

ANALYSE III

Support du cours destiné aux étudiants de BAC II-Mathématique.

Dr Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE (PhD)

Université du Burundi
Faculté des Sciences

JP

Année académique : 2025-2026

Avant-propos

Ce cours contient des éléments fondamentaux de l'analyse mathématique et est destiné aux étudiants de deuxième année en sciences mathématiques. Nous essayons de fournir aux étudiants les éléments de base des mathématiques avec des exemples, chaque fois que cela est possible. Ce cours contient néanmoins les éléments d'analyse mathématique nécessaires pour aborder la troisième année de mathématiques du degré universitaire. Des méthodes de calcul et recherche des solutions ainsi que des courtes démonstrations sont données tout au long du cours. Toutefois, les références citées à la fin du syllabus sont suffisantes pour qu'un lecteur intéressé puisse approfondir les sujets traités.

Ce Syllabus est composé de 5 chapitres. Le premier chapitre présente la notion de convergence uniforme. Nous rappelons d'abord la définition de la convergence simple et nous donnons la définition de la convergence uniforme. Nous montrons dans ce chapitre la relation entre ces deux convergences ainsi que la relation entre la convergence uniforme et les fonctions continues. Le deuxième chapitre présente quelques intégrales particulières dans \mathbb{R} telles que les intégrales de Poisson, intégrales d'Euler et les intégrales trigonométriques. Le chapitre 3 présente la transformée de Laplace qui est une des transformées appartenant dans une famille des transformées intégrales. Nous présentons dans ce chapitre les transformées de certaines fonctions élémentaires et ces transformées nous permettent de résoudre les équations et systèmes d'équations différentielles avec les conditions initiales. Le chapitre 4 aborde les séries de Fourier et les transformées de Fourier. Les séries de Fourier constituent un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. Les séries de Fourier se rencontrent dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc. Le chapitre 5 présente une introduction au calcul variationnel. A la fin de chaque chapitre, des exercices d'applications ont été proposés pour permettre aux étudiants de mieux comprendre le cours.

Toutes remarques ou critiques qui pourront être faites par le lecteur seront les bienvenues.

Table des matières

1	Convergence uniforme	6
1.1	La convergence simple	6
1.2	La convergence uniforme	8
1.3	La convergence uniforme et les fonctions de classe $C_p(\Omega)$	15
2	Intégrales particulières dans \mathbb{R}	17
2.1	Rappel sur les critères d'intégrabilité des fonctions	17
	Critères pratiques d'intégrabilité	17
	Critères pratiques de non-intégrabilité	18
2.2	Intégrale de Poisson et intégrales associées	18
2.2.1	L'intégrale de poisson	18
2.2.2	Intégrales associées	19
2.3	Les intégrales Eulériennes	21
2.3.1	Première intégrale eulérienne	21
	Propriétés	21
2.3.2	Seconde intégrale eulérienne	24
	Exercices : Intégrales qui se ramènent à $\Gamma(n)$ et $\mathcal{B}(m, n)$	27
2.4	Intégrales trigonométriques	27
2.4.1	Définition	27
2.4.2	Cas particuliers	30
2.4.3	Travaux dirigés	34
3	Transformées de Laplace	36
3.1	Introduction	36
3.2	Définition	37
3.3	Propriétés	39
	Produit de Convolution	40

3.4	Transformées de Laplace de certaines fonctions	43
3.5	Transformée de Laplace inverse	45
3.6	Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles ordinaires	48
3.7	Travaux dirigés	51
4	Séries de Fourier et Transformée de Fourier	52
4.1	Introduction	52
4.2	Quelques rappels	53
4.2.1	Les séries classiques	53
4.2.2	Propriétés	53
4.2.3	Les séries de fonctions	54
4.2.4	Fonctions périodiques	54
4.2.5	Calcul de quelques intégrales utiles	55
4.3	Séries de Fourier	55
4.3.1	Introduction	55
4.3.2	Définition de la série de Fourier	56
4.3.3	Conditions de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier	58
4.3.4	Forme complexe d'une série de Fourier	72
4.3.5	Séries de Fourier des fonctions paires et impaires	74
	Rappel : fonctions paires et impaires	74
	Séries de Fourier en sinus ou en cosinus	76
4.3.6	Identité de Parseval	77
4.4	Intégrale de Fourier et transformation de Fourier	79
4.4.1	Introduction	79
4.4.2	Définition de la transformée de Fourier d'un signal	79
4.4.3	Intégrale de Fourier	80
4.4.4	Transformées de Fourier	82
	Définition	82
4.4.5	Conditions suffisantes d'existence (conditions de Dirichlet)	83
4.4.6	Transformées de Fourier en sinus et en cosinus	84
4.4.7	Quelques exemples des transformées de Fourier de certaines fonctions ($n=1$)	84
4.4.8	Propriétés de la transformation de Fourier	86

Propriété de linéarité	86
Translation	86
Modulation	87
Changement d'échelle	87
Conjugaison complexe	87
Transformée de Fourier de $f'(x)$	87
Transformée de Fourier de l'intégrale de $x(t)$	88
Propriété de dualité	88
Dérivation de $F(\alpha)$ par rapport à α	89
4.4.9 Théorème de convolution pour les transformées de Fourier	90
Définition	90
Transformée de Fourier et produit de convolution	90
4.5 Travaux dirigés	91
5 Eléments du calcul variationnel	94
5.1 Position du problème	94
5.2 Equation d'Euler	95
5.3 Généralisations	95

JP

«Ne confonds pas ton chemin avec ta destination. Ce n'est pas parce que c'est orageux aujourd'hui que cela signifie que tu ne te diriges pas vers le soleil.»

Anthony Fernando

Chapitre 1

Convergence uniforme

1.1 La convergence simple

Définition

Une famille de fonctions à un paramètre f_λ toutes définies sur un même ensemble E converge ponctuellement (convergence simple) vers une fonction f pour λ tendant vers λ_0 si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x) = f(x), \quad \forall x \in E$$

Exemple

La famille de droites $\equiv f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda$ du plan.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\lambda(x) = x$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} f_\lambda(x) = 1$$

Notation

Dans la suite, si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x) = f(x),$$

On écrira :

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f.$$

Propriétés

1. Si a et b sont des scalaires et si

$$\begin{cases} f_\lambda \xrightarrow[E]{} f \\ g_\lambda \xrightarrow[E]{} g \end{cases}$$

alors

$$af_\lambda + bg_\lambda \xrightarrow[E]{} af + bg.$$

Plus généralement,

Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f^i, \quad 1 \leq i \leq p$$

alors

$$\sum_{i=1}^p c_i f_\lambda^i \xrightarrow[E]{} \sum_{i=1}^p c_i f^i.$$

En effet,

$$\sum_{i=1}^p c_i f_\lambda^i(x) - \sum_{i=1}^p c_i f^i(x) = \sum_{i=1}^p c_i \underbrace{[f_\lambda^i(x) - f^i(x)]}_{\downarrow \text{pour } \lambda \rightarrow \lambda_0}.$$

