geq 1$.

On définit également le tenseur inverse de composantes $g^{\mu\nu}$ tel que:

$$g^{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \tag{4.47}$$

De même que précédemment, on

$$g'^{\mu\nu} = e'^\mu \cdot e'^\nu = (\Lambda_\alpha^\mu e^\alpha) \cdot (\Lambda_\beta^\nu e^\beta) = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu g^{\alpha\beta} \tag{4.48}$$

Le tenseur inverse $g^{\mu\nu}$ est aussi **deux fois contravariant et symétrique** ($g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$)



Remarques

Le raisonnement en *termes de géométrie* dans l'espace euclidien est **totalelement différent** de celui avec une *métrique minkowskienne*. Ainsi, le produit scalaire d'un quadrivecteur \mathbf{v} avec lui-même, le *pseudo-norme*, et est défini par $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v^0)^2 - \vec{v}^2$. Cette grandeur est donc un invariant. Le produit scalaire (4.22) est évidemment symétrique mais, contrairement au produit scalaire dans un espace euclidien, **il n'est pas défini positif**. Comme nous l'avons déjà vu, on distingue trois *genres* de quadrivecteurs suivant le signe de la pseudo-norme:

- ▶ **Pseudo-norme positive:** *genre temps*. Ex: $(s, 0, 0, 0)$
- ▶ **Pseudo-norme nulle:** *genre lumière*. Ex: $(s, \pm s, 0, 0)$
- ▶ **Pseudo-norme négative:** *genre espace*. Ex: $(0, s, 0, 0)$

En général, de nombreuses grandeurs physiques sont représentées par des quadrivecteurs de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Il est donc intéressant d'établir certaines propriétés de ce genre particulier de quadrivecteurs.

Soit $a^\mu = (a^0, \vec{a})$ les composantes d'un quadrivecteur de **genre temps** pointant vers le futur et $b^\mu = (b^0, \vec{b})$ les composantes d'un quadrivecteur de **genre temps** ou de **genre lumière** pointant vers le futur. On a donc:

$$a^2 > 0, \quad b^2 \geq 0, \quad a^0 > 0 \quad \text{et} \quad b^0 > 0$$

Calculons la pseudo-norme de la somme $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de ces deux quadrivecteurs:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &> 2\left(a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}\right) \\ &\geq 2\left(a^0 b^0 - |\vec{a}| |\vec{b}|\right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Comme nous avons $a^0 > |\vec{a}|$ et $b^0 \geq |\vec{b}|$, il en résulte que $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 > 0$. De plus $a^0 + b^0$ est strictement positif. On peut donc en conclure que **$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur**. Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont **tous les deux des quadrivecteurs de genre lumière**, l'inégalité de la deuxième ligne des relations (4.49) devient une égalité. On en conclut alors que \mathbf{a} et \mathbf{b} est un quadrivecteur de genre lumière ou de genre temps pointant vers le futur. On a donc les propriétés suivantes:

- ▶ La somme de deux quadrivecteurs de genre temps pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur.
- ▶ La somme de deux quadrivecteurs de genre lumière pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur.
- ▶ La somme d'un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur et d'un quadrivecteur de genre lumière pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur.

Les règles de transformation d'un quadrivecteur quelconque \mathbf{v} de composantes contravariantes (v^0, \vec{v}) s'écrivent donc

$$\begin{aligned} v^0 &= \gamma(v'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'), \\ \vec{v}_\parallel &= \gamma(\vec{v}'_\parallel + \vec{\beta} v'^0), \\ \vec{v}_\perp &= \vec{v}'_\perp, \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.4 Quadrivecteur vitesse

Soient $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{r})$ les composantes contravariantes du quadrivecteur $d\mathbf{x}$, intervalle d'espace-temps déterminé par deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers d'un mobile ponctuel. En divisant ces différentielles par un invariant relativiste, en l'occurrence **l'intervalle de temps propre** $d\tau$, on obtient les composantes d'un nouveau quadrivecteur \mathbf{u} , appelé **quadrivecteur vitesse** ou **quadrivitesse**, dont nous désignerons les composantes contravariantes par u^μ sont:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{avec} \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma(v)} \tag{4.51}$$

Le quadrivecteur vitesse est donc **la dérivée du quadrivecteur position par rapport au temps propre**.

$$\left\{ \begin{aligned} u^0 &= cdt/d\tau = \frac{cdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u^1 &= dx/d\tau = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u^2 &= dy/d\tau = \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u^3 &= dz/d\tau = \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right. \tag{4.52}$$

ou

$$(u^0, \vec{u}) = (\gamma(v)c, \gamma(v)\vec{v}) \tag{4.53}$$

avec

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.54}$$

La **pseudo-norme de ce quadrivecteur** $u^2 = (u^0)^2 - \vec{v}^2$ est **un invariant relativiste**. On peut donc l'évaluer, par exemple, dans le référentiel propre du mobile (dans ce référentiel, $\vec{v} = \vec{0}$ à l'instant considéré). On obtient ainsi

$$\mathbf{u}^2 = c^2 > 0 \tag{4.55}$$

Le quadrivecteur vitesse est donc toujours **de genre temps**. Il pointe vers le futur car $u^0 > 0$.

Le quadrivecteur vitesse est tangent à la ligne d'univers du mobile. Désignons par \mathcal{R}' le référentiel propre instantané de ce dernier. Dans ce référentiel, on a $u'^\mu = (c, \vec{0})$. On a donc $\mathbf{u} = c\mathbf{e}'_t$, où \mathbf{e}'_t est le quadrivecteur de base dans la direction du temps pour le référentiel \mathcal{R}' . On peut donc dire que le quadrivecteur vitesse indique la direction, dans l'espace-temps, de l'axe du temps instantané d'un mobile

Soit un référentiel d'inertie \mathcal{R}' animé d'une vitesse \vec{V} par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Les composantes (u^0, \vec{u}) et (u'^0, \vec{u}') du quadrivecteur vitesse, relatives aux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , sont unies, comme pour

n'importe quel quadrivecteur, par:

$$\begin{aligned} u^0 &= \gamma(u'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'_{\parallel}), \\ \vec{u}_{\parallel} &= \gamma(\vec{u}'_{\parallel} + \vec{\beta} u'^0), \\ \vec{u}_{\perp} &= \vec{u}'_{\perp}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

où $(\vec{u}_{\parallel}, \vec{u}_{\perp})$ et $(\vec{u}'_{\parallel}, \vec{u}'_{\perp})$ sont les composantes longitudinales et transversales de \vec{u} et \vec{u}' par rapport à la vitesse relative \vec{V} . Ces relations et l'expression (4.53) donnent pour les composantes spatiales

$$\gamma(v) \vec{v}_{\parallel} = \gamma \gamma(v') (\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}), \quad (4.57)$$

$$\gamma(v) \vec{v}_{\perp} = \gamma \gamma(v') \vec{v}'_{\perp}. \quad (4.58)$$

La loi de transformation de la composante temporelle u^0 donne

$$\frac{\gamma(v)}{\gamma(v')} = \gamma \left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right) \quad (4.59)$$

On obtient donc pour la composante longitudinale de la vitesse

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (4.60)$$

et pour la composante transversale

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)} \quad (4.61)$$

4.5 Quadrivecteur accélération

Le **quadrivecteur accélération**, ou **quadriaccélération**, est, par définition, la dérivée du quadrivecteur vitesse par rapport au temps propre. Les composantes contravariantes a^{μ} de ce quadrivecteur sont donc données par:

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} \quad (4.62)$$

En cinématique classique, l'accélération, $\vec{\phi}$ d'un mobile est définie par

$$\vec{\phi} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.63)$$

En partant de

$$\frac{d}{dt} \gamma(v) = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{\phi}}{c^2}, \quad (4.64)$$

et en utilisant les relations (4.53), on aboutit à:

$$a^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\phi}}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}, \quad (4.65a)$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{\phi}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\phi}) \vec{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}. \quad (4.65b)$$

La pseudo-norme du quadrivecteur accélération peut être évaluée dans le référentiel propre du mobile, plus précisément dans un référentiel d'inertie \mathcal{S} coïncidant instantanément avec le référentiel propre. Dans ce référentiel \mathcal{S} , la vitesse instantanée est nulle $\vec{v} = \vec{0}$. Par contre, comme la vitesse n'est pas constante, la vitesse à un instant ultérieur infinitésimal dt n'est plus nulle, mais vaut $d\vec{v}$. Le mobile est donc soumis à une accélération $\vec{\phi}(0) = d\vec{v}/dt$, qu'on appelle **l'accélération propre** à l'instant considéré. évidemment, dès cet instant dt , le référentiel propre n'est plus équivalent au référentiel \mathcal{S} , et il faut changer à nouveau de référentiel d'inertie pour s'adapter à la condition de vitesse nulle. Dans le référentiel propre, les expressions (4.65a) et (4.65b) se réduisent à:

$$a^0 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{\phi}(0) \quad (4.66)$$

ce qui peut donner:

$$\mathbf{a}^2 = (a^0)^2 - \vec{a}^2 = -\vec{\phi}^2(0). \quad (4.67)$$

La pseudo-norme \mathbf{a}^2 du quadrivecteur accélération propre \mathbf{a} étant un invariant, la relation ci-dessus nous indique que tous les observateurs d'inertie peuvent s'accorder sur la grandeur de l'accélération propre subie par le mobile, qui n'est en général pas constante. Cette relation nous indique également que le quadrivecteur accélération est toujours **de genre espace**. On a également:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = u^0 a^0 - \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \quad (4.68)$$

Les quadrivecteurs vitesse et accélération sont donc orthogonaux (au sens de Minkowski).

4.6 Limites de la relativité restreinte

Il est bon de rappeler les limites d'application de la relativité restreinte:

- ▶ Les systèmes considérés sont des systèmes inertiels. On parle donc ici de systèmes qui ont des vitesses rectilignes uniformes donc absence de toute accélération.
- ▶ La gravitation est nulle ou négligeable. La métrique (de Minkowski) est donc plate. Dans le cas contraire, nous aurions à introduire une métrique courbe et devrions passer à la relativité générale pour traiter le problème.
- ▶ Les masses et énergies totales sont réelles et positives. Nous ne considérons pas d'objets exotiques comme des tachyons.
- ▶ Dans la limite où les vitesses sont petites par rapport à c , les effets relativistes peuvent être négligés à la faveur de la mécanique de Newton.

Exercices

- 1 Trouvez dans le référentiel \mathcal{R}' le temps où se produit un événement qui arrive dans \mathcal{R} pour $x = 95 \text{ m}$, $y = 65 \text{ m}$, $z = 33 \text{ m}$ et $t = 25 \text{ m}$. L'événement se produit à $x' = 125 \text{ m}$ dans \mathcal{R}' . La vitesse entre les \mathcal{R} et \mathcal{R}' est de $0,8$ selon l'axe des x . Donner la matrice de transformation des coordonnées de \mathcal{R} à celles de \mathcal{R}' .
- 2 Le savant Paul Langevin imaginait (1911) un cosmonaute qui quitterait la Terre avec une vitesse avoisinant celle de la lumière et qui y reviendrait au bout de deux ans de son temps propre, en conclut qu'il trouverait, à son retour, la Terre vieillie de deux siècles. Ainsi, d'après ce raisonnement, deux frères jumeaux, de 35 ans: Jf est resté sur Terre et Jm parti faire un tour et revenu voir son frère après 9 ans passés en fusée ultra-rapide ($4/5$ de la vitesse de la lumière). On demande les âges respectifs des jumeaux aux retrouvailles relativistes?
- 3 Un repère s' se déplace à une vitesse 0.8 par rapport au repère s . Deux événements se produisent: l'événement \mathcal{E}_1 à $x_1 = 10 \text{ m}$, $t_1 = 60 \text{ m}$ et l'événement \mathcal{E}_2 à $x_2 = 50 \text{ m}$, $t_2 = 90 \text{ m}$.
- (a) Construisez deux diagrammes espace-temps illustrant ce cas, l'un montrant le point de vue de s (axes t et x orthogonaux) et l'autre le point de vue de s' (axes t' et x' orthogonaux).
- (b) L'un des deux événements décrits peut-il influencer l'autre et, si oui, lequel?
- 4 Une règle d'un mètre fonce vers nous et paraît mesurer 0.5 m . Quelle est sa vitesse?
- 5 Considérons deux trains A et B, voyageant sur un même axe, vers la droite, à des vitesses $v(A) = \frac{4}{5}c$ et $v(B) = \frac{3}{5}c$, et ayant tous les deux une longueur propre L . A est initialement loin derrière B mais le rattrape progressivement car plus rapide. Selon un observateur immobile C, quelle sera la durée entre
- (i) le moment où l'avant de A coïncide avec l'arrière de B et
- (ii) le moment où l'arrière de A coïncide avec l'avant de B ? On cherche donc la durée de dépassement de B par A, en fonction de L et de c .
- 6 Après avoir synchronisé leurs horloges, une fusée avec à son bord un observateur (O')- référentiel (\mathcal{R}') - quitte un observateur terrestre (O) - référentiel (\mathcal{R}) - avec la vitesse \vec{v} . Au bout d'un temps t_1 , mesuré dans le référentiel de (\mathcal{R}), une seconde fusée avec à son bord un observateur (O'') - référentiel (\mathcal{R}'') - quitte à son tour la Terre avec une vitesse \vec{u} . On considère que \vec{v} et \vec{u} ont même direction et même sens et que, en module, $u > v$. Dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}) l'observateur (O'') rattrape (O') à l'instant t_2 .
- (1) Calculer t_2 en fonction de t_1 , u et v
- (2) Pour les horloges au repos dans (\mathcal{R}') à quel instant (O'') a-t-il quitté la Terre?
- (3) Pour les horloges au repos dans (\mathcal{R}') à quel instant (O'') a-t-il rattrapé (O')?
- (4) Déterminer dans le référentiel (\mathcal{R}') la distance séparant (O') de (O) à l'instant où (O'') rattrape (O').
- (5) En déduire l'expression de la vitesse de (O'') quand elle est mesurée par (O').
- 7 Un observateur (O') à bord d'une fusée croise selon un mouvement rectiligne uniforme un autre observateur terrestre (O) à la vitesse $v = 0,6c$. Les horloges de (O) et de (O') sont synchronisées et mises à zéro au moment du croisement. Chaque minute, mesurée à bord de la fusée, (O') émet un flash lumineux ($\Delta t'_1 = 1 \text{ min}$).