2. Si

$$\begin{cases} f_\lambda \xrightarrow[E]{} f \\ g_\lambda \xrightarrow[E]{} g \end{cases}$$

alors

$$f_\lambda g_\lambda \xrightarrow[E]{} fg.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} f_\lambda g_\lambda - fg &= \underbrace{(f_\lambda - f)}_{\downarrow 0} g + \underbrace{(g_\lambda - g)}_{\downarrow 0} f + \underbrace{(f_\lambda - f)}_{\downarrow 0} \underbrace{(g_\lambda - g)}_{\downarrow 0} \\ &\Rightarrow f_\lambda g_\lambda \xrightarrow[E]{} fg. \end{aligned}$$

Plus généralement, si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f^i, \quad 1 \leq i \leq p$$

alors

$$\prod_{i=1}^p f_\lambda^i \rightarrow \prod_{i=1}^p f^i.$$

3. Si

$$\begin{cases} f_\lambda \xrightarrow[E]{} f \\ g_\lambda \xrightarrow[E]{} g \end{cases}$$

alors

$$\frac{f_\lambda}{g_\lambda} \xrightarrow[E]{} \frac{f}{g}. \quad [\text{éviter d'avoir zéro aux dénominateurs}]$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{f_\lambda}{g_\lambda} - \frac{f}{g} &= \frac{f_\lambda g - f g_\lambda}{g_\lambda g} = \frac{\overbrace{(f_\lambda - f)}^0 g + \overbrace{(g - g_\lambda)}^0 f}{g_\lambda g} \\ &\Rightarrow \frac{f_\lambda}{g_\lambda} \xrightarrow[E]{} \frac{f}{g}. \end{aligned}$$

4. Si

$$f_\lambda < g_\lambda, \quad f_\lambda \xrightarrow[E]{} f, \quad g_\lambda \xrightarrow[E]{} g$$

alors

$$f \leq g.$$

1.2 La convergence uniforme

Définition

Une famille de fonctions à un paramètre f_λ définies sur un même ensemble E converge uniformément vers une fonction f si

$$\sup_E |f_\lambda - f| \rightarrow 0 \quad \text{pour } \lambda \rightarrow \lambda_0$$

on note alors,

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f.$$

Exemple

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda, \quad \lambda_0 = 0, \quad f(x) = x$$

$$f_\lambda(x) - f(x) = (1 - \lambda)x + \lambda - x = \lambda(1 - x), \quad \sup_E |f_\lambda - f| \rightarrow 0$$

sur tout intervalle borné de \mathbb{R} .

Propriétés

1. Si

$$f_\lambda^i \xrightarrow[E]{} f^i, \quad 1 \leq i \leq p$$

alors

$$\sum_{i=1}^p c_i f_\lambda^i \xrightarrow[E]{} \sum_{i=1}^p c_i f^i.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^p c_i f_\lambda^i - \sum_{i=1}^p c_i f^i \right| &= \left| \sum_{i=1}^p c_i (f_\lambda^i - f^i) \right| \leq \sum_{i=1}^p |c_i| |f_\lambda^i - f^i| \\ \sup_E \left| \sum_{i=1}^p c_i f_\lambda^i - \sum_{i=1}^p c_i f^i \right| &\leq \sup_E \underbrace{\sum_{i=1}^p |c_i| |f_\lambda^i - f^i|}_{\sum_{i=1}^p |c_i| \sup_E |f_\lambda^i - f^i| \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

2. Si

$$\begin{cases} f_\lambda^i \xrightarrow[E]{} f^i, & 1 \leq i \leq p \\ f^i : \text{bornées} \end{cases}$$

alors

$$\prod_{i=1}^p f_\lambda^i \xrightarrow[E]{} \prod_{i=1}^p f^i.$$

En effet, prenons $p = 2$:

$$\begin{cases} f_\lambda \xrightarrow[E]{} f \\ g_\lambda \xrightarrow[E]{} g \end{cases}$$

$$f_\lambda g_\lambda - fg = (f_\lambda - f)g + (g_\lambda - g)f + (f_\lambda - f)(g_\lambda - g)$$

$$|f_\lambda g_\lambda - fg| \leq |f_\lambda - f||g| + |g_\lambda - g||f| + |f_\lambda - f||g_\lambda - g|$$

$$\sup_E |f_\lambda g_\lambda - fg| \leq \underbrace{\sup_E |f_\lambda - f|}_{\downarrow 0} \underbrace{\sup_E |g|}_{\exists \text{ et est fini}} + \underbrace{\sup_E |g_\lambda - g|}_{\downarrow 0} \underbrace{\sup_E |f|}_{\exists \text{ et est fini}} + \underbrace{\sup_E |f_\lambda - f|}_{\downarrow 0} \underbrace{\sup_E |g_\lambda - g|}_{\downarrow 0}$$

$$\Rightarrow \sup_E |f_\lambda g_\lambda - fg| \rightarrow 0.$$

3. Si

$$g_\lambda \xrightarrow[E]{} g, \quad \inf_E |g| \neq 0$$

alors

$$\frac{1}{g_\lambda} \xrightarrow[E]{} \frac{1}{g},$$

En effet

$$\left| \frac{1}{g_\lambda} - \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{g_\lambda - g}{g_\lambda g} \right|$$

comme

$$\begin{aligned}g_\lambda &= g - (g - g_\lambda) \\|g_\lambda| &= |g - (g - g_\lambda)| \geq \frac{1}{2}|g| \geq \frac{1}{2} \inf_E |g| : \quad \frac{1}{|g_\lambda|} \leq \frac{2}{\inf_E |g|} \\ \Rightarrow \sup_E \left| \frac{1}{g_\lambda} - \frac{1}{g} \right| &\leq \frac{2}{(\inf_E |g|)^2} \underbrace{\sup_E |g_\lambda - g|}_{\downarrow 0}.\end{aligned}$$

4. Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f$$

alors

$$|f_\lambda| \xrightarrow[E]{} |f|.$$

En effet, comme

$$\begin{aligned}\left| |f_\lambda| - |f| \right| &\leq |f_\lambda - f| \\ \Rightarrow \sup_E \left| |f_\lambda| - |f| \right| &\leq \underbrace{\sup_E |f_\lambda - f|}_{\downarrow 0}.\end{aligned}$$

5. Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f$$

alors

$$\bar{f}_\lambda \xrightarrow[E]{} \bar{f}$$

En effet,

$$\begin{aligned}|\bar{f}_\lambda - \bar{f}| &= |\overline{f_\lambda - f}| \\ &= |f_\lambda - f| \\ \Rightarrow \sup_E |\bar{f}_\lambda - \bar{f}| &= \sup_E |f_\lambda - f|\end{aligned}$$

6. Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f,$$

alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f_\lambda &\xrightarrow[E]{} \operatorname{Re} f \\ \operatorname{Im} f_\lambda &\xrightarrow[E]{} \operatorname{Im} f.\end{aligned}$$

En effet, si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f,$$

on sait que

$$\bar{f}_\lambda \xrightarrow[E]{} \bar{f},$$

$$\operatorname{Re} f_\lambda = \frac{1}{2}[f_\lambda + \bar{f}_\lambda] \xrightarrow[E]{} \frac{1}{2}[f + \bar{f}] = \operatorname{Re} f,$$

$$\operatorname{Im} f_\lambda = \frac{1}{2i}[f_\lambda - \bar{f}_\lambda] \xrightarrow[E]{} \frac{1}{2i}[f - \bar{f}] = \operatorname{Im} f.$$

7. La limite uniforme des fonctions bornées est bornée :

Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f, \quad \sup_E |f_\lambda| < \infty,$$

alors on a :

$$\begin{aligned} f &= f_\lambda + f - f_\lambda \\ |f| &\leq |f_\lambda| + |f - f_\lambda| \\ \Rightarrow \sup_E |f| &\leq \sup_E |f_\lambda| + \underbrace{\sup_E |f - f_\lambda|}_{\downarrow 0}. \end{aligned}$$

Relation entre les deux convergences

Lemme : "Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f$$

alors

$$f_\lambda \xrightarrow[K \subset E]{} f,$$

où K est un compact contenu dans E ."

En effet, on a :

$$\sup_K |f_\lambda - f| \leq \sup_E |f_\lambda - f| \quad (\text{on a } K \subset E).$$

En particulier, si

$$\forall \text{ compact } K \subset E \quad \sup_K |f_\lambda - f| \longrightarrow 0,$$

on a :

$$|f_\lambda(x) - f(x)| = \sup_{\{x\}} |f_\lambda - f| \longrightarrow 0 \quad (\text{puisque } \{x\} \text{ est compact})$$

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f.$$

En mettant ensemble ces résultats, on a la chaîne :

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f \Rightarrow f_\lambda \xrightarrow[K \subset E]{} f \Rightarrow f_\lambda \xrightarrow[E]{} f :$$

$$\text{"La } \xrightarrow[E]{} \text{ implique la } \xrightarrow[K \subset E]{} \text{"}$$

Critère de Cauchy

"La CNS pour qu'une famille de fonctions f_λ converge uniformément vers une fonction f pour $\lambda \rightarrow \lambda_0$ est que $\sup_E |f_\rho - f_\mu| \rightarrow 0$ pour ρ, μ suffisamment proche de λ_0 "

On a en effet

$$\begin{aligned} |f_\rho - f_\mu| &= |f_\rho - f + f - f_\mu| \\ &\leq |f_\rho - f| + |f - f_\mu| \\ \sup_E |f_\rho - f_\mu| &\leq \underbrace{\sup_E |f_\rho - f|}_{\substack{\downarrow \\ \text{o quand } \rho \rightarrow \lambda_0}} + \underbrace{\sup_E |f - f_\mu|}_{\substack{\downarrow \\ \text{o quand } \mu \rightarrow \lambda_0}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Relation entre la convergence uniforme et la limite des valeurs des fonctions

Théorème :

"Si

$$f_\lambda \xrightarrow[E]{} f, \lim_{x \rightarrow x_0} f_\lambda(x) \quad \exists \text{ pour } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f_\lambda(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x)]"$$

Démonstration

On a successivement

$$\begin{aligned} |f_\mu(y) - f_\nu(z)| &= |f_\mu(y) - f_\mu(x_0) + f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0) + f_\nu(x_0) - f_\nu(z)| \\ &\leq |f_\mu(y) - f_\mu(x_0)| + |f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(z) - f_\nu(x_0)| \end{aligned}$$

Prenons la limite

$$\begin{aligned} |f_\mu(y) - f_\nu(z)| &\leq \underbrace{|f_\mu(y) - f_\mu(x_0)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{(pour } \mu \rightarrow \lambda_0 \text{ et } y \rightarrow x_0)}} + \underbrace{|f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{|f_\nu(z) - f_\nu(x_0)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{(pour } \nu \rightarrow \lambda_0 \text{ et } z \rightarrow x_0)}} \end{aligned}$$

Contre exemple

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

$$x_0 = 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} e^{-\lambda x}] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} e^{-\lambda x}] = 0$$

nous voyons que

$$1 \neq 0.$$

Exercice

vérifier que la première hypothèse est non remplie.

Exemple

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + 1$$

$$x_0 = 0, \quad \lambda_0 = 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f_\lambda(x)] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x)] = 1.$$

première hypothèse :

JP

$$\begin{aligned} |f_\mu(x) - f_\nu(x)| &= |(1 - \mu)x + 1 - (1 - \nu)x - 1| \\ &= \underbrace{|\nu - \mu|}_{\downarrow 0} |x| \\ &\quad (\text{pour } \mu, \nu \rightarrow \lambda_0 = 1) \end{aligned}$$

$$\sup_I |f_\mu - f_\nu| = |\nu - \mu| \sup_I |x| \quad (\text{si } I \text{ est un intervalle borné})$$

$$\downarrow 0$$

Deuxième hypothèse : ok

Relation entre la convergence uniforme et les fonctions continues

Théorème :

"La limite uniforme des fonctions continues est continue."

Autrement dit, Si

- $f_\lambda \in C_0(E)$
- $f_\lambda \xrightarrow[E]{} f, \quad \lambda \rightarrow \lambda_0,$

alors $f \in C_0(E)$.