- (1) Quelle est la période Δt_1 d'émission par (\mathcal{O}') des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O}) ?
- (2) Quelle est la période Δt_2 de réception par (\mathcal{O}) des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O}') ?
- (3) Quelle est la période $\Delta t_2'$ de réception par (\mathcal{O}') des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (\mathcal{O}') ?
- 8 (a) Un photon se déplace avec une vitesse $v' = c = 1$ dans la direction des x dans un repère \mathcal{R}' se déplaçant avec une vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$ dans \mathcal{R} . Déterminer sa vitesse dans \mathcal{R} .
- (b) Au cas où la vitesse du photon dans \mathcal{R} était dans la direction des y c'est-à-dire $v_y = c = 1$, quelle serait sa vitesse dans \mathcal{R}' .
- 9 Une particule passe du point 1 $(t, x, y, z) = (1, 1, 1, 1)$ au point 2 $(t, x, y, z) = (3, 2, 1, 1)$ dans le repère \mathcal{R} .
- (a) Calculez ses coordonnées dans le repère \mathcal{R}' si \mathcal{R}' se déplace avec une vitesse $V = 0.8$ dans la direction des x par rapport à \mathcal{R} .
- (b) Calculez l'intervalle entre les deux points dans les deux repères.
- 10 Un événement \mathcal{A} a lieu à l'origine du repère \mathcal{R} à $t = 0$. Un autre événement \mathcal{B} , séparé du premier par une distance de $2.5 \times 10^9 \text{ m}$ a lieu 10 secondes plus tard. Trouvez la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} pour laquelle les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} :
- (a) ont lieu au même point?
- (b) ont lieu simultanément?
- (c) Dans le cas (a), quel est le délai t' entre \mathcal{A} et \mathcal{B} ?
- 1 De quel genre (temps, lumière ou espace) sont les événements suivant? (Les unités sont telles que la vitesse de la lumière $c = 1$)
- (a) $(0, 0, 0, 0)$ et $(-1, 1, 0, 0)$
- (b) $(1, 1, -1, 0)$ et $(-1, 1, 0, 2)$
- (c) $(-1, 1, -1, 1)$ et $(4, 1, -1, 6)$

DYNAMIQUE RELATIVISTE

Le changement fondamental apporté au concept espace-temps nécessite une révision des lois de la mécanique développées pour des vitesses non relativistes. Ainsi $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ n'est pas valide: il suffirait d'appliquer une force constante suffisamment longtemps pour accélérer jusqu'à une vitesse plus grande que celle de la lumière!

Les lois de la mécanique sont toujours soumises au principe de l'invariance galiléenne. En incorporant la transformation de Lorentz à ce principe, on dira que

Postulat 3.1

Les lois fondamentales de la physique ont la même forme dans tous les repères reliés par une transformation de Lorentz

5.1 Equation fondamentale

Puisque les lois de la **mécanique newtonienne** sont **invariantes pour les transformations de Galilée** mais **non pour les transformations de Lorentz**, elles sont incompatibles avec *la théorie de la relativité restreinte*. Par conséquent, nous avons été amenés à formuler une loi relativiste de composition des vitesses qui se réduit à la loi galiléenne d'addition lorsque les vitesses sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière.

De même, il faut remplacer **la dynamique classique de Newton** par **une dynamique relativiste**, c'est-à-dire qui soit **invariante pour les transformations de Lorentz**. Comme les lois classiques sont très bien vérifiées par l'expérience usuelle, il faut que les nouvelles lois se réduisent aux lois classiques dans le domaine des faibles vitesses.

La loi fondamentale de la mécanique de Newton pour une particule peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.1)$$

Dans cette équation, t est le temps (absolu) et \vec{F} est la force qui modifie l'impulsion \vec{p} . Cette dernière grandeur est donnée par la relation:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (5.2)$$

où \vec{v} est la vitesse de la particule et m est sa masse d'inertie, considérée comme *invariante en mécanique classique*. De la loi (5.1) découlent des lois de conservation d'une importance capitale en mécanique classique: *la conservation de l'impulsion* et *la conservation de l'énergie* pour un système isolé.

L'homologue relativiste de l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne doit être un invariant de forme pour les transformations de Lorentz, ce qui est manifestement le cas si cette équation se présente comme l'égalité de deux quadrivecteurs. à partir du quadrivecteur vitesse \mathbf{u} défini par la

relation (4.51), on peut construire un quadrivecteur \mathbf{p} pour une particule massive (le cas des particules de masse nulle sera traité ultérieurement), que nous appellerons provisoirement *néquadrivecteur impulsion*,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (5.3)$$



Remarques

La masse m , supposée invariante, est identique à la masse d'inertie utilisée en mécanique newtonienne. Ici, le concept selon lequel *la masse d'un corps est définie comme la néquantité de matière qui lui est associée* est mal défini. Ainsi, il est préférable de relier la masse à des notions telles que *l'inertie, le contenu énergétique, la capacité de générer un champ de gravitation*. Cette dernière propriété concerne directement la relativité générale et ne sera pas traitée ici.

Les composantes de ce quadrivecteur \mathbf{p} ont bien la dimension d'une impulsion; ses parties temporelle et spatiale sont:

$$p^0 = m\gamma(v)c, \quad (5.4a)$$

$$\vec{p} = m\gamma(v)\vec{v} \quad (5.4b)$$

où $\gamma(v)$ est donné par la formule (4.54). Nous conviendrons d'appeler la grandeur (5.4b) *impulsion relativiste*. à la limite non relativiste, celle-ci se réduit à la définition newtonienne de l'impulsion, $m\vec{v}$. La partie temporelle du quadrivecteur \mathbf{p} sera discutée ultérieurement. La version relativiste la plus naturelle de l'équation (5.1) est une égalité entre quadrivecteurs. On peut raisonnablement penser à la forme suivante

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (5.5)$$

où $d\tau$ est la variation de temps propre pour la particule; $d\mathbf{p}/d\tau$ est manifestement *un quadrivecteur* et \mathbf{K} est ce que l'on conviendra d'appeler *le quadrivecteur force*, ou *force de Minkowski*.

L'équation (5.5) n'a un sens que si on est à même d'exprimer les composantes de ces quadrivecteurs en fonction de grandeurs mesurables. C'est manifestement le cas pour les quantités du membre de droite de cette équation. On peut raisonnablement s'attendre à ce qu'il existe un lien entre le quadrivecteur force \mathbf{K} et la force \vec{F} au sens classique du terme. L'équation (5.1) ne signifie pas que la partie spatiale \vec{K} du quadrivecteur \mathbf{K} s'identifie au vecteur force \vec{F} ; elle implique uniquement que \vec{K} tende vers \vec{F} pour des vitesses faibles devant celle de la lumière. Le lien exact entre ces deux vecteurs dépend des propriétés de transformation des composantes de la force.

Ainsi, selon la théorie physique mécanique classique:



Dans un référentiel d'inertie, une force \vec{F} , agissant sur une particule, modifie son impulsion relativiste d'une quantité $d\vec{p}$ pendant un intervalle de temps dt suivant la loi

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.6)$$

Si nous voulons que *la conservation de l'impulsion dans un référentiel d'inertie entraîne sa conservation dans n'importe quel autre référentiel d'inertie, alors il faut nécessairement que l'impulsion d'une particule soit définie par la relation (5.4b)*. D'après l'équation fondamentale (5.5) et la définition (5.6). Nous introduisons le postulat suivant:



L'impulsion relativiste \vec{p} , d'une particule libre de masse m animée d'une d'une vitesse \vec{v} , dans un référentiel d'inertie, est donnée par

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma(v) \vec{v} \quad (5.7)$$

Le lien entre la force agissant sur une particule et son accélération peut être établi au moyen des relations (5.6) et (5.7). En utilisant la relation (4.64), on trouve alors pour la force

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(\gamma(v))^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{\phi}}{c^2} \vec{v} + m\gamma(v) \vec{\phi} \quad (5.8)$$

En décomposant les vecteurs en leurs composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse instantanée, on obtient:

$$\vec{F}_{\parallel} = m(\gamma(v))^3 \vec{\phi}_{\parallel} \quad (5.9a)$$

$$\vec{F}_{\perp} = m\gamma(v) \vec{\phi}_{\perp} \quad (5.9b)$$

5.2 Equivalence masse-energie

Considérons une particule soumise à l'action d'une force \vec{F} . Définissons, comme en mécanique classique, son énergie cinétique relativiste T comme étant le travail de la force appliquée: $T = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

On a donc:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.10)$$

dans le référentiel où la vitesse de la particule est \vec{v} . En vertu de la relation (5.8), on obtient

$$\frac{dT}{dt} = m(\gamma(v))^3 \vec{\phi} \cdot \vec{v} \quad (5.11)$$

En utilisant l'expression (4.64), on peut écrire

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (m\gamma(v)c^2). \quad (5.12)$$

En intégrant, on obtient

$$T = m\gamma(v)c^2 + T_0 \quad (5.13)$$

Mais par définition de l'énergie cinétique, on doit avoir $T = 0$ quand $\vec{v} = \vec{0}$, ce qui fixe la constante d'intégration $T_0 = -mc^2$. On a finalement

$$T = m\gamma(v)c^2 - mc^2 \quad (5.14)$$

Alors, la grandeur

$$E = mc^2 + T = m\gamma(v)c^2 \quad (5.15)$$

est par définition **l'énergie totale** de la particule, composée de l'énergie cinétique (5.14) et de l'énergie dite **ńde reposz**.

$$E_0 = mc^2 \quad (5.16)$$

L'expression (5.15) a été interprétée par Einstein comme étant l'énergie propre de la matière. Ainsi, Comme on le voit dans la relation (5.16), la masse m de la particule est **la masse ńau reposz** et, dans certains livres, cette masse est désignée par m_0 . L'énergie de repos de la particule s'écrit donc $E_0 = m_0c^2$.

La notion d'énergie de repos n'a de sens physique que dans la mesure où il existe un ou des processus capables de transformer la masse d'une particule en une forme d'énergie, par exemple, du rayonnement ou de l'énergie cinétique pour d'autres particules. *La théorie de la relativité restreinte ne peut pas nous dire si un tel mécanisme de conversion existe dans la nature, mais, dans l'hypothèse où un tel processus existe, elle fixe par la formule (5.16) la quantité d'énergie qui peut être libérée par **annihilation**, c'est-à-dire **la désintégration complète d'une masse donnée**.* Il est à noter qu'en raison du coefficient c^2 , l'énergie libérée par un tel processus est gigantesque.

Exemple

L'annihilation de 1 g de matière fournirait environ $9 \times 10^{13} \text{ J}$, soit, 25 millions de kWh , ce qui équivaut à la production quotidienne en énergie d'une centrale nucléaire d'une puissance de 1 GW. C'est également la quantité d'énergie qui est libérée par une charge nucléaire^a de 20 kt.

^aL'énergie dégagée par les explosifs nucléaires se mesure généralement en énergie équivalente libérée par une masse d'explosif chimique TNT (*trinitrotoluène*) mesurée en kilotonnes (kt) ou en mégatonnes (Mt). Une énergie de 1 kt correspond à $4,2 \times 10^{12} \text{ J}$.

Par exemple, des protons rapides peuvent pénétrer un noyau de ${}^7\text{Li}$ pour former un noyau composé instable qui ne tarde pas à se désintégrer en deux particules α (${}^4\text{He}$). La somme des masses des deux noyaux dans la voie de sortie est inférieure à la somme des masses des deux particules dans la voie d'entrée. Des mesures précises de masse des noyaux montrent que cette différence de masse a été convertie en énergie cinétique des deux particules α .

La conversion de la matière en énergie peut être totale dans une réaction d'annihilation *matière-antimatière*, comme par exemple la désintégration d'un électron et d'un positron en une paire de photons γ .

Il existe donc bien **une équivalence masse-énergie**.

Examinons ce que devient l'énergie E donnée par la formule (5.15) à la limite des faibles vitesses. En utilisant le fait que

$$\lim_{x \ll 1} (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad (5.17)$$

on trouve

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad v \ll c. \quad (5.18)$$

Le second terme du membre de droite de la formule (5.18) est simplement l'énergie cinétique classique de la particule. On voit que la définition relativiste que nous avons donnée de l'énergie totale permet de retrouver la définition classique de l'énergie cinétique, avec toutefois en plus l'énergie de repos de la particule. *Cette énergie résiduelle ne cause aucun problème car, en mécanique newtonienne, la masse*

ne peut jamais être convertie en énergie dans les interactions entre particules. Autrement dit, dans ce cadre, l'énergie de repos ne joue donc aucun rôle et peut être tout simplement ignorée.