En effet,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x)] = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f_\lambda(x)] = f(x_0)$$

Théorème de DINI

" Si

- f_m est une suite de fonctions réelles
- $f_m \in C_0(K)$, K compact
- f_m décroissent ou croissent de façon monotone sur K vers f

Alors $f_m \xrightarrow{K} f$ "

Démonstration

On considère les nouvelles hypothèses suivantes

- f_m réelles
- f_m décroissantes [sinon prendre $-f_m$] vers f
- f_m décroissantes 0 [sinon prendre $f_m - f$]

Montrons que $f_m \xrightarrow{K} 0$

Notons d'abord que la condition

f_m décroissantes 0 $\Leftrightarrow f_{m+1}(x) \leq f_m(x)$, $x \in K$, $m \in \mathbb{N}$. Notons ensuite par I_m les ensembles

$$I_m = \{x, f_m(x) \geq \epsilon\} \cap K, \epsilon \text{ petit et positif}$$

Ces ensembles sont des compacts :

1. $I_m \subset K \Rightarrow I_m$ bornés
2. Considérons une suite $x_k \in I_m$ telle que $x_k \rightarrow x$: k étant fermé, $x \in K$
Nouvelle thèse $x \in I_m$?
Oui car $f_m(x_k) \geq \epsilon$ (passage à la limite $x_k \rightarrow x$)
 $f_m(x) \geq \epsilon$ [car f_m Continues]

De

$$\epsilon \leq f_{m+1}(x) \leq f_m(x), \quad x \in I_{m+1} \rightarrow x \in I_m \quad (\text{car } I_{m+1} \subset I_m)$$

Les I_m forment une suite de compacts emboîtés, on a donc deux situations possibles :

- Ils ne sont pas vides et ont au moins un point en commun $y \Leftrightarrow \forall m, f_m(y) \geq \epsilon$
Ceci est contraire de l'hypothèse de décroissance.
- A partir d'une valeur $m = M, M + 1, \dots$, ils sont vides et on a

$$f_m(x) < \epsilon, \quad m \geq M$$

$$\Rightarrow \sup_K |f_m(x)| \leq \epsilon \Leftrightarrow \sup_K f_m \rightarrow 0$$

d'où

$$f_m \xrightarrow{K} 0$$

1.3 La convergence uniforme et les fonctions de classe $C_p(\Omega)$

Commençons par $p = 1$

Théorème "si

- $f_\lambda \in C_1(\Omega)$, Ω ouvert.
- f_λ convergent ponctuellement en au moins un point x_0 d'une composante connexe de Ω
- $D_{x_i} f_\lambda = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \xrightarrow{K \subset \Omega} f^{(i)}$, K Compact de Ω

Alors

- $f_\lambda \xrightarrow{K \subset \Omega} f$
- $f \in C_1(\Omega)$
- $D_{x_i} f = f^{(i)}$ [La dérivée de la limite uniforme \equiv La limite uniforme des dérivées]"

Démonstration

1. Montrons que f_λ convergent uniformément dans une boule ouverte de Ω

Soit $B(x_0, r)$ une boule ouverte de Ω de centre x_0 et de rayon r .

Dans cette boule, on a successivement

$$\begin{aligned}
 \sup_B |f_\mu(x) - f_\nu(x)| &= \sup_B |f_\mu(x) - f_\mu(x_0) + f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0) + f_\nu(x_0) - f_\nu(x)| \\
 &= \sup_B |(f_\mu - f_\nu)(x) - (f_\mu - f_\nu)(x_0) + (f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0))| \\
 &\leq \sup_B |(f_\mu - f_\nu)(x) - (f_\mu - f_\nu)(x_0)| + |(f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0))| \\
 &\leq \sup_B \left| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{0k}) D_{x_k} (f_\mu - f_\nu)|_{x_0 + h e_k} \right| + \underbrace{|(f_\mu(x_0) - f_\nu(x_0))|}_{\downarrow 0} \\
 &\leq \sup_B \sum_{k=1}^n |x_k - x_{0k}| |D_{x_k} f_\mu - D_{x_k} f_\nu| \\
 &\leq nr \sum_{k=1}^n \underbrace{\sup_B |D_{x_k} f_\mu - D_{x_k} f_\nu|}_{\downarrow 0} \quad (\text{Par Cauchy appliqué aux dérivées})
 \end{aligned}$$

On conclut alors par Cauchy que $f_\lambda \xrightarrow{\Omega} f$

2. K étant compact, il est recouvert d'un nombre fini de boules (HBL : Théorème de Heine Borel Lebesgue)

$f_\lambda \xrightarrow{B} f$. f est au moins $C_0(\Omega)$, elle est même $C_1(\Omega)$

$$\begin{cases} D_{x_i} f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} & (*) \\ D_{x_i} f_\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\lambda(x + h e_i) - f_\lambda(x)}{h} \end{cases}$$

$$f_\lambda \xrightarrow{K} f$$

$$D_{x_i} f = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(x + he_i) - f_\lambda(x)}{h} \right] \quad (**)$$

(*) et (**)

$$\implies D_{x_i} f = f^i$$

3. Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\lambda \in C_1(\Omega), D_{x_i} f_\lambda \in C_0(\Omega) \\ D_{x_i} f_\lambda \xrightarrow{K} f^i \quad \underbrace{f^i = D_{x_i} f} \end{array} \right.$$

limite uniforme de fonctions continues

$$\Leftrightarrow D_{x_i} f \in C_0(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow f \in C_1(\Omega)$$

Plus g en eralement,

"Si

- $f_\lambda \in C_p(\Omega)$
- $D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} f_\lambda$ convergent dans chaque composante connexe de Ω en au moins un point x_0 , $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq p - 1$
- $D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} f_\lambda \xrightarrow{K \subset \Omega} f^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$

Alors

- $f_\lambda \xrightarrow{K \subset \Omega} f$
- $f \in C_p(\Omega)$
- $f^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} f$ "

JP

Chapitre 2

Intégrales particulières dans \mathbb{R}

2.1 Rappel sur les critères d'intégrabilité des fonctions

Par définition, une fonction définie presque partout sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ (intervalle non nécessairement borné) est intégrable en a^+ s'il existe un réel $a' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]a, a'[$. De même, f est intégrable en b^- s'il existe un réel $b' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]b', b[$. Lorsque f est continue sur $]a, b[$, son intégrabilité sur $]a, b[$ est équivalente à son intégrabilité en a^+ et en b^- .

Rappelons d'abord des cas très utiles où il est aisé de vérifier l'intégrabilité d'une fonction continue f sur $]a, b[$:

1. Si F est intégrable sur $]a, b[$ et si $|f| \leq F$ presque partout sur $]a, b[$ alors f est intégrable sur $]a, b[$;
2. Si a est réel et si f admet une limite finie en a^+ , alors f est intégrable en a^+ ; de même en b^- .

Critères pratiques d'intégrabilité

Les critères pratiques d'intégrabilité suivants sont basés sur le premier résultat rappelé ci-dessus et sur l'intégrabilité de $x \rightarrow \frac{1}{x^\theta}$ en 0^+ ou en $+\infty$ (rappelons que cette fonction est intégrable en 0^+ si et seulement si $\theta < 1$ et est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\theta > 1$).

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.

– Si $a \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en a^+ s'il existe $\theta < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^\theta |f(x)|$$

existe et est finie.