En raison du facteur $\gamma(v)$ intervenant dans la formule de l'énergie cinétique, celle-ci peut croître indéfiniment avec la vitesse, et ce d'autant plus rapidement que v s'approche de c . *Une masse de 1 kg se déplaçant à 4% de la vitesse de la lumière possède une énergie cinétique équivalant à environ 20 kt, c'est-à-dire l'énergie dégagée par la première bombe atomique. Avec une vitesse de 0,3 c, l'énergie cinétique de cette masse est d'environ 1 Mt, c'est-à-dire la charge d'une arme thermonucléaire classique. à 98% de la vitesse de la lumière, la masse possède une énergie cinétique de l'ordre de 100 Mt, deux fois l'énergie dégagée par la plus puissante arme nucléaire jamais testée.*



Remarques

On définit parfois *la masse relativiste* $m(v)$ d'une particule par la formule $m(v) = m\gamma(v)$. Dans ce cas, *l'impulsion d'une particule est simplement sa masse relativiste multipliée par sa vitesse, et son énergie totale sa masse relativiste multipliée par c^2* . Cette notion de masse relativiste est peu (ou pas) utile. En fait la masse d'un corps m est un invariant relativiste. Comme déjà stipulé ci-haut, cette masse est parfois appelée masse au repos $m(v = 0) = m_0$ ou m .

5.3 Le quadrivecteur énergie-impulsion

Si m est la masse d'une particule libre et \mathbf{u} son quadrivecteur vitesse, nous pouvons maintenant, à partir des équations (5.4a) et (5.15) donner les parties temporelle et spatiale du quadrivecteur $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ par

$$p^0 = m\gamma(v)c = \frac{E}{c} \quad (5.19a)$$

$$\vec{p} = m\gamma(v)\vec{v} \quad (5.19b)$$

où E est l'énergie totale de la particule. On convient donc d'appeler \mathbf{p} *le quadrivecteur énergie-impulsion* associé à la particule. Des expressions (5.19a) et (5.19b), on peut tirer deux relations qui sont utiles, l'une donnant la vitesse de la particule libre

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E}, \quad (5.20)$$

et l'autre donnant son facteur $\gamma(v)$

$$\gamma(v) = \frac{E}{mc^2} \quad (5.21)$$

La pseudo-norme \mathbf{p}^2 du quadrivecteur énergie-impulsion est *un invariant relativiste*, et est égale à $m^2\mathbf{u}^2$. En utilisant la relation (4.55), on obtient

$$\mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2. \quad (5.22)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 = \textit{invariant de Lorentz}$$

(De même, connaissant les transformations de Lorentz de p^μ (voir section 5.5), on peut également montrer que

$$p^\mu x_\mu = x^\mu p_\mu = \textit{invariant de Lorentz}$$

car il s'agit également d'un produit scalaire de deux quadrivecteurs de Lorentz.)

On voit ainsi que **le quadrivecteur énergie-impulsion** d'une particule matérielle est **un quadrivecteur de genre temps**. Ce quadrivecteur pointe vers le futur car sa composante temporelle E/c est par définition positive. Il faut noter que la relation (5.22) n'est valable que pour une particule libre. On peut la récrire sous la forme

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.23)$$

Cette équation est connue sous le nom de **relation d'Einstein**. On peut en déduire le lien entre l'impulsion et l'énergie cinétique d'une particule libre (en utilisant la relation (5.15)):

$$T^2 + 2mc^2 T = \vec{p}^2 c^2 \quad (5.24)$$

Pour de faibles valeurs de la vitesse, plus précisément quand l'énergie cinétique est petite devant l'énergie de repos, $T \ll mc^2$, on trouve

$$T \approx \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (5.25)$$

ce qui est bien l'expression classique de l'énergie cinétique.

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimée sous une forme très compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$p^\mu = \sum_n p_n^\mu \quad (5.26)$$

Ainsi, la conservation d'énergie et d'impulsion conduit à:

$$p_{avant}^\mu = p_{aprs}^\mu \quad (5.27)$$

Il en découle donc que:

$$p_{avant}^i = p_{aprs}^i \quad \text{ou} \quad \vec{p}_{avant} = \vec{p}_{aprs} \quad (5.28)$$

ce qui est **la conservation de l'impulsion totale** et

$$p_{avant}^0 = p_{aprs}^0 \quad \text{ou} \quad E_{avant}^{tot} = E_{aprs}^{tot} \quad (5.29)$$

ce qui est **la conservation de l'énergie totale**.

Il est aussi possible de déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité p^μ (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la grandeur de toute énergie-impulsion est un invariant relativiste (même la pseudo-norme dans tous les repères). On aura donc, par exemple dans un repère arbitraire \mathcal{R}

$$\left(p_{\mathcal{R},avant}^\mu\right)^2 = \left(p_{\mathcal{R},aprs}^\mu\right)^2 \quad (5.30)$$

mais puisqu'il s'agit d'invariant de Lorentz (relativiste), cette quantité est la même dans tous les repères. Dans un repère \mathcal{R}' on aura

$$\left(p_{\mathcal{R},avant}^\mu\right)^2 = \left(p_{\mathcal{R},aprs}^\mu\right)^2 = \left(p_{\mathcal{R}',avant}^\mu\right)^2 = \left(p_{\mathcal{R}',aprs}^\mu\right)^2 \quad (5.31)$$

5.4 Quadrivecteur force

Nous avons défini le quadrivecteur force par la formule $\mathbf{K} = d\mathbf{p}/d\tau$ (cf. relation (5.5)). Les parties spatiale et temporelle de ce quadrivecteur peuvent être reliées à la force. En effet, on a

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma(v) \vec{F}. \quad (5.32)$$

On a également

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d(E/c)}{dt} = \gamma(v) \frac{1}{c} \frac{dT}{dt} = \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}. \quad (5.33)$$

Finalement, le quadrivecteur force peut s'écrire

$$K^\mu = \left(\gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma(v) \vec{F} \right) \quad (5.34)$$

La loi de transformation de la force \vec{F} peut être obtenue en utilisant les lois de transformation (4.50) pour les composantes du quadrivecteur (5.34). On a ainsi (rappelons que $\vec{\beta} = \vec{V}/c$ est la vitesse relative entre les deux référentiels et $\gamma = \gamma(V)$)

$$\gamma(v) \vec{F}_\parallel = \gamma \gamma(v') \left(\vec{F}'_\parallel + \vec{\beta} \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}'}{c} \right) \quad (5.35a)$$

$$\gamma(v) \vec{F}_\perp = \gamma(v') \vec{F}'_\perp. \quad (5.35b)$$

En utilisant la formule (4.59), on obtient finalement

$$\vec{F}_\parallel = \frac{\vec{F}'_\parallel + \vec{\beta} (\vec{F}' \cdot \vec{v}')/c}{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'/c} \quad (5.36a)$$

$$\vec{F}_\perp = \frac{\vec{F}'_\perp}{\gamma (1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'/c)}. \quad (5.36b)$$

La pseudo-norme du quadrivecteur force \mathbf{K} agissant sur un mobile peut être évaluée dans le référentiel propre du mobile. La relation (5.34) implique

$$\mathbf{K}^2 = -\vec{F}(0)^2, \quad (5.37)$$

où $\vec{F}(0)$ est la force qui s'exerce sur le mobile dans son référentiel propre. **Le quadrivecteur force est donc toujours de genre espace.**

5.5 Transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion

Rappelons donc qu'en terme de temps propre $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$, on a

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (5.38)$$

et

$$\frac{E}{c} = \gamma mc = mc \frac{dt}{d\tau} \quad (5.39)$$

Puisque m et τ sont des invariants de Lorentz, on a que

$$\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \quad \text{se transforment comme} \quad ct, x, y, z. \quad (5.40)$$

Par conséquent, les relations (4.50), (5.19a) et (5.19b) entraînent lors d'un changement de référentiel de Lorentz sans rotation:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= \gamma \left(\frac{E'}{c} + \vec{\beta} \cdot \vec{p}' \right), \\ \vec{p}_{\parallel} &= \gamma \left(\vec{p}'_{\parallel} + \vec{\beta} \frac{E'}{c} \right), \\ \vec{p}_{\perp} &= \vec{p}'_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \vec{\beta} \cdot \vec{p} \right), \\ \vec{p}'_{\parallel} &= \gamma \left(\vec{p}_{\parallel} - \vec{\beta} \frac{E}{c} \right), \\ \vec{p}'_{\perp} &= \vec{p}_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ainsi

$$p_x = m \frac{dx}{d\tau} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p'_x &= m \frac{dx'}{d\tau} \\ &= m \frac{d}{d\tau} \gamma(x - \beta ct) \\ &= \gamma \left(\left(m \frac{dx}{d\tau} \right) - \beta \left(mc \frac{dt}{d\tau} \right) \right) \\ &= \gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

De la même façon

$$\frac{E}{c} = mc \frac{dt}{d\tau} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{E'}{c} &= mc \frac{dt'}{d\tau} = m \frac{d(ct')}{d\tau} \\ &= m \frac{d}{d\tau} \gamma(ct - \beta x) \\ &= \gamma \left(\left(mc \frac{dt}{d\tau} \right) - \beta \left(m \frac{dx}{d\tau} \right) \right) \\ &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Il en est de même pour y et z , de sorte que l'on a l'analogie suivante

$$\begin{aligned}
 t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) & \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \\
 x' &= \gamma \left(x - \beta t \right) & p'_x &= \gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\
 y' &= y & \implies p'_y &= p_y \\
 z' &= z & p'_z &= p_z
 \end{aligned}
 \tag{5.47}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}
 \tag{5.48}$$

ou dans le formalisme quadrivectoriel

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}
 \tag{5.49}$$



Remarques

Le facteur γ qui est explicite ici est le γ de la transformation de Lorentz, c'est-à-dire $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Il ne faut pas le confondre avec celui qui apparaît dans $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ et $\frac{E}{c} = \gamma mc$ c'est-à-dire $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$!

Ainsi, pour un objet qui a une vitesse $\vec{v} = V \vec{e}_x$ dans \mathcal{R} , c'est-à-dire est au repos dans \mathcal{R}' , on peut écrire

$$\left(\frac{E'}{c}, p'_x, p'_y, p'_z \right) = (mc, 0, 0, 0)
 \tag{5.50}$$

Alors, dans \mathcal{R} , on a:

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{c} &= \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta p'_x \right) = \gamma mc \\
 p_x &= \gamma \left(p'_x + \beta \frac{E'}{c} \right) = \gamma m v \\
 p_y &= p'_y \\
 p_z &= p'_z
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

5.6 Particule de masse nulle

5.6.1 Caractéristiques du quadrivecteur énergie-impulsion

Des considérations théoriques fondamentales font que le photon, particule associée aux ondes électromagnétiques, est considéré comme ayant une masse nulle.

Cependant, on montre expérimentalement qu'un photon transporte de l'énergie et de l'impulsion.

En mécanique newtonienne, l'impulsion d'une particule de masse nulle est nécessairement nulle. Ce n'est pas le cas dans le cadre de la mécanique relativiste. Si on fait l'hypothèse que la relation d'Einstein (5.23) est valable pour une particule de masse nulle, on obtient

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} \quad (5.52)$$

En vertu de la relation (5.20), sa vitesse est nécessairement égale à c . En effet, l'énergie d'une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière est une quantité finie seulement si la masse de la particule est nulle. Cela peut se montrer en écrivant la relation (5.21) sous la forme

$$m = \frac{E}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.53)$$

Quand $v = c$, alors $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est nul, et $m = 0$ quelle que soit la valeur de l'énergie E . Remarquons qu'en tenant compte de la relation (3.15), le temps propre qui s'écoule entre deux événements quelconques situés sur la ligne d'univers d'une telle particule est nul.

L'impulsion d'une particule de masse nulle (5.52) peut également être mise sous la forme

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{p} \quad (5.54)$$

où le vecteur unitaire caractérise la direction de propagation de la particule considérée. Le quadrivecteur énergie-impulsion \mathbf{p} associé à cette particule est donc donné par ses composantes

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c} \vec{p} \right) \quad (5.55)$$

Ce quadrivecteur est de *genre lumière* et *pointe vers le futur*.

Le photon, véritable *négrainz* de lumière, a été proposé par Einstein pour expliquer les résultats expérimentaux concernant l'effet photoélectrique.

Ainsi, un faisceau lumineux monochromatique de fréquence ν peut être considéré comme étant composé de photons d'énergie égale à $h\nu$, où h est la constante de Planck. L'impulsion de ces particules est donc donnée, en utilisant (5.52), par

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad (5.56)$$

où λ est la longueur d'onde du faisceau monochromatique considéré ($E = h\nu$ et $\nu = c/\lambda$). La relation (5.56), étendue aux particules matérielles, confère à celles-ci un aspect ondulatoire qui est un des fondements de la mécanique quantique.

La relation (5.52) nous montre qu'une quantité de mouvement de grandeur E/c est transférée à un atome quand un photon d'énergie E est absorbé par cet atome. Si le photon est réfléchi (absorbé puis réémis), l'impulsion transférée peut évaluer $2E/c$. Cela signifie que les photons exercent sur les corps une pression, appelée *pression de radiation*.

5.6.2 Aberration et effet Doppler

Considérons deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' reliés par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse relative \vec{V} . Le vecteur unitaire indiquant la direction de propagation d'une particule de masse nulle peut être décomposé en composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse relative \vec{V} dans les deux référentiels. Par exemple, dans le référentiel \mathcal{R} , on a

$$=_{\parallel} +_{\perp}, \quad \perp \cdot \vec{V} = 0, \quad \parallel^2 + \perp^2 = 1 \tag{5.57}$$

En utilisant l'expression (5.52) dans les relations (9.30), on trouve que les grandeurs E, \parallel et \perp satisfont aux lois de transformation

$$\begin{aligned} E &= \gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e}') E' \\ \parallel &= \gamma(\parallel' + \vec{\beta}) \frac{E'}{E} \\ \perp &= \perp' \frac{E'}{E} \end{aligned} \tag{5.58}$$

En introduisant la valeur de E'/E , tirée de la première de ces équations, dans les deux dernières, on obtient les relations

$$\parallel = \frac{\parallel' + \vec{\beta}}{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e}'} \quad \text{et} \quad \perp = \frac{\perp'}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e}')} \tag{5.59}$$

Les relations (5.59), homologues des relations (4.60) et (4.61) établies pour les particules de masse arbitraire, donnent **le changement de la direction apparente d'un faisceau lumineux lors du passage du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}'** , d'où leur nom de **formules d'aberration**.

Soit une source lumineuse S monochromatique de fréquence ν_S au repos dans le référentiel \mathcal{R}' . Cette source émet donc des photons d'énergie $E' = h\nu_S$. Ces photons sont captés dans le référentiel \mathcal{R} par un détecteur avec une énergie $E = h\nu$.

En vertu de la première relation (5.58) les fréquences ν et ν_S sont unies par la relation

$$\nu = \gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e}') \nu_S \tag{5.60}$$

Dans le cas particulier où les photons se déplacent parallèlement à la direction de la vitesse relative des deux référentiels, on a $\vec{\beta} \cdot \vec{e}' = \beta$, avec β , positif ou négatif selon que la source se rapproche ou s'éloigne du détecteur (voir figure 5.1). La relation (5.60) devient alors

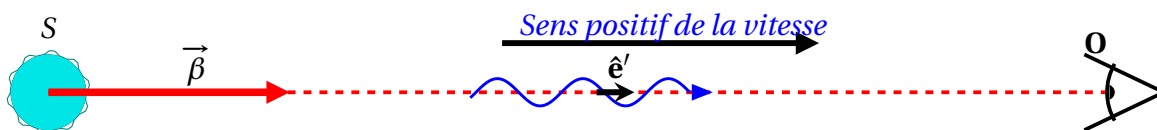


Figure 5.1: Situation physique dans laquelle un effet Doppler longitudinal peut être observé.

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_S \tag{5.61}$$

Cette variation de fréquence du signal lumineux est **l'effet Doppler longitudinal**. On peut également obtenir cette relation en examinant comment se transforme la distance entre deux impulsions lumineuses quand on passe d'un référentiel d'inertie à l'autre. Pour $\beta \ll 1$, la relation (5.61) et son équivalent classique se réduisent toutes deux, au premier ordre en β , à

$$\nu = (1 + \beta) \nu_S \tag{5.62}$$

Si la source *se rapproche du détecteur*, la radiation détectée est décalée vers *des fréquences plus hautes*, c'est-à-dire vers *des longueurs d'onde plus courtes*; on a alors ce que l'on appelle **un *rdécalage vers le bleu***. Dans le cas contraire, si la source *s'éloigne*, la radiation détectée est décalée vers *des fréquences plus basses*, c'est-à-dire *vers des grandes longueurs d'onde*; ce phénomène est alors qualifié de ***rdécalage vers le rouge***.

Notons encore que si la source et le détecteur sont disposés de sorte que $\vec{\beta}$ soit orthogonal à \vec{v} , à l'instant considéré, la relation (5.57) donne

$$v = (1 - \beta^2)^{-1/2} v_S \quad (5.63)$$

Cet effet, appelé ***effet Doppler transversal***, est purement relativiste.

Les galaxies distantes nous fuient avec une vitesse d'autant plus importante qu'elles sont lointaines. Cette observation capitale pour la compréhension des lois qui régissent notre univers a été faite par Edwin Hubble en 1929, sur base de décalages vers le rouge affectant systématiquement les spectres de ces galaxies. Un rayonnement de longueur d'onde λ_S émis par une galaxie lointaine est ainsi perçu avec une longueur d'onde λ plus grande. On mesure habituellement l'importance de ce phénomène par un nombre z , le *décalage relatif en longueur d'onde*, défini par la relation

$$\frac{\lambda_S}{\lambda} = 1 + z \quad (5.64)$$

Il est important de signaler que le *décalage vers le rouge cosmologique* n'est pas dû qu'à un effet Doppler, comme on pourrait assez naturellement le penser. Il ne peut s'interpréter correctement que dans le cadre d'un univers en expansion régi par les lois de la relativité générale.

5.7 Quadrivecteur fréquence

Une onde plane monochromatique est caractérisée par sa fréquence angulaire ou pulsation $\omega = 2\pi\nu$, ν étant la fréquence, et son vecteur d'onde \vec{k} , orienté dans la direction de propagation. Le module de ce vecteur, $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde, est le nombre d'onde angulaire.

Considérons une particule matérielle libre; son énergie E , son impulsion \vec{p} et sa masse m sont reliées par **la relation d'Einstein**.

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (5.65)$$

Le module de sa vitesse v est donné par la formule (voir la relation (5.20))

$$\frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}|c}{E} \quad (5.66)$$

En *mécanique quantique*, on associe à cette particule une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} au moyen **des relations de Planck-Einstein**,

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad (5.67)$$

où $\hbar = h/(2\pi)$ est défini à partir de la constante de Planck h . Ces expressions relient les paramètres *ñcorpustulairesz* (**énergie E** et **impulsion \vec{p}**) aux paramètres *ñondulatoiresz* (**pulsation ω** et **vecteur d'onde \vec{k}**). La constante de Planck ayant le statut de constante universelle, et donc de grandeur invariante, on peut associer au quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule \mathbf{p} , de composantes contravariantes $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, **un quadrivecteur fréquence** ou **quadrivecteur d'onde**

$$\mathbf{k} = \frac{c}{\hbar} \mathbf{p} \quad (5.68)$$

de composantes contravariantes $k^\mu = (\omega, c \vec{k})$.

En vertu de l'équation (5.65), on peut donc écrire:

$$\hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 \vec{k}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (5.69)$$

Remarques

Si $m = 0$, on retrouve la relation $\lambda = c/\nu$. Partant de cette dernière formule et utilisant *les relations de Planck-Einstein*, on retrouve immédiatement la formule (5.52).

La vitesse de phase v_p et la vitesse de groupe v_g associées à une onde sont données par

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (5.70)$$

En utilisant les relations (5.66) et (5.67), on constate que la vitesse v de cette particule est reliée à la vitesse de phase v_p de l'onde associée à cette particule par l'équation

$$\frac{v}{c} = \frac{c}{v_p}, \quad (5.71)$$

ce qui implique que $v_p > c$ si $v < c$. Ainsi à une particule matérielle de vitesse inférieure à celle de la lumière, on fait correspondre une onde plane monochromatique dont la vitesse de phase est supérieure à c . **Une particule matérielle ne saurait donc être assimilée à une telle onde.**

Par contre, le calcul de la vitesse de groupe de cette particule, obtenu en différentiant la relation (5.68), donne

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2}{v_p} = v < c \quad (5.72)$$

La vitesse de groupe correspond donc bien à la vitesse de propagation de la particule matérielle.

5.8 Vitesse limite de particule

D'après l'expression (5.15) donnant l'énergie totale E d'une particule de masse m , sa vitesse \vec{v} ne peut dépasser la vitesse de la lumière, sinon l'énergie E deviendrait infinie lorsque $v = c$. En effet,

$$E = m\gamma(v)c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \lim_{v \rightarrow c} E = \infty \quad (5.73)$$

L'étude de particules accélérées à des vitesses proches de c met en évidence cette limite, et ce fut un des premiers tests expérimentaux probants réalisés dès le début de la relativité restreinte.

Plus loin, dans l'équivalent en énergie d'une masse, nous avons vu que **l'annihilation de la masse d'un corps, ou d'une partie de celui-ci, permet de récupérer une énergie gigantesque sous forme de chaleur, d'énergie lumineuse**, etc, dû au coefficient c^2 . Inversement, si l'on fournit une quantité d'énergie à un corps sous forme de chaleur, sa variation de masse sera généralement infime.

A titre d'exemple, une augmentation de température de 100°C d'une masse d'eau de un kilogramme ne fait changer celle-ci que d'environ $5 \times 10^{-9}\text{g}$; une quantité insignifiante qui échappe à la mesure des balances même les plus perfectionnées. *L'apparition ou la disparition de particules élémentaires est une confirmation directe de l'équivalence entre masse et énergie.*

Ainsi, par exemple, lors du choc entre un électron et un positron, les deux particules disparaissent et il apparaît un rayonnement électromagnétique formé de deux photons.

D'autres exemples sont mis en évidence par les preuves expérimentales de la nouvelle loi de *conservation masse-énergie*. C'est ainsi qu'exprimer la masse d'une particule au repos en unités d'énergie est devenu une pratique courante. Pour cette raison, ables des particules élémentaires donnent **leurs masses en MeV (méga-électronvolt)**. Le proton au repos, par exemple, a une masse d'environ $m = 1,67 \times 10^{-27}\text{kg}$, ce qui correspond à une énergie $mc^2 = 938\text{MeV}$.

5.9 Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion et Collisions

5.9.1 Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion

L'impulsion totale et l'énergie totale d'un système isolé sont des grandeurs qui se conservent en mécanique newtonienne. Qu'en est-il en relativité restreinte?

Soit un ensemble de particules libres numérotées $i = 1, 2, \dots, N$. à chacune de ces particules est associé, dans un référentiel \mathcal{R} , un quadrivecteur énergie-impulsion \mathbf{p}_i de composantes $(E_i/c, \vec{p}_i)$, quadrivecteur

de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Soit \mathbf{p} , le quadrivecteur de composantes $(E/c, \vec{p})$ résultant de la somme des quadrivecteurs individuels \mathbf{p}_i : $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$

$$\frac{E}{c} = \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{c} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (5.74)$$

Dans les sections suivantes, nous avons signalé que la forme relativiste de l'impulsion d'une particule avait été déterminée de manière à ce que la conservation de l'impulsion dans un référentiel d'inertie entraîne sa conservation dans n'importe quel autre référentiel d'inertie. Considérons un système isolé subissant une évolution dans un référentiel d'inertie particulier \mathcal{R} . Si on suppose qu'il y a conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on doit avoir dans ce référentiel

$$\Delta E = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{p} = \vec{0} \quad (5.75)$$

où ΔE ($\Delta \vec{p}$) représente la variation d'énergie totale (d'impulsion totale) au cours de l'évolution du système. Les grandeurs $\Delta \vec{p}$ et $\Delta \vec{E}/c$ sont, par construction, *les composantes spatiales* et *la composante temporelle d'un quadrivecteur*. Ce quadrivecteur se transformant suivant les lois de transformation (5.41), on doit avoir

$$\Delta E' = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{p}' = \vec{0} \quad (5.76)$$

dans un autre référentiel d'inertie quelconque \mathcal{R}' . Cela signifie que **les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion total se conservent dans tous les référentiels d'inertie**.



Dans un système isolé, le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé.

Remarques

Ce principe n'ayant jamais été pris en défaut expérimentalement, il a été érigé au rang de postulat de base.

Considérons donc deux particules de masses m_1 et m_2 se déplaçant sur un même axe avec des vitesses initiales respectives v_1 et v_2 (tout se passant sur un axe, on peut remplacer les vecteurs par des valeurs algébriques). Elles subissent une collision de telle manière que l'énergie cinétique totale se conserve et que leurs masses ne soient pas modifiées. Après l'interaction, on suppose que ces particules se déplacent toujours sur le même axe mais avec des vitesses valant respectivement w_1 et w_2 . La conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale imposent que

$$\begin{aligned} m_1 \gamma(v_1) c^2 + m_2 \gamma(v_2) c^2 &= m_1 \gamma(w_1) c^2 + m_2 \gamma(w_2) c^2, \\ m_1 \gamma(v_1) v_1 + m_2 \gamma(v_2) v_2 &= m_1 \gamma(w_1) w_1 + m_2 \gamma(w_2) w_2. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Dans un autre référentiel \mathcal{R}' animé d'une vitesse \vec{V} dans le référentiel \mathcal{R} , On a $v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + (v'_1 V)/c^2}$, etc. Pour simplifier les expressions ainsi obtenues, on peut utiliser les formule (A7), (A8.a) et (A8.a). Dans \mathcal{R}' , la première équation (5.77) devient alors:

$$\begin{aligned} m_1 \gamma(v'_1) c^2 + m_2 \gamma(v'_2) c^2 + V [m_1 \gamma(v'_1) v'_1 + m_2 \gamma(v'_2) v'_2] &= \\ m_1 \gamma(w'_1) c^2 + m_2 \gamma(w'_2) c^2 + V [m_1 \gamma(w'_1) w'_1 + m_2 \gamma(w'_2) w'_2] & \end{aligned} \quad (5.78)$$

où un facteur commun $\gamma(V)$ a été éliminé. La deuxième équation des relations (5.77) conduit également au même résultat. L'égalité (5.78) est une égalité de deux polynômes du premier degré en V ; cette égalité étant satisfaite quel que soit le module de la vitesse, les coefficients correspondants de ce polynôme sont égaux. **L'égalité des termes constants conduit à la conservation de l'énergie dans le référentiel \mathcal{R}' , tandis que l'égalité des coefficients de V implique la conservation de l'impulsion dans le même référentiel.**

5.9.2 Applications: Fusée relativiste

Supposons qu'une fusée (*un véhicule qui assure sa propulsion par éjection de particules*), dans le vide et loin de toute source gravitationnelle, accélère le long de l'axe Ox d'un référentiel d'inertie \mathcal{R} en éjectant un flux de particules dans la direction opposée. Ce flux de particules a une vitesse u par rapport à la fusée.