– Si $a = -\infty$, alors f est intégrable en $-\infty$ s'il existe $\theta > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\theta |f(x)|$$

existe et est finie.

– Si $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en b^- s'il existe $\theta < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^\theta |f(x)|$$

existe et est finie.

– Si $b = +\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ s'il existe $\theta > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\theta |f(x)|$$

existe et est finie.

Critères pratiques de non-intégrabilité

De même, on obtient des critères de non-intégrabilité sur $]a, b[$: Si $f \in \mathcal{C}^0(]a, b[)$, alors f n'est pas intégrable sur cet intervalle dans les cas suivants :

- $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x)$ existe et diffère de 0
- $a = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|f(x)$ existe et diffère de 0
- $b \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)f(x)$ existe et diffère de 0
- $b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ existe et diffère de 0.

2.2 Intégrale de Poisson et intégrales associées

2.2.1 L'intégrale de poisson

L'intégrale de poisson s'écrit :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \quad (2.1)$$

– Intégrabilité :

$$e^{-ax^2} \in L_1([0, +\infty[) \text{ car } e^{-ax^2} \in C_0([0, +\infty[).$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-ax^2} = 0$$

- Calcul : La primitive de l'intégrand ne s'exprime pas au moyen d'un nombre fini des fonctions élémentaires. Pour calculer l'intégrale, on procède de la manière suivante : Si I désigne son expression, on peut écrire

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \int_0^\infty e^{-ay^2} dy \\ &= \int \int_{[0,+\infty[\times [0,+\infty[} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Cette intégrale dans \mathbb{R}^2 a un sens par le critère de Tonelli.
Passons aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \quad r > 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

On a le déterminant de la matrice jacobienne

$$dtmJ = |J| = r$$

L'intégrale I^2 devient

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} r dr = \frac{\pi}{4a}.$$

De cette intégrale de Poisson, déduisons deux autres intégrales utiles.

2.2.2 Intégrales associées

I.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad a > 0,$$

- Intégrabilité : comme ci-dessus
- Calcul : Pour calculer l'intégrale, on remarque que, pour $b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{db} \left(e^{\frac{b^2}{4a}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx \right) = 0.$$

En effet, la dérivée en question nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left(e^{\frac{b^2}{4a}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx \right) &= e^{\frac{b^2}{4a}} \left\{ \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bxdx \right\} \end{aligned}$$

en justifiant la dérivation sous le signe. En intégrant le second terme par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bxdx = - \left[\frac{e^{-ax^2} \sin bx}{2a} \right]_0^{+\infty} + \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx,$$

D'où

$$\frac{d}{db} \left(e^{\frac{b^2}{4a}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx \right) = 0.$$

La fonction entre parenthèses est indépendante de b , elle est donc égale à sa valeur pour $b = 0$,

Soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

II.

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \quad a > 0, b \geq 0$$

- Intégrabilité : comme ci-dessus
- On utilise le même procédé pour calculer. On prouve que, pour $b \in]0, +\infty[$,

$$\frac{d}{db} \left(e^{2\sqrt{ab}} \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx \right) = 0.$$

En effet, cette dérivée vaut

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left(e^{2\sqrt{ab}} \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx \right) &= \frac{d}{db} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x})^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x^2} \right) e^{-(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x})^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x})^2} dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x})^2} \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

Si on pose

$$\frac{\sqrt{b}}{x} = \sqrt{a}y,$$

le second terme vaut

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}y - \frac{\sqrt{b}}{y})^2} dy$$

et la dérivée considérée est nulle.

L'expression entre parenthèses est donc égale à sa limite pour $b = 0$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2.3 Les intégrales Eulériennes

2.3.1 Première intégrale eulérienne

La première intégrale eulérienne est

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad n \in]0, +\infty[$$

Si on le considère plus particulièrement comme fonction de n , elle porte le nom de "*fonction gamma*".

Propriétés

1. $\Gamma(n)$ est définie pour $n \in]0, +\infty[$

En effet, $e^{-x}x^{n-1} \in L_1(]0, +\infty[)$ car

$$\begin{cases} e^{-x}x^{n-1} \in C_0(]0, +\infty[) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\theta e^{-x}x^{n-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x+(\theta+n-1)\ln x} = 0, \quad 1 - n < \theta < 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\theta e^{-x}x^{n-1} = 0, \quad \theta > 1. \end{cases}$$

2. $\Gamma(n) > 0$: intégrale d'une fonction positive.
3. $\Gamma(n) \in C^\infty(]0, +\infty[)$,
les dérivées successives se calculent sous le signe d'intégration.

$$\frac{d^p}{dn^p} \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} (\ln x)^p dx$$

En effet, l'intégrand est indéfiniment dérivable par rapport à n et on a

$$\frac{d^p}{dn^p} (e^{-x}x^{n-1}) = e^{-x}x^{n-1} (\ln x)^p.$$

Cette dernière fonction reste intégrable dans $[0, \infty[$.

De plus, si $n \in [n_0, n_1] \subset]0, +\infty[$,

$$|e^{-x}x^{n-1}(\ln x)^p| \leq e^{-x} \sup_{[n_0, n_1]} \{|x|^{n-1} |\ln x|^p\} \in L_1([0, +\infty[)$$

4. On a la formule de récurrence :

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= [-e^{-x}x^{n-1}]_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-2} dx \\ &= (n-1)\Gamma(n-1) \end{aligned}$$

5. Valeurs remarquables de $\Gamma(n)$

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(n) = (n - 1)!$ si $n \in \mathbb{N}_0$

(c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(d) $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n - 1)(2n - 3) \cdots = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$, si n est un entier positif.

6. Le comportement de $\Gamma(n)$ quand $n \rightarrow 0^+$ ou $n \rightarrow +\infty$:

- $\lim_{n \rightarrow 0^+} \Gamma(n) = +\infty$ et plus précisément $\lim_{n \rightarrow 0} n\Gamma(n) = 1$

En effet, $n\Gamma(n) = \Gamma(n + 1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty$ et mieux $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n + 1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1$ (Formule de STIRLING)

En effet posons $x = n + \sqrt{n}v$ dans $\Gamma(n + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$.

$$x = n + \sqrt{n}v,$$

$$dx = \sqrt{n}dv,$$

Si $n = 0$, $v = -\sqrt{n}$ et si $x = +\infty$, $v = +\infty$.