Considérons donc, à un instant donné, l'éjection par la fusée d'une quantité de matière de masse dm dont la vitesse est w dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} . Supposons également qu'immédiatement avant cet instant, la fusée possédait une masse M et une vitesse v par rapport au référentiel \mathcal{R} . Immédiatement après cet instant, la fusée a une masse $M + dM$ ($dM < 0$) et une vitesse $v + dv$ dans le référentiel \mathcal{R} . La loi de conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ implique

$$p^0 = M\gamma(v)c = (M + dM)\gamma(v + dv)c + dm\gamma(w)c, \quad (5.79a)$$

$$p^1 = M\gamma(v)v = (M + dM)\gamma(v + dv)(v + dv) + dm\gamma(w)w, \quad (5.79b)$$

$p^2 = p^3 = 0$. D'après la relation (4.64), on a:

$$\gamma(v + dv) = \gamma(v) + \gamma^3(v) \frac{v dv}{c^2}. \quad (5.80)$$

La vitesse w de la matière dm dans \mathcal{R} est donnée par la loi d'addition des vitesses:

$$w = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (5.81)$$

où u et v sont supposées de même signe. En vertu des relations (A8.a) et (A8.b), on trouve

$$\gamma(w)c = \gamma(u)\gamma(v) \left(c - \frac{uv}{c} \right), \quad (5.82a)$$

$$\gamma(w)w = \gamma(u)\gamma(v) (v - u). \quad (5.82b)$$

Grâce à ces expressions et en utilisant la relation (5.80), les équations (5.79a) et (5.79b) peuvent s'écrire, sous la forme

$$dM + \gamma(u)dm = 0, \quad (5.83a)$$

$$M\gamma(v)^2 dv - u\gamma(u)dm = 0. \quad (5.83b)$$

En éliminant dm , on trouve l'équation du mouvement de la fusée:

$$M \frac{dv}{dM} + u \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0 \quad (5.84)$$

L'équation du mouvement de la fusée non relativiste s'obtient en faisant tendre c vers l'infini dans le second terme de l'équation (5.84)

La relation (5.83a) nous montre que $dM = -\gamma(u)dm$, c'est-à-dire que $|dM| > dm$ si $u \neq 0$. En effet, un observateur immobile par rapport à la fusée voit une quantité de matière de masse dm s'éloigner à la

vitesse u . L'énergie totale dE de cette matière est donc, pour cet observateur, égale à $dE = \gamma(u)dm c^2$. Cette énergie ne peut provenir que de la fusée elle-même. La fusée accuse donc une perte de masse égale en valeur absolue à $dE/c^2 = \gamma(u)dm = |dM|$, en vertu de la relation d'équivalence masse-énergie. Si nous supposons que u est constante, alors l'équation (5.84) peut être résolue.

Soit une fusée accélérant depuis la vitesse nulle jusqu'à la vitesse V . Sa masse passe de la valeur M_i à la valeur $M_f \leq M_i$. L'intégration de l'équation (5.84) donne

$$c \int_0^V \frac{dv/c}{1 - (v^2/c^2)} = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \tag{5.85}$$

Posons $R = dM/M$. On obtient ($R \geq 1$)¹

$$c \operatorname{argtanh} \left(\frac{V}{c} \right) = u \ln R. \tag{5.86}$$

Cette équation s'écrit également:

$$\frac{V}{c} = \tanh \left(\frac{u}{c} \ln R \right) = \frac{R^{2u/c} - 1}{R^{2u/c} + 1} \tag{5.87}$$

Cette formule est appelée **équation de la fusée relativiste**. Elle n'est valable que pour une fusée ne possédant qu'un seul étage et caractérisée par une vitesse constante u des gaz d'échappement.

Si $R = 1$ c'est-à-dire si la fusée n'éjecte pas de matière, ou si la vitesse d'éjection est nulle, on trouve évidemment $V = 0$, car la fusée ne peut alors modifier sa vitesse initiale. La relation (5.87) nous indique que V est toujours inférieure à c et que cette limite n'est atteinte que pour $R = \infty$, c'est-à-dire pour une fusée infiniment massive. Si u change de signe, alors la vitesse finale de la fusée V change également de signe, puisque la fusée est supposée être initialement au repos. Remarquons que rien n'interdit $u = c$; dans ce cas, on parle de fusée photonique car les particules éjectées sont des photons. à la limite non relativiste, c'est-à-dire $u \ln R \ll c$

$$V = u \ln R \tag{5.88}$$

5.9.3 Référentiel du Centre de Masse

Soit un ensemble de N particules, libres ou en interaction. Dans un référentiel \mathcal{R} , le quadrivecteur énergie-impulsion total \mathbf{p} de composantes $(E/c, \vec{p})$ est un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Ces propriétés du quadrivecteur énergie-impulsion total ne sont pas modifiées par une transformation de Lorentz.

Montrons que, si le quadrivecteur \mathbf{p} est de genre temps, il est possible de trouver un référentiel où l'impulsion totale du système est nulle. Ce référentiel est par définition **le référentiel du centre de masse "CM"**. Nous désignerons ce référentiel par \mathcal{R}_{CM} et sa vitesse par rapport au référentiel \mathcal{R} par \vec{V}_{CM} .

Le lien entre les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion total dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_{CM} s'obtient au moyen des relations (5.42), en tenant compte que $\vec{p}_{CM} = \vec{0}$. On a alors

$$E = \gamma_{CM} E_{CM} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \frac{E_{CM}}{c^2} \gamma_{CM} \vec{V}_{CM} \quad \text{avec} \quad \gamma_{CM} = 1 / \sqrt{1 - \vec{V}_{CM}^2 / c^2} \tag{5.89}$$

¹ $\int dx/(1-x^2) = \operatorname{argtanh} x$.

où E_{CM} est l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse. C'est l'énergie totale minimale qui peut être mesurée par un observateur quelconque pour ce système de particules puisque $\mathbf{p}^2 c^2 = E_{CM}^2 = E^2 - \vec{p}^2 c^2 \leq E^2$. En divisant les relations (5.89) membre à membre, on trouve

$$\frac{\vec{V}_{CM}}{c} = \frac{c \vec{p}}{E} \quad (5.90)$$

La comparaison des relations (5.20) et (5.90) montre que le système de particules considéré est animé d'un mouvement d'ensemble semblable à celui d'une particule fictive, au repos dans le référentiel \mathcal{R}_{CM} et possédant dans le référentiel \mathcal{R} une impulsion \vec{p} et une énergie E . En comparant les relations (5.89) et (5.19b), on voit que la masse de cette particule est donnée par

$$M = \frac{E_{CM}}{c^2} \quad (5.91)$$

Pour des **particules libres**, l'énergie E_{CM} totale dans le référentiel du centre de masse est égale à la somme des énergies totales individuelles de chaque particule dans le référentiel du centre de masse, l'énergie totale individuelle d'une particule étant la somme de son énergie cinétique dans ce système et de son énergie de repos. On a donc:

$$E_{CM} = \sum_{i=1}^N (T_{i,CM} + m_i c^2) = T_{CM} + M_0 c^2 \quad (5.92)$$

où $T_{i,CM}$ est l'énergie cinétique de la particule i dans le référentiel \mathcal{R}_{CM} , M_0 la somme des masses m_i des particules et T_{CM} l'énergie cinétique totale dans le centre de masse. La formule (5.91) devient

$$M = M_0 + \frac{T_{CM}}{c^2} \quad (5.93)$$

En d'autres termes, la masse de la particule fictive équivalente à un système de particules libres résulte non seulement de la somme des masses des particules qui le composent mais également de la somme de leurs énergies cinétiques divisée par c^2 . Ce résultat corrobore l'interprétation énergétique de la masse d'un objet physique. Notons qu'en vertu de la relation (5.93), M est supérieur à M_0 . De cette discussion, on déduit qu'**un objet chaud est plus massif que le même objet froid, puisque l'énergie d'agitation moléculaire est plus importante quand la température augmente. L'objet chaud a donc une inertie plus grande et libérerait plus d'énergie en cas d'annihilation totale.**

En réalité, dans les systèmes liés, les interactions entre les particules ont pour effet de réduire M à des valeurs inférieures à M_0 ; la différence entre ces deux masses mesure l'énergie de liaison du système, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut dépenser pour le séparer en ses constituants. Par exemple, l'énergie de liaison E_l d'un noyau atomique de masse M comprenant Z protons et N neutrons est donnée par

$$E_l = (Z m_p + N m_n - M) c^2 \quad (5.94)$$

où m_p et m_n sont les masses respectives du proton et du neutron.

5.9.4 Désintégrations et collisions

Les effets de la relativité restreinte se manifestent également de façon spectaculaire lors de la désintégration d'une particule instable ou lors de la collision de particules relativistes, matérielles ou non.

Lors d'**une désintégration**, une particule instable A disparaît pour laisser place dans la voie finale à N particules D_i , selon le schéma

$$A \longrightarrow D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_N \quad (5.95)$$

Les particules D_i du canal de sortie peuvent être stables ou elles-mêmes instables, donnant lieu dans ce cas à d'autres désintégrations du type (5.95). Même si la particule A se désintègre au repos, les particules émises D_i sont animées de vitesses plus ou moins grandes. Bien évidemment, on peut étudier une désintégration dans le référentiel de son choix, par exemple celui du laboratoire où la particule possède en général une vitesse importante, ou celui du centre de masse dans lequel elle est au repos. Le point crucial est qu'un processus de désintégration est un événement intrinsèque, qui doit être constaté par tous les observateurs, quel que soit leur référentiel.

Dans un processus de collision, on fait collisionner l'une sur l'autre deux particules A et B et ce choc produit, après la réaction, une série de particules D_i selon le schéma



Là encore, on peut étudier la collision dans le référentiel le plus approprié. Souvent le référentiel du laboratoire est celui dans lequel la particule B , appelée **cible**, est maintenue au repos, tandis que la particule A , appelée **projectile**, possède une vitesse importante. Nous verrons que le référentiel du centre de masse est également très utile. Dans les collisionneurs, on fait entrer en collision deux particules de même masse (par exemple e^+ et e^- , ou p et \bar{p} , où le symbole \bar{p} désigne un anti-proton) avec des vitesses opposées. Dans ce cas, le référentiel du centre de masse s'identifie, en pratique, au référentiel du laboratoire.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total permet d'obtenir de nombreux renseignements sur les caractéristiques d'un processus de collision, sans qu'il soit nécessaire de connaître les détails de l'interaction se manifestant entre les particules.

énergie de seuil

Lors d'une collision, une partie de l'énergie cinétique des particules peut être convertie en matière. Lorsque qu'une particule est créée par conversion d'énergie pure en matière, son antiparticule est également produite. Signalons que la théorie des champs requiert l'égalité stricte de la masse d'une particule et de celle de son antiparticule.

Supposons que, dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, une particule incidente A de masse m_a , d'impulsion \vec{p}_a et d'énergie E_a entre en collision avec une cible B au repos, de masse m_b . Dans ce référentiel, l'énergie totale E et l'impulsion totale \vec{p} sont donc données par

$$E = E_a + m_b c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = \vec{p}_a \quad (5.97)$$

D'autre part, dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_{CM} , ces relations deviennent

$$E_{CM} = E'_a + E'_b \quad \text{et} \quad \vec{p}_{CM} = \vec{p}'_a + \vec{p}'_b = \vec{0} \quad (5.98)$$

La vitesse de ce référentiel dans \mathcal{R} est donnée, en vertu des relations (5.90) et (5.97), par

$$\vec{V}_{CM} = \frac{c^2 \vec{p}_a}{E_a + m_b c^2} \quad (5.99)$$

Utiliser les invariants relativistes, On peut établir le lien qui unit les grandeurs rapportées dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_{CM} :

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = E_{CM}^2 - c^2 \vec{p}_{CM}^2 \quad (5.100)$$

En utilisant les relations précédente, on peut écrire

$$(E_a + m_b c^2)^2 - c^2 \vec{p}^2 = E_{CM}^2 \quad (5.101)$$

Comme

$$E_a^2 - c^2 \vec{p}^2 = m_a^2 c^4 \quad \text{et} \quad E_a = E - m_b c^2, \quad (5.102)$$

la relation (5.101) devient:

$$E_{CM}^2 = m_a^2 c^4 - m_b^2 c^4 + 2m_b c^2 E. \quad (5.103)$$

Cette expression permet de calculer **l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse en fonction de l'énergie disponible dans le référentiel du laboratoire et des masses des particules qui entrent en collision.**

Supposons que la réaction donne dans la voie finale N particules de masses m_1, m_2, \dots, m_N et

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (5.104)$$

Si $m_a + m_b < M$, il est clair que l'énergie de masse seule n'est pas capable de produire ces particules: la conservation de l'énergie l'interdit. Par contre, si on injecte dans l'état initial de l'énergie sous forme d'énergie cinétique T , on va pouvoir surmonter ce handicap et provoquer la création désirée. Par conséquent, il existe **une énergie cinétique minimum**, appelée **énergie de seuil de la réaction** et notée **$T(\text{seuil})$** , à communiquer à la particule A dans le laboratoire afin de rendre possible la réaction.