On a

$$\Gamma(n + 1) = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(n+v\sqrt{n})} (n + v\sqrt{n})^n \sqrt{n} dv.$$

L'expression

$$\begin{aligned} e^{-(n+v\sqrt{n})} (n + v\sqrt{n})^n &\stackrel{\text{JP}}{=} e^{-(n+v\sqrt{n})} e^{\ln(n+v\sqrt{n})^n} \\ &= e^{-(n+v\sqrt{n})} e^{n \ln(n+v\sqrt{n})} \\ &= e^{-(n+v\sqrt{n})} e^{n \ln\left(\frac{n+v\sqrt{n}}{n}\right)} \\ &= e^{-(n+v\sqrt{n})} e^{n \ln\left(1 + \frac{v\sqrt{n}}{n}\right) + n \ln n} \\ &= e^{-(n+v\sqrt{n})} e^{n \ln\left(1 + \frac{v\sqrt{n}}{n}\right)} e^{\ln n^n} \\ &= e^{-n} n^n e^{-v\sqrt{n}} e^{n \ln\left(1 + \frac{v\sqrt{n}}{n}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\Gamma(n + 1)$ devient

$$\Gamma(n + 1) = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-n} n^n e^{-v\sqrt{n}} e^{n \ln\left(1 + \frac{v\sqrt{n}}{n}\right)} \sqrt{n} dv$$

Ce qui implique que

$$\frac{\Gamma(n + 1)}{e^{-n} n^n \sqrt{n}} = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{(-v\sqrt{n} + n \ln(1 + \frac{v\sqrt{n}}{n}))} dv.$$

On peut obtenir le résultat annoncé en passant à la limite sous le signe d'intégration

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n + 1)}{e^{-n} n^n \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \exp\left[(-\sqrt{n}v + n \ln(1 + \frac{v}{\sqrt{n}}))\right] dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n}v + n \ln(1 + \frac{v}{\sqrt{n}}))\right] dv \end{aligned}$$

La limite de l'exposant se calculant par l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-v}{\sqrt{n}} + \ln(1 + \frac{v}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-vn^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{vn}{2(v + n^{\frac{1}{2}})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-v^2}{2} \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{n}} + 1} \\ &= \frac{-v^2}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{n}} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{v^2}{2})} dv \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

La formule peut encore s'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n)}{e^{-n} n^n \sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = 1.$$

Un corollaire intéressant de cette formule est le suivant

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha)}{m^\alpha \Gamma(m)} = 1$$

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha)}{m^\alpha \Gamma(m)} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(m+\alpha)} (m+\alpha)^{m+\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{m+\alpha}}}{m^\alpha e^{-m} m^m \sqrt{\frac{2\pi}{m}}} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{m+\alpha} \sqrt{\frac{m}{m+\alpha}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De même

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m+p+1)}{\Gamma(m+1) m^p} = 1$$

Soit

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m+p)!}{(m)! m^p} = 1$$

et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m) m^{\frac{1}{2}}} = 1$$

soit

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1.3 \cdots (2m-3)}{2.4 \cdots (2m-2)} \sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}} \quad (\text{Formule de WALLIS}).$$

7. Formule de LEGENDRE

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2n)$$

En effet :

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int \int_{\mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^+} e^{-(x+y)} x^{n-1} y^{n-\frac{1}{2}} dx dy$$

Posons

$$\begin{cases} x = \frac{\psi^2}{4\eta^2} \\ y = \eta^2 \end{cases},$$

Soit

$$\begin{cases} \psi = 2\sqrt{xy} \\ \eta = \sqrt{y} \end{cases}, \quad dtm \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\psi,\eta)} \right) = |J| = \frac{\psi}{\eta}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \int \int_{\mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^+} e^{-\left(\frac{\psi^2}{4\eta^2} + \eta^2\right)} 2^{2-2n} \psi^{2n-1} d\psi d\eta \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} \int_0^\infty \psi^{2n-1} d\psi \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\psi^2}{4\eta^2} + \eta^2\right)} d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \int_0^\infty \psi^{2n-1} e^{-\psi} d\psi \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(2n). \end{aligned}$$

2.3.2 Seconde intégrale eulérienne

La seconde intégrale eulérienne est

$$\mathcal{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

Considérée comme fonction de m et n , elle s'appelle "**fonction bêta**".

Propriétés

1. $\mathcal{B}(m,n)$ est définie pour m et $n > 0$
- 2.

$$\mathcal{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \mathcal{B}(n,m)$$

En effet :

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int \int_{\mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^+} e^{-(x+y)} x^{m-1} y^{n-1} dx dy \quad (\text{Tonelli}) .$$

Posons

$$\begin{cases} x = \psi(1 - \eta) \\ y = \psi\eta \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \psi = x + y \\ \eta = \frac{y}{x + y} \end{cases}, \quad dtm \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\psi, \eta)} \right) = |J| = \psi$$

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= \int \int_{]0, \infty[*]0, 1[} e^{-\psi} \psi^{m+n-1} (1 - \eta)^{m-1} \eta^{n-1} d\psi d\eta \\ &= \int_0^\infty e^{-\psi} \psi^{m+n-1} d\psi \int_0^1 (1 - \eta)^{m-1} \eta^{n-1} d\eta \\ &= \Gamma(m + n) \mathcal{B}(m, n). \end{aligned}$$

- D'après ce que nous avons vu sur la fonction Γ , $\mathcal{B}(m, n)$ est donc connu pour m et n entiers positifs ou demi entiers positifs.
- Il existe un cas où on peut calculer directement $\mathcal{B}(m, n)$ sans passer par $\Gamma(n)$: pour $\theta \in]0, 1[$, on a

$$\boxed{\mathcal{B}(\theta, 1 - \theta) = \frac{\pi}{\sin \theta \pi}} \quad \text{Formule des compléments}$$

Ce qui entraîne

$$\Gamma(\theta)\Gamma(1 - \theta) = \frac{\pi}{\sin \theta \pi}.$$

En effet :

$$\mathcal{B}(\theta, 1 - \theta) = \int_0^1 x^{\theta-1} (1 - x)^{-\theta} dx$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{1 + y}, \\ \mathcal{B}(\theta, 1 - \theta) &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\theta-1}}{1 + y} dy \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale a été calculée par Euler, elle vaut $\frac{\pi}{\sin \theta \pi}$ et on peut retrouver le résultat en procédant de la manière suivante :

Soit $\gamma(\theta)$ la valeur de l'intégrale recherchée, si $|\lambda| < \pi$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{(i\lambda)x}} dx = e^{-(i\lambda)\theta} \gamma(\theta) \quad (*)$$

car

$$D_\lambda [e^{(i\lambda)\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{(i\lambda)x}} dx] = e^{(i\lambda)\theta} \left[i\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{(i\lambda)x}} dx - i \int_0^\infty \frac{e^{(i\lambda)x} x^\theta dx}{(1 + e^{(i\lambda)x})^2} \right]$$

En justifiant la dérivation sous le signe d'intégration,
 Cette intégration vaut

$$e^{(i\lambda)\theta} i \left[\frac{x^\theta}{(1 + e^{(i\lambda)x})} \right]_0^{+\infty} = 0$$

et l'expression entre [] est égale à sa valeur pour $\lambda = 0$
 Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x} dx = \gamma(\theta).$$

En égalant les parties imaginaires dans(*)

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \left(\frac{1}{1 + e^{(i\lambda)x}} \right) &= \mathcal{I} \left[\frac{1 + x \cos \lambda - ix \sin \lambda}{(1 + x \cos \lambda)^2 + (x \sin \lambda)^2} \right] \\ &= \frac{-x \sin \lambda}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} \end{aligned}$$

On trouve

$$\sin \lambda \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} dx = \gamma(\theta) \sin \lambda \theta.$$

Montrons que le premier membre tend vers π si λ tend vers $\pm\pi$
 En effet :

$$\sin \lambda \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} dx = \sin \lambda \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{(x + \cos \lambda)^2 + \sin^2 \lambda} dx$$

pour λ assez voisin de $\pm\pi$, posons $x = u \sin \lambda - \cos \lambda$ l'expression vaut $\int_{\cot \lambda}^{+\infty} \frac{(u \sin \lambda - \cos \lambda)^\theta}{1 + u^2} du$
 et si $\lambda \rightarrow \pm\pi$,

Cette intégrale tend vers $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \pi$, en vertu du théorème de Lebesgue,

puisque $|(u \sin \lambda - \cos \lambda)^\theta| \leq (|u| + 1)^\theta$ et que $\frac{(|u| + 1)^\theta}{1 + u^2} \in L_1([0, +\infty[)$

Alors $\gamma(\theta) \sin \theta \pi = \pi$ cqfd

5. Notons enfin que

$$\mathcal{B}(m, m) = \frac{1}{2^{2m-1}} \mathcal{B}(m, \frac{1}{2})$$

Par la formule de Legendre

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(m, m) &= \frac{[\Gamma(m)]^2}{\Gamma(2m)} \\ &= \frac{\Gamma(m) \sqrt{\pi}}{2^{2m-1} \Gamma(m + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{\Gamma(m) \Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2m-1} \Gamma(m + \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Exercices : Intégrales qui se ramènent à $\Gamma(n)$ et $\mathcal{B}(m, n)$

Intégrales	Paramètres	Substitution
$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^m)} x^n dx = \frac{1}{m} a^{-\frac{n+1}{m}} \Gamma(\frac{1+n}{m})$	$m > 0, n > -1, a > 0$	$y = ax^m$
$\int_0^a x^m (a^p - x^p)^n dx = \frac{1}{p} \mathcal{B}(n+1, \frac{m+1}{p}) a^{m+pn+1}$	$m, n > -1, p > 0, a > 0$	$x^p = a^p y$
$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} \mathcal{B}(m+1, n+1)$	$m, n > -1$	$x = a + (b-a)y$
$\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{ x-c ^{m+n+2}} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{ a-c ^{n+1} b-c ^{m+1}} \mathcal{B}(m+1, n+1)$	$m, n > -1, c \notin [a, b]$	$x = \frac{a(b-c) + c(a-b)y}{(b-c) + (a-b)y}$
$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(ax^p + b)^n} dx = \frac{b^{\frac{m+1}{p}-n}}{p \cdot a^{\frac{m+1}{p}}} \mathcal{B}(\frac{m+1}{p}, n - \frac{m+1}{p})$	$m > -1, n > \frac{m+1}{p}, a, b, p > 0$	$y = \frac{b}{ax^p + b}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2})$	$m, n > -1$	$y = \sin^2 \theta$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m \theta \sin^n \theta}{(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)^{\frac{m+n}{2}+1}} d\theta = \frac{\mathcal{B}(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2})}{2a^{\frac{m+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}}$	$m, n > -1, a, b > 0$	$\sin^2 \theta = \frac{ax}{(a-b)x+b}$

2.4 Intégrales trigonométriques

2.4.1 Définition

On appelle intégrale trigonométrique des expressions de la forme

$$\int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx$$

$$\text{et } \int_a^{\rightarrow \infty} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \text{ (Intégrale fléchée)}$$

Ici λ joue le rôle d'un paramètre.

Théorème 2.1 La condition nécessaire et suffisante pour que ces intégrales aient un sens est que f soit intégrable sur $[a, \infty[$, c'est-à-dire $f \in L_1([a, \infty[)$. De plus

$$\int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{R}} \int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx$$

Démonstration

- Condition nécessaire : Supposons que $\int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx$ ait un sens et montrons que $f \in L_1([a, \infty[)$.

Comme $f(x) = f(x)(\cos^2 \lambda x + \sin^2 \lambda x)$, cela implique que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) \cos^2 \lambda x + f(x) \sin^2 \lambda x| \\ &\leq |f(x) \cos \lambda x \cos \lambda x| + |f(x) \sin \lambda x \sin \lambda x| \\ &\leq |f(x) \cos \lambda x| |\cos \lambda x| + |f(x) \sin \lambda x| |\sin \lambda x| \\ &\leq |f(x) \cos \lambda x| + |f(x) \sin \lambda x| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty |f(x)| dx \leq \underbrace{\int_a^\infty |f(x) \cos \lambda x| dx}_{\exists} + \underbrace{\int_a^\infty |f(x) \sin \lambda x| dx}_{\exists}$$

Donc f est intégrable car elle est majorée par une fonction intégrable.

2. Condition suffisante : Supposons que $f(x) \in L_1([a, \infty[)$ et montrons que

$$f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x \in L_1([a, +\infty[).$$

On a

$$\begin{aligned} |f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x| &\leq |f(x)| \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x \\ &\leq |f(x)| \\ \Rightarrow \left| \int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| &\leq \underbrace{\left| \int_a^\infty f(x) dx \right|}_{\exists} \\ &\Rightarrow f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x \in L_1([a, \infty[) \end{aligned}$$

Montrons, de plus, que l'intégrale converge uniformément, c'est-à-dire

$$\int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{R}} \int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx - \int_a^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx + \int_\infty^a f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_\infty^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_\alpha^\infty f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_\alpha^\infty |f(x)| \left| \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x \right| dx \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_\alpha^\infty |f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ si } \alpha \rightarrow \infty \text{ car } \int_a^a f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2 Si f est réelle et si f décroît vers zéro quand x tend vers l'infini alors

$$\int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx$$

ont un sens et on a

$$\left| \int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} f(a), \quad \lambda \neq 0.$$

De plus

$$\int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{R}_0} \int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx.$$