Dans le laboratoire, et plus généralement dans n'importe quel référentiel, la conservation de l'énergie impose que

$$E = m_a c^2 + m_b c^2 + T = \sum_{i=1}^N E_i = M c^2 + \sum_{i=1}^N T_i \quad (5.105)$$

où T_i est l'énergie cinétique d'une particule i produite. *Pour déterminer l'énergie de seuil, il faut se placer dans un référentiel où l'égalité devient possible, c'est-à-dire faire le choix d'un référentiel pour lequel les conditions $T_i = 0 \forall i$ sont compatibles avec la conservation de l'impulsion.* Nous avons vu que cela impose $\vec{p} = \vec{0}$, et donc il faut se placer dans le référentiel du centre de masse. L'énergie de seuil dans ce référentiel est par conséquent donnée par

$$E_{CM}(\text{seuil}) = M c^2 \quad (5.106)$$

En vertu de la formule (5.103), le seuil de la même réaction dans le laboratoire est donné par:

$$E(\text{seuil}) = \frac{c^2}{2m_b} (M^2 + m_b^2 - m_a^2) \quad (5.107)$$

L'énergie cinétique minimale $T(\text{seuil})$ qu'il faut donner à la particule incidente est donc donnée par

$$T(\text{seuil}) = E(\text{seuil}) - m_a c^2 - m_b c^2, \quad (5.108)$$

c'est-à-dire

$$T(\text{seuil}) = \frac{c^2}{2m_b} [M^2 + (m_b + m_a)^2] \quad (5.109)$$

Il est souvent utile d'exprimer l'énergie de seuil sous une forme alternative

$$T(\text{seuil}) = -Q \frac{M + m_b + m_a}{2m_b} \quad (5.110)$$

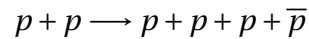
où la quantité

$$Q = (m_b + m_a - M) c^2 \quad (5.111)$$

s'appelle **le bilan d'énergie de la réaction.**

Exemple

Calculez l'impulsion minimale que doit posséder un faisceau de protons p pour que la réaction de production d'antimatière:



soit possible, sur des protons cibles supposés immobiles.

Réponse

On sait que

$$m_p = m_{\bar{p}} \cong 938 \text{ MeV}/c^2.$$

D'après l'équation (5.107),

$$\begin{aligned} E(\text{seuil}) &= \frac{c^2}{2m_p} \left[(4 \times m_p)^2 + m_p^2 - m_p^2 \right] \\ &= \frac{c^2}{2m_p} \left[(4 \times m_p)^2 \right] = \frac{c^2}{2m_p} \times 16m_p^2 \\ &= 8m_p c^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie cinétique minimal du proton donnée par (5.108) est

$$\begin{aligned} T(\text{seuil}) &= E(\text{seuil}) - 2m_p c^2 \\ &= 8m_p c^2 - 2m_p c^2 \\ &= 6m_p c^2 \end{aligned}$$

Son impulsion minimale $p(\text{seuil})$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} p(\text{seuil}) &= \frac{1}{c} \sqrt{(T(\text{seuil}) + m_p c^2)^2 - m_p^2 c^4} \\ &= \sqrt{48} m_p c \\ &\cong 6,5 \text{ GeV}/c \end{aligned}$$

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

NOUS avons vu, au cours du premier chapitre, que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée. Ce fut donc, entre autres problèmes, la recherche d'une transformation laissant invariantes ces fameuses équations qui conduisit à la transformation de Lorentz. Le formalisme quadridimensionnel de l'espace-temps est adapté à l'électromagnétisme relativiste qui se développe par une simple transcription en langage quadridimensionnel des formules classiques.

6.1 Champs tensoriels et dérivées covariantes

Comme tenseur métrique deux fois covariant de composantes $g_{\mu\nu}$ introduit dans le chapitre précédent, on peut, en toute généralité, **construire des tenseurs p fois contravariants et q fois covariants, c'est-à-dire de variance (p, q) et d'ordre $p + q$** , dont les composantes sont notées $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$. Si Λ est une matrice représentant une transformation de Lorentz, la loi de transformation d'un tel tenseur sous un changement de référentiel s'écrit:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \Lambda_{\sigma_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\sigma_p}^{\mu_p} (\Lambda^{-1})_{\nu_1}^{\rho_1} \dots (\Lambda^{-1})_{\nu_q}^{\rho_q} T_{\rho_1 \dots \rho_q}^{\sigma_1 \dots \sigma_p}. \quad (6.1)$$

Une *champ scalaire*, c'est-à-dire une fonction sur l'espace-temps, est **un champ tensoriel de variance $(0, 0)$, autrement dit un invariant**. Sa valeur en un point donné de l'espace-temps est **la même quel que soit le référentiel considéré**.

Si on réalise la transformation de Lorentz $x^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu} x'^{\nu}$, alors on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \quad (6.2)$$

On en conclut donc que l'opérateur $\nabla_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$ se transforme comme un tenseur de variance $(0, 1)$, c'est-à-dire un tenseur une fois covariant.

L'opérateur $\nabla^{\mu} = g^{\mu\nu} \nabla_{\nu}$ se transforme donc comme un tenseur de variance $(1, 0)$, c'est-à-dire un tenseur une fois contravariant.

Un champ tensoriel de variance (p, q) est défini sur l'espace-temps si à chaque événement est associé un tenseur \mathbf{T} de variance (p, q) . Un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction sur l'espace-temps, est un champ tensoriel de variance $(0, 0)$, autrement dit **un invariant**. Sa valeur en un point donné de l'espace-temps est la même quel que soit le référentiel considéré. Considérons un champ tensoriel de composantes $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$. Si chacune de ces composantes est une fonction dérivable des coordonnées spatio-temporelles, **alors la dérivée covariante** $\nabla \mathbf{T}$ de ce champ tensoriel est un champ tensoriel de variance $(p, q + 1)$ dont les composantes sont $\nabla T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$. Puisque $\nabla g_{\mu\nu} = 0$, la dérivation covariante commute avec l'opération de montée ou de descente d'indices.

Trois opérations particulières sont définies au moyen de la dérivée covariante:

- ▶ Si f est un champ scalaire, alors ∇f est le quadrivecteur gradient de f , de composantes covariantes $\nabla_\mu f$ et de composantes contravariantes $\nabla^\mu f = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f$.
- ▶ La divergence d'un champ de quadrivecteur \mathbf{w} est le champ scalaire

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla_\mu w^\mu = \nabla^\mu w_\mu \quad (6.3)$$

- ▶ L'opérateur d'alembertien \square est, par définition, l'opérateur invariant

$$\begin{aligned} \square &= \nabla \cdot \nabla = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu = \nabla^\mu \nabla_\mu = \nabla_\mu \nabla^\mu \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

où Δ est l'opérateur **laplacien**. Appliqué aux composantes d'un champ tensoriel, l'opérateur \square donne les composantes d'un tenseur de même variance.

6.2 Equations de Maxwell

Toutes les propriétés du champ électromagnétique sont contenues dans les équations de Maxwell, au nombre de quatre. Deux d'entre elles, de nature structurelle, relient les vecteurs champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{(Absence de pôles magnétiques libres)} \quad (6.5a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad \text{(Loi de Faraday)} \quad (6.5b)$$

Les deux autres sont conjoncturelles, c'est-à-dire qu'elles dépendent des charges et courants électriques. **Dans le vide**, elles ont pour expressions respectives:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{(Loi de Coulomb)} \quad (6.6a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{(Théorème d'Ampère)} \quad (6.6b)$$

où ρ est la densité de charge électrique, \vec{j} est la densité de courant électrique et μ_0, ϵ_0 , respectivement, perméabilité et la permittivité du vide.

En l'absence de sources ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), éliminons la grandeur \vec{B} entre ces équations en prenant le rotationnel de l'équation (6.5b):

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

ou

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.8)$$

On obtient, en vertu de la troisième équation de Maxwell (6.6a),

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6.9)$$

Cette équation est **l'équation générale de propagation des ondes** avec une vitesse de propagation de module égal à $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. De même, si on élimine \vec{E} entre les équations de Maxwell en l'absence de sources, on obtient de façon analogue

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (6.10)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont associés à un phénomène ondulatoire se propageant dans le vide avec la même vitesse constante $v_0 = c$; c'est **l'onde électromagnétique**.

Dans le vide, chaque composante ψ du vecteur champ électrique ou magnétique satisfait donc à l'équation d'onde

$$\square\psi = 0 \quad (6.11)$$

6.3 Potentiels vecteur et scalaire, changement de jauge

L'absence de pôles magnétiques libres ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) indique que le vecteur champ magnétique est nécessairement le rotationnel d'un champ vectoriel, c'est-à-dire:

$$\exists \vec{A} / \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (6.12)$$

Le vecteur \vec{A} est appelé cette fois-ci, **potentiel vecteur du champ électromagnétique**. En remplaçant cette expression de \vec{B} dans l'équation de Maxwell-Faraday, on a:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (6.13)$$

L'équation (6.13) signifie $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ de gradient. Pour respecter les convenances de l'électrostatique,

on pose alors: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V$, soit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6.14)$$

où V est le **potentiel scalaire du champ électromagnétique**.

Si l'on sait calculer \vec{A} et V à partir des sources, on peut alors calculer les champs \vec{E} et \vec{B} . Remarquons qu'une assez grande indétermination pèse sur V et \vec{A} . **Cherchons à préciser la liberté de choix de ces potentiels.**

Pour ce faire, supposons que nous ayons trouvé deux couples (\vec{A}, V) et (\vec{A}', V') correspond au même champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . On a donc $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}'$. Soit,

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} - \vec{A}') = \vec{0} \quad \implies \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \quad (6.15)$$

où $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ quelconque.

Pour le champ \vec{E} , on a:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = -\vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} V = \vec{\nabla} \left(V' + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6.18)$$

Soit, en ne tenant pas compte d'un terme indépendant du potentiel considéré:

$$V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.19)$$



Résumé

Si le couple (\vec{A}, V) correspond à un champ électromagnétique caractérisé en chaque point par les champs \vec{E} et \vec{B} , le couple $(\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi, V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t})$ où ϕ est une fonction arbitraire correspond au même champ électromagnétique.

*Faire le choix d'un couple de potentiels s'appelle **choisir une jauge**. Une fonction arbitraire ϕ définit **un changement de jauge**. Le champ électromagnétique possède donc une invariance assez remarquable par changement de jauge: c'est **l'invariance de jauge**.*

6.4 Les potentiels et leurs sources, choix d'une jauge

- **Maxwell-Gauss:**

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.21)$$

$$\Rightarrow -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.22)$$

- **Maxwell-Ampère:**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.23)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (6.24)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (6.25)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (6.26)$$

On a donc

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.27a)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (6.27b)$$

Ces deux équations (6.27a) et (6.27b) sont couplées; mais on peut les découpler en profitant de la liberté que nous offre le changement de jauge pour imposer à \vec{A} et V des conditions supplémentaires. Notons que deux conditions de jauge sont largement employées: **la jauge de Coulomb** et **la jauge de Lorentz**.

- Dans la **jauge de Coulomb**, on choisit \vec{A} tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (**c'est la condition de jauge de Coulomb**). Ainsi, les équations couplées ci-dessus deviennent:

$$-\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.28a)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.28b)$$

Dans cette jauge, d'après (6.28a), le champ électrique correspondant est radial par rapport aux sources. L'avantage de cette jauge est que les parties de \vec{E} et \vec{B} qui correspondent au rayonnement électromagnétique à grande distance s'expriment alors à l'aide du seul potentiel vecteur \vec{A} . Les champs de rayonnement étant transverses par rapport à la direction de propagation, cette jauge est aussi appelé "**jauge de rayonnement**" ou "**jauge transverse**".

- Dans la **jauge de Lorentz**, on choisit \vec{A} et V tel que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{Condition de jauge de Lorentz} \quad (6.29)$$

Ainsi, les équations couplées (6.27a) et (6.27b) deviennent:

$$-\Delta V + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (6.30a)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = 0 \quad (6.30b)$$

Remarquons que **les jauges de Lorentz et de Coulomb sont équivalentes en régime permanent**.

En introduisant le d'Alembertien: $\square = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, les équations (6.30a) et (6.30b) s'écrivent:

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \square V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.31a)$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.31b)$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique. Plus généralement, dans un milieu matériel, on aura $v^2 \mu \epsilon = 1$. Les équations (6.30a) et (6.30b) ou (6.31a) et (6.31b) s'appellent **équations de Poisson** dans le cadre de l'électromagnétisme. Les solutions de ces équations sont connues sous **le nom de potentiels retardés**.

6.5 Quadri-courant

L'expérience nous apprend qu'il existe une charge élémentaire égale en grandeur à la charge d'un électron et qu'un courant électrique est dû à un mouvement de charges.

Considérons un nuage de particules, toutes de charge q . Un observateur \mathcal{A} particulier observe un élément infinitésimal de ce nuage, au repos par rapport à lui. Il y compte dN particules occupant un volume propre dV_0 (ici, l'indice 0 affecté à une grandeur scalaire indique qu'elle est mesurée dans le référentiel propre). Il mesure donc, pour cet élément de volume, une densité de particules $n_0 = dN/dV_0$ et une densité de charge $\rho_0 = n_0 q$. La grandeur n_0 , le nombre de particules de l'élément de volume divisé par son volume propre, est manifestement **un invariant**. **Si la charge électrique q est un invariant, alors la grandeur ρ_0 l'est également**. Il faut noter que les nombreuses expériences qui ont été menées à ce jour ont toujours confirmé la justesse de ce postulat d'invariance de la charge électrique.

Un autre observateur \mathcal{B} , en mouvement inertiel par rapport au premier, constate que ces mêmes dN particules se déplacent à la vitesse \vec{v} et occupent cette fois un volume $dV = dV_0/\gamma(v)$. Il mesure donc une densité de particules $n = dN/dV = \gamma(v)n_0$ et une densité de charge $\rho = nq = \gamma(v)\rho_0$. De plus, l'observateur \mathcal{B} mesure un courant électrique $\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v} = \gamma(v)n_0\vec{v}$.

On introduit donc **un quadrivecteur densité de courant \mathbf{j}** défini par

$$j^\mu = (j^0, j^i) = \rho_0 u^\mu \quad (6.32)$$

où u^μ est le quadrivecteur vitesse de l'élément de volume et ρ_0 l'invariant densité de charge dans le référentiel où cet élément de volume est au repos.

Selon l'observateur \mathcal{B} , les composantes spatio-temporelles du quadrivecteur j^μ sont

$$j^\mu = (j^0, j^i) = \rho_0 u^\mu = \rho_0(\gamma(v)c, \gamma(v)\vec{v}) = (\rho c, \rho\vec{v}). \quad (6.33)$$

Pour l'observateur \mathcal{A} , ces composantes se réduisent à $(\rho_0 c, \vec{0})$. La pseudo-norme de ce quadrivecteur est donc

$$\mathbf{j}^2 = \rho_0^2 c^2 \quad (6.34)$$

C'est donc un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur ou le passé suivant le signe de ρ_0 .

En prenant la divergence de l'équation $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et en soustrayant la dérivée par rapport au temps de l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on obtient *l'équation de conservation de la charge électrique* ou *équation de continuité* suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.35)$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.36a)$$

$$\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.36b)$$

$$\implies \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6.36c)$$

avec

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (6.37)$$

6.6 Quadri-vecteur du potentiel électromagnétique

Puisque l'opérateur \square est un invariant, on peut définir un nouveau quadrivecteur A^μ , **le quadrivecteur potentiel** ou **quadripotentiel** de composantes spatio-temporelles telles que, d'après la jauge de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

s'écrit:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial (ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (6.38)$$

ou

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla_\mu A^\mu = 0 \quad (6.39)$$

On a donc:

$$A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right) \quad (6.40)$$

En effet, les équations (6.31b) s'écrivent alors comme l'égalité de deux quadrivecteurs

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.41)$$

tandis que la condition (6.29) devient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.42)$$

6.7 Equations de propagation des potentiels

Nous venons de voir à la sous-section précédente 6.4 que (les équations (6.31)):

$$\begin{aligned} \square V &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 c (c\rho) \\ \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (6.43)$$

D'autre part, nous avons aussi montré que $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ et $A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$. Ainsi, on a donc:

$$\square A^\mu = \left(\frac{1}{c} \square V, \square \vec{A} \right) = (\mu_0 c\rho, \mu_0 \vec{j}) \quad (6.44a)$$

$$= \mu_0 (c\rho, \vec{j}) = \mu_0 j^\mu \quad (6.44b)$$

Donc

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (6.45)$$

6.8 Tenseur électromagnétique

Construisons un formalisme de la relativité restreinte qui permet de récrire équations de Maxwell sous une forme très simple. Construisons les grandeurs suivantes

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.46)$$

Les quantités $F_{\mu\nu}$ sont manifestement les composantes covariantes d'un tenseur antisymétrique \mathbf{F} .

D'après les relations (6.12) et (6.14):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\vec{E}}{c} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}V \right) \quad (6.47a)$$

$$\Rightarrow -\frac{\vec{E}}{c} = +\frac{\partial \vec{A}}{\partial ct} + \vec{\nabla} \left(\frac{V}{c} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{E_x}{c} = \frac{\partial A_x}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{c} \right) \\ -\frac{E_y}{c} = \frac{\partial A_y}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{c} \right) \\ -\frac{E_z}{c} = \frac{\partial A_z}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{c} \right) \end{cases} \quad (6.47b)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (6.48)$$

Explicitons les composantes F_{01} et F_{12} (voir la relation (4.42b) pour les conventions d'écriture: $v^1 = -v_1 = v_x, \dots$)

$$\begin{aligned} F_{01} = \nabla_0 A_1 - \nabla_1 A_0 &= \frac{\partial}{c\partial t}(-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = \frac{E_x}{c} \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} F_{12} = \nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 &= \frac{\partial}{\partial x}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_x) \\ &= -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -B_z \end{aligned} \quad (6.50)$$

En calculant de la même manière les autres composantes, on trouve finalement

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Ce tenseur F est *le tenseur électromagnétique* ou *tenseur de Faraday*. La loi de transformation de ce tenseur est donnée par

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{6.52}$$

Sous forme matricielle, cette relation devient $F' = \tilde{\Lambda} F \Lambda$. On en déduit que le déterminant du tenseur électromagnétique

$$\det F = \frac{1}{c^2} (E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z)^2 \tag{6.53}$$

est *un invariant* puisque $\det F' = (\det \Lambda)^2 \det F = \det F$. Un autre invariant est donné par l'opération tensorielle

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(-E_x^2/c^2 - E_y^2/c^2 - E_z^2/c^2 + B_z^2 + B_y^2 + B_x^2 \right) \tag{6.54}$$

On obtient donc deux invariants du champ électromagnétique

$$c^2 \det F = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \tag{6.55a}$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}. \tag{6.55b}$$

L'équation (6.55a) implique que les quantités $|\vec{E} \cdot \vec{B}|$ et $\vec{E} \cdot \vec{B}$ sont également *des invariants*.

Les composantes contravariantes du tenseur F sont obtenues par la procédure standard

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{6.56}$$

Remarques:

On sait que

$$\nabla^{\mu} = g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \quad \text{avec} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla^0 &= g^{00} \nabla_0 + g^{01} \nabla_1 + g^{02} \nabla_2 + g^{03} \nabla_3 = g^{00} \nabla_0 = \nabla_0 \\ \nabla^1 &= g^{10} \nabla_0 + g^{11} \nabla_1 + g^{12} \nabla_2 + g^{13} \nabla_3 = g^{11} \nabla_1 = -\nabla_1 \\ \nabla^2 &= g^{20} \nabla_0 + g^{21} \nabla_1 + g^{22} \nabla_2 + g^{23} \nabla_3 = g^{22} \nabla_2 = -\nabla_2 \\ \nabla^3 &= g^{30} \nabla_0 + g^{31} \nabla_1 + g^{32} \nabla_2 + g^{33} \nabla_3 = g^{33} \nabla_3 = -\nabla_3 \end{aligned}$$

Ainsi, en terme de *composantes contravariantes*, l'équation (6.46) s'écrit:

$$F^{\mu\nu} = \nabla^{\mu} A^{\nu} - \nabla^{\nu} A^{\mu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{6.57}$$

Calculons, par exemple, les composantes F^{01} , F^{12} et F^{23} :

$$\begin{aligned}
 F^{01} = \nabla^0 A^1 - \nabla^1 A^0 &= \frac{\partial}{c\partial t} A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{c} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{c\partial t} A_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{c} \right) \\
 &= \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) \\
 &= -\frac{E_x}{c}
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
 F^{12} = \nabla^1 A^2 - \nabla^2 A^1 &= -\frac{\partial}{\partial x} A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} A_y + \frac{\partial}{\partial y} A_x \\
 &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \\
 &= -B_z
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
 F^{23} = \nabla^2 A^3 - \nabla^3 A^2 &= -\frac{\partial}{\partial y} A_z - \left(-\frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial y} A_z + \frac{\partial}{\partial z} A_y \\
 &= -\left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \\
 &= -B_x
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Le calcul de la même manière des autres composantes conduit à :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.61}$$



Remarques

Le tenseur F est antisymétrique, c'est-à-dire $F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu} = 0 \implies F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, d'où $F_{\mu\mu} = 0$. Ce qui montre que **la diagonale de $F^{\mu\nu}$ est nulle.**

$$F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k,$$

où le symbole de Levi-Civita ε_{ijk} est défini par:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si permutation paire de (123)} \\ -1 & \text{si permutation impaire de (123)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les équations de Maxwell sans termes de sources s'écrivent (6.5a)-(6.6b) s'obtiennent en utilisant l'identité suivante

$$\nabla_{\mu} F_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} F_{\rho\mu} + \nabla_{\rho} F_{\mu\nu} = 0, \quad (6.62)$$

Exercices (Vérifier qu'on retrouve bien les deux équations de Maxwell sans termes de sources)

Pour retrouver les autres équations de Maxwell, il faut faire intervenir le quadripotentielle lié aux sources. Partons de

$$\begin{aligned} \square A_{\mu} &= g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} A_{\mu} = g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} (\nabla_{\sigma} A_{\mu} + \nabla_{\mu} A_{\sigma} - \nabla_{\mu} A_{\sigma}) \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} F_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} \nabla^{\sigma} A_{\sigma} \end{aligned} \quad (6.63)$$

En utilisant la condition (6.42) et l'équation (6.45), on trouve finalement

$$g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} F_{\sigma\mu} = \mu_0 j_{\mu} \quad (6.64)$$

ou

$$\nabla^{\sigma} F_{\sigma\mu} = \mu_0 j_{\mu} \quad (6.65)$$

Exercices (Vérifier qu'on retrouve bien également les deux équations de Maxwell avec sources)

6.9 Tenseur dual de F

Pour construire le tenseur dual $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ de $F^{\mu\nu}$, introduisons d'abord le tenseur de rang 4 totalement antisymétrique:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = \begin{cases} +1 & (\alpha\beta\gamma\sigma) \text{ est une permutation paire de (0123)} \\ -1 & (\alpha\beta\gamma\sigma) \text{ est une permutation impaire de (0123)} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases} \quad (6.66)$$

Par exemple, $\varepsilon^{1023} = -1$, $\varepsilon^{2301} = +1$, mais $\varepsilon_{0123} = -1$ (car $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}$). Muni de ce tenseur invariant de Lorentz, nous définissons le dual

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = -\mathcal{F}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.67)$$

Par exemple les composantes \mathcal{F}^{0i} sont données par:

$$\mathcal{F}^{0i} = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}F_{jk} = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k = B^i \quad (6.68)$$

Ainsi, en utilisant la relation (6.67), on trouve, par exemple pour:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{01} &= \frac{1}{2}(\epsilon^{0123}F_{23} + \epsilon^{0132}F_{32}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{23} - F_{32}) \\ &= \frac{1}{2}(-B_x - (B_x)) = \frac{1}{2}(-2B_x) \\ &= -B_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{21} &= \frac{1}{2}(\epsilon^{2103}F_{03} + \epsilon^{2130}F_{30}) \\ &= \frac{1}{2}(-F_{03} + F_{30}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{E_z}{c} + \left(-\frac{E_z}{c}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-2\frac{E_z}{c}\right) \\ &= -\frac{E_z}{c} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{23} &= \frac{1}{2}(\epsilon^{2301}F_{01} + \epsilon^{2310}F_{10}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{01} - F_{10}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{E_x}{c} - \left(-\frac{E_x}{c}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{E_x}{c}\right) \\ &= \frac{E_x}{c} \end{aligned}$$

Le *tenseur dual* $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ est donc donné

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

On peut obtenir \mathcal{F} à partir de \mathbf{F} en changeant

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\vec{E}}{c} \longrightarrow \vec{B} \\ \vec{B} \longrightarrow -\frac{\vec{E}}{c} \end{array} \right\} \text{(dualité électromagnétique)} \quad (6.70)$$

6.10 Transformation du champ électromagnétique

D'après la relation (6.52), le passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' peut s'écrire:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\lambda F^{\sigma\lambda} \quad \text{ou} \quad F' = \Lambda F \Lambda^t \tag{6.71}$$

Soit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & -\frac{E'_y}{c} & -\frac{E'_z}{c} \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{E'_y}{c} & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & B'_x & 0 \end{bmatrix}}_{F'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda=\Lambda^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda^t=\Lambda} \tag{6.72}$$

Après avoir fait tous les calculs, on obtient:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \beta\frac{E_z}{c}\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \beta\frac{E_y}{c}\right) \end{cases} \tag{6.73}$$

Soit encore

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \wedge \vec{B}_{\perp}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}_{\perp}\right) \end{cases} \tag{6.74}$$

avec $\vec{E}_{\parallel} // \vec{v}$ et $\vec{E}_{\perp} \perp \vec{v}$

6.11 Force de Lorentz

La force de Lorentz, cad, a force agissant sur une particule de charge q , plongée dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , s'écrit:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{6.75}$$

On souhaite obtenir une expression covariante de cette force de Lorentz. On s'attend évidemment à ce qu'elle dépende du quadrivecteur force \mathbf{K} , du quadrivecteur vitesse \mathbf{u} et du tenseur électromagnétique \mathbf{F} . Prenons la forme suivante

$$K_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu. \tag{6.76}$$

En l'explicitant pour différents indices, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} K_1 = -K^1 = -\gamma(v)F_x &= qF_{1\nu}u^\nu = q(F_{10}u^0 + F_{12}u^2 + F_{13}u^3) \\ &= q\left(-\frac{E_x}{c}\gamma(v)c - B_z\gamma(v)v_y + B_y\gamma(v)v_z\right). \end{aligned} \tag{6.77}$$

En éliminant le facteur $\gamma(v)$, on retrouve:

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ &= q(E_x + (\vec{v} \wedge \vec{B})_x) \end{aligned} \quad (6.78)$$

C'est bien la composante x de la force de Lorentz. Les autres composantes s'obtiennent de la même manière.

Calculons la composante K_0 :

$$\begin{aligned} K_0 = K^0 &= \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} = q F_{0\nu} u^\nu = q(F_{01} u^1 + F_{02} u^2 + F_{03} u^3) \\ &= q((E_x/c)\gamma(v)c + (E_y/c)\gamma(v)v_y + (E_z/c)\gamma(v)v_z). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Par identification des deux membres de l'équation précédente, on obtient:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (6.80)$$

Sachant que la variation dans le temps dT/dt du travail T de la force électromagnétique sur une particule est égal à $\vec{F} \cdot \vec{v}$ (voir relation (5.10)), on constate que **le travail de la force magnétique est nul; le champ magnétique ne peut que défléchir la trajectoire de la particule sans modifier le module de sa vitesse.**

Considérons un nuage de particules de charge électrique q , interagissant entre elles par l'intermédiaire du champ électromagnétique qu'elles génèrent. Elles gagnent ou perdent de l'énergie sous l'action des forces de Lorentz qu'elles subissent. Il y a donc échanges d'énergie entre ces particules et le champ. **Comment attribuer une énergie au champ électromagnétique de manière à ce que l'énergie totale du système particules-champ soit conservée?** Supposons que les particules constituent une distribution quasi-continue de charges de densité ρ et qu'elles sont contenues dans un volume V délimité par une surface Σ_V . En vertu de la formule (6.80), la variation dans le temps du travail des forces électromagnétiques pour un élément de volume dV de cette distribution vaut $\rho dV \vec{E} \cdot \vec{v}$, où \vec{E} est le champ électrique généré par la totalité des charges. Pour l'ensemble des particules, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \int_V \rho \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV \\ &= \int_V \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Or

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.82)$$

L'introduction de la relation (6.82) dans (6.81) nous permet d'écrire:

$$\frac{dT}{dt} = \int_V \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \right] dV \quad (6.83)$$

En utilisant le théorème de Gauss, on peut écrire le travail des forces électromagnétiques comme la somme de deux contributions:

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\Sigma_V} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) dV. \quad (6.84)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (6.84) décrit les échanges d'énergie à travers la frontière de la distribution de charge. Le deuxième terme décrit les variations d'énergie à l'intérieur du volume.

On définit le vecteur de Poynting \vec{P} par

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (6.85)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (6.84) représente le flux du vecteur de Poynting à travers la surface enveloppant les charges et les courants; c'est le flux d'énergie dû au champ électromagnétique. Le produit scalaire $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ est négatif pour un flux entrant puisque le vecteur $d\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur de la surface. Cela explique la présence du signe (-) devant l'intégrale de surface de l'équation (6.84) pour que la contribution de ce flux entrant soit positive. La quantité

$$u_{elm} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (6.86)$$

s'interprète comme la densité d'énergie du champ électromagnétique. Le signe (-) devant l'intégrale de volume dans l'équation (6.84) fait en sorte que l'énergie des particules diminue quand l'énergie du champ électromagnétique augmente.

Avec ces définitions, l'équation de conservation (6.84) prend la forme simplifiée suivante

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \int_{\Sigma_V} \vec{P} \cdot d\vec{S}, \quad (6.87)$$

où U est l'énergie totale du champ électromagnétique $\int_{\Sigma_V} u_{elm} dV$. Pour un champ électromagnétique seul ($T = 0$), l'équation de conservation (6.87) peut se mettre sous la forme locale

$$\frac{\partial u_{elm}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0. \quad (6.88)$$

6.12 Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme

Soit une particule de masse m et de charge q , au repos à l'instant $t = 0$ dans un référentiel d'inertie donné, plongée dans un champ électrique uniforme. La force de Lorentz s'exerçant sur cette particule implique que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \quad (6.89)$$

Fixons le système d'axes de telle sorte que ce champ électrique soit orienté suivant l'axe Ox du référentiel, avec $\mathcal{E} = E_x$. En vertu de la formule (11.68), l'impulsion suivant les axes Oy et Oz est constante,

et donc nulle puisque la vitesse initiale dans ces directions est également nulle. Le long de l'axe Ox , l'équation (6.89) s'intègre immédiatement pour donner $p = q\mathcal{E}t$ ($p = p_x$ puisque $p_y = p_z = 0$). La particule se déplace donc le long de l'axe Ox avec une vitesse v telle que

$$v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = At \quad \text{avec} \quad A = \frac{q\mathcal{E}}{m} \quad (6.90)$$

où A est une grandeur ayant la dimension d'une accélération. La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée par

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 - A^2 t^2/c^2}} \quad (6.91)$$

Il s'agit d'un mouvement à accélération propre constante de module A . La force de Lorentz a ainsi été vérifiée expérimentalement avec une très grande précision (voir Figure 6.1). Les principes de fonc-

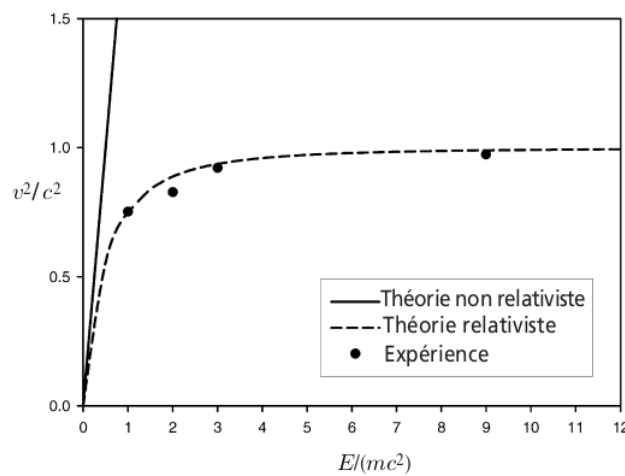


Figure 6.1: Vitesse v d'électrons relativistes en fonction du rapport $E/(mc^2)$ où E est leur énergie totale et m leur masse.

tionnement *des accélérateurs de particules* sont basés sur cette formule. *Les propulseurs ioniques de certaines sondes spatiales* fonctionnent grâce à des champs électriques intenses. L'utilisation de tels champs de force est également envisagée pour *envoyer dans l'espace des charges utiles depuis le sol d'une planète* au moyen d'une rampe électromagnétique.

6.13 Potentiel et Champ d'une charge en mouvement

Considérons deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' unis par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse $\vec{\beta}c$. Une charge q occupe l'origine du repère spatial du référentiel \mathcal{R}' . Dans ce référentiel, le courant dû à cette charge est nul et, donc, il est loisible de choisir le potentiel vecteur \vec{A} également nul. Par contre, le potentiel scalaire est donné par

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad (6.92)$$

On en déduit que le champ magnétique \vec{B}' est nul et que le champ électrique vaut

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (6.93)$$

Pour connaître les champs électrique et magnétique dans le référentiel \mathcal{R} , on utilise les lois de transformation (6.74). On trouve alors

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel} = \frac{q\vec{r}'_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \\
 \vec{E}_{\perp} &= \gamma \vec{E}'_{\perp} = \frac{\gamma q\vec{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \\
 \vec{B}_{\parallel} &= \vec{0} \\
 \vec{B}_{\perp} &= \gamma \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}' = \frac{\gamma q \vec{V} \wedge \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'^3}
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

Remarquons que, dans le référentiel \mathcal{R} , le champ magnétique \vec{B} n'est pas nul, ce qui semble assez naturel puisque la charge est en mouvement dans ce référentiel. On peut obtenir les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} en fonction des coordonnées \vec{r} et t en utilisant les loi de transformation (4.50). On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{\parallel} &= \frac{\gamma q(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}} \\
 \vec{E}_{\perp} &= \frac{\gamma q\vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}} \\
 \vec{B}_{\parallel} &= \vec{0} \\
 \vec{B}_{\perp} &= \frac{\gamma q \vec{V} \wedge \vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

Pour analyser ces relations, plaçons-nous au temps $t = 0$, pour lequel la charge est à l'origine, et choisissons la vitesse relative dirigée suivant les axes Oz et Oz' . Les expressions pour le champ électrique $\vec{E}(0)$ à l'instant initial se simplifient un peu et deviennent

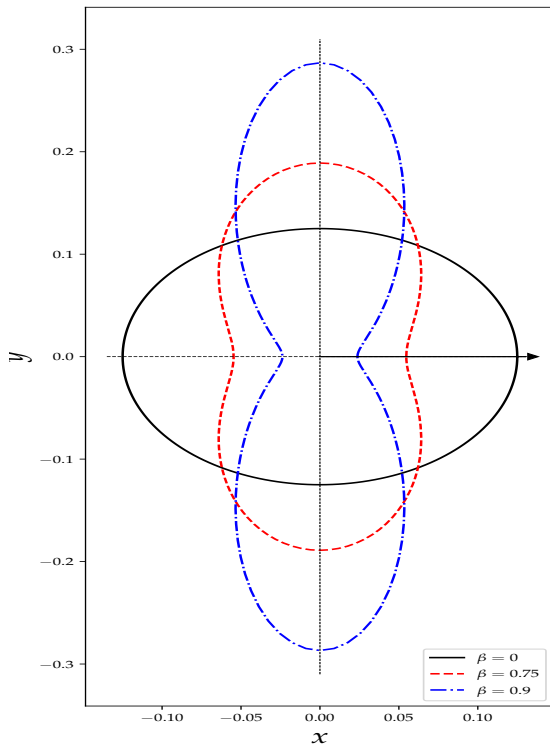


Figure 6.2: Dépendance angulaire (6.100) du module du champ électrique d’une charge en mouvement uniforme de vitesse V , pour $V = 0$ (trait plein), $V = 0.75c$ (trait pointillé) et $V = 0,9c$ (trait plein).

$$\vec{E}_{\parallel}(0) = \frac{\gamma q \vec{r}_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 D^{3/2}} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\perp}(0) = \frac{\gamma q \vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 D^{3/2}} \quad (6.96)$$

avec

$$D = \gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta), \quad (6.97)$$

où θ est l’angle polaire (par rapport à l’axe Oz). Finalement, on trouve:

$$\vec{E}(0) = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} f(\beta, \theta) \quad (6.98)$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E} \quad (6.99)$$

avec

$$f(\beta, \theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (6.100)$$

On a évidemment $f(0, \theta) = 1$, et on constate que $f(\beta, 0) = 1/\gamma^2$ et $f(\beta, \pi/2) = \gamma$.

Quand la vitesse de la charge augmente, le champ se concentre dans les directions perpendiculaires à la vitesse (voir figure 6.2).



Exercices

1 Montrer que

(a)

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad \text{est invariant de Lorentz}$$

(b)

$$p^\mu x_\mu = x^\mu p_\mu \quad \text{est invariant de Lorentz}$$

2 Démontrer

a) la relation (6.53),

b) la relation (6.54),

c) les relations (6.55),

d) Voir relations (6.62) et (6.64)

3 En utilisant les relations (6.73), vérifier l'invariance de équations de Maxwell par transformations de Lorentz.

4 La vitesse d'un proton est portée à $\vec{v} = 0.99\vec{e}_x$ dans le repère de la cible. Calculez l'impulsion, l'énergie et l'énergie cinétique d'un proton ($m_p = 0.938 \text{ GeV}$) pour un observateur dans le repère \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse $\vec{V} = 0.8\vec{e}_x$ par rapport au repère de la cible.

5 Vérifier à l'aide d'une transformation de Lorentz que si $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $E = \gamma m$ dans \mathcal{R} , on a $\vec{p}' = \gamma' m \vec{v}'$ et $E' = \gamma' m$ dans \mathcal{R}' en mouvement uniforme par rapport à \mathcal{R} .

6 Soient deux champs électromagnétiques différents (\vec{E}_1, \vec{B}_1) et (\vec{E}_2, \vec{B}_2) . Montrer que les deux quantités $\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{E}_2$ et $c^2 \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ sont des invariants lors d'un changement de référentiel inertiel.

ANNEXES

Composition de transformation spéciale de Lorentz

Soit un référentiel \mathcal{R}_1 , de coordonnées ct' et x' , uni au référentiel \mathcal{R} , de coordonnées ct et x , par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse V_1 et un référentiel \mathcal{R}_2 , de coordonnées ct'' et x'' , uni au référentiel \mathcal{R}_1 par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse V_2 , parallèle à V_1 . En vertu des relations (2.11) on a, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tanh\theta_1 = \frac{V_1}{c} \quad (\text{A1})$$

et

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & \sinh\theta_2 \\ \sinh\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tanh\theta_2 = \frac{V_2}{c} \quad (\text{A2})$$

Rappelons que la valeur d'une rapidité θ est strictement comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. En éliminant ct'' et x'' entre les deux relations (A1) et (A2), on obtient:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \quad (\text{A3})$$

avec

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{A4})$$

La composition de deux transformations spéciales de Lorentz suivant un même axe est donc une transformation du même genre. La transformation identité est une transformation de rapidité $\theta = 0$. Une transformation de rapidité $-\theta$ est l'inverse d'une transformation de rapidité θ . On retrouve donc que les transformations spéciales de Lorentz suivant un même axe forment un groupe commutatif. La loi d'addition (A4) n'est autre que la loi relativiste pour la composition des vitesses. En effet, en notant que

$$\tanh\theta = \frac{V}{c} \quad (\text{A5})$$

où V est la vitesse du référentiel \mathcal{R}'' par rapport au référentiel \mathcal{R} , on a

$$\frac{V}{c} = \tanh\theta = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2} = \frac{V_1/c + V_2/c}{1 + V_1 V_2 / c^2} \quad (\text{A6})$$

C'est *la loi de composition des vitesses*. On constate ainsi que *la composition relativiste des vitesses longitudinales est équivalente à l'addition simple des rapidités*. Si on convient de noter

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_1^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_2^2/c^2}}, \quad (\text{A7})$$

les relations (2.12), (??) et (A4) impliquent que

$$\gamma = \cosh \theta = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{V_1 V_2}{c^2} \right) \quad (\text{A8.a})$$

$$\gamma \frac{V}{c} = \sinh \theta = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \cosh \theta_1 \sinh \theta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{V_1}{c} + \frac{V_2}{c} \right). \quad (\text{A8.b})$$