Démonstration

La démonstration de ce théorème repose sur une inégalité remarquable suivante : si p et q appartiennent dans $]a, +\infty[$ avec $p < q$, pour fixer les idées, alors

$$\left| \int_p^q f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} f(p),$$

pour autant que f décroisse dans $]a, +\infty[$. Sa démonstration est facile sous l'hypothèse supplémentaire $f \in C_1(]a, +\infty[)$. En effet,

$$\int_p^q f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx = \int_p^q f(x) \frac{1}{\lambda} D_x \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x dx$$

En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_p^q f(x) \frac{1}{\lambda} D_x \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x dx &= \left[\frac{1}{\lambda} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x \right]_p^q - \frac{1}{\lambda} \int_p^q D_x f \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\lambda} f(q) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda q - \frac{1}{\lambda} f(p) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda p \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_p^q D_x f \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\lambda} f(q) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda q + \frac{1}{\lambda} f(p) \left\{ \begin{array}{c} -\sin \\ \cos \end{array} \right\} \lambda p \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_p^q D_x f \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x dx \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left[\left| f(q) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda q \right| + \left| f(p) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda p \right| \right. \\ &\quad \left. + \int_p^q \left| D_x f \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ -\cos \end{array} \right\} \lambda x \right| dx \right] \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} [f(q) + f(p) + f(p) - f(q)] \\ &\leq \frac{2}{|\lambda|} f(p) \end{aligned}$$

Pour p, q suffisamment grand, on a

$$\int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx.$$

D'après l'inégalité précédente,

$$\left| \int_a^\alpha f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x dx \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} f(a);$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left| \int_a^\alpha f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} f(a) \rightarrow 0 \text{ car } f(x) \text{ décroît vers } 0 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Ce qui implique que $\int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx$ a un sens.

De plus

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_0} \left| \int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx - \int_a^\alpha f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx \right| &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_0} \left| \int_a^{\rightarrow\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx \right| \\ &\leq \frac{2}{\lambda} f(\alpha) \rightarrow 0 \text{ pour } \alpha \rightarrow \infty \end{aligned}$$

2.4.2 Cas particuliers

$$1. \int_0^\infty e^{-ax} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx = \frac{\begin{Bmatrix} a \\ \lambda \end{Bmatrix}}{a^2 + \lambda^2}; \quad a > 0.$$

– Existence

$$f(x) = e^{-ax} \in L_1([0, \infty[)$$

Donc l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx$$

existe au sens ordinaire.

– Calcul

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx &= \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{I} \end{Bmatrix} \int_0^\infty e^{-ax} e^{+i\lambda x} dx, \\ &= \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{I} \end{Bmatrix} \int_0^\infty e^{-(a-i\lambda)x} dx, \\ &= \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{I} \end{Bmatrix} \left[-\frac{e^{-(a-i\lambda)x}}{a-i\lambda} \right]_0^\infty, \\ &= \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{I} \end{Bmatrix} \frac{1}{a-i\lambda} \\ &= \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{I} \end{Bmatrix} \frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2} \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda x dx = \frac{\begin{Bmatrix} a \\ \lambda \end{Bmatrix}}{a^2 + \lambda^2}$$

$$2. \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\lambda) \text{ et } \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

– Existence

Comme

$$\frac{1}{x} \downarrow 0 \text{ pour } x \rightarrow +\infty,$$

cette intégrale existe en vertu du théorème 2.2 et elle est nécessairement fléchée car $\frac{1}{x} \notin L_1([0, +\infty[)$.

– Calcul

i) $\lambda = 1$, notons d'abord que

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

et calculons l'intégrale comme suit

$$\begin{aligned} \int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\infty - \int_\alpha^{+\infty} \right) dx \int_0^\infty e^{-xt} \sin x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx \right) dt - \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt \int_\alpha^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt - \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt \int_\alpha^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= [\arctan t]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

ii) $\lambda \neq 1$

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

On pose

$$y = |\lambda|x : \quad y \in [0, \infty[$$

$$x = \frac{y}{|\lambda|}, \quad dx = \frac{dy}{|\lambda|}$$

$$\lambda = |\lambda| \text{sign} \lambda, \quad \lambda x = \text{sign} \lambda y$$

$$\sin \lambda x = \text{sign} \lambda \sin y$$

$$\frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\text{sign} \lambda \sin y}{\frac{y}{|\lambda|}} \frac{dy}{|\lambda|}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \text{sign} \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{sign} \lambda.$$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-|\lambda|a}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|a} \text{sign} \lambda$, $a > 0$.

– On vérifie facilement que ces intégrales ont un sens, la seconde étant seulement une intégrale fléchée.

– Pour calculer la première, on note d'abord que

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(a^2+x^2)t} dt,$$

et on procède de la manière suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(a^2+x^2)t} \cos \lambda x dx dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t} e^{-x^2 t} \cos \lambda x dx dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t} dt \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos \lambda x dx \right)}_{\text{poisson (Intégrale associée I)}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a^2 t + \frac{\lambda^2}{4t})}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose enfin

$$\sqrt{t} = u \rightarrow \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2du, \quad u \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + x^2} dx = \sqrt{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(a^2 u^2 + \frac{\lambda^2}{4u^2})} du}_{\text{Poisson (Intégrale associée II)}}$$

$$= \frac{\pi}{2a} e^{-2a|\lambda|}.$$

– La seconde intégrale se déduit immédiatement de la première en dérivant ses deux membres par rapport à λ . On peut effectivement dériver l'intégrale sous le signe d'intégration car

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\int_0^\alpha \frac{\cos \lambda x}{a^2 + x^2} dx \right) = - \int_0^\alpha \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx,$$

quel que soit α et, si $\alpha \rightarrow +\infty$, la seconde intégrale converge uniformément par rapport à λ vers $-\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$.

La propriété résulte donc du théorème sur la dérivation des limites des fonctions paramétriques.

4. Intégrales de FRESNEL :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

- Ces intégrales ont un sens car $(\frac{1}{\sqrt{x}}) \downarrow 0$, si $x \rightarrow +\infty$, mais elles sont fléchées puisque $(\frac{1}{\sqrt{x}}) \notin L_1([0, +\infty[)$.

- Calcul

De l'intégrale de Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

on tire

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$$

Ainsi, en raisonnant comme dans un cas précédent, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x dx dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x dx \\ &\quad - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt \int_\alpha^{+\infty} e^{-xt^2} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x dx}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

En calculant le premier terme du second membre de l'égalité précédente, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\begin{cases} t^2 \\ \lambda \end{cases}}{t^4 + \lambda^2} dt,$$

Or on sait que

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(ax^p + b)^n} dx = \frac{b^{\frac{m+1}{p}-n}}{pa^{\frac{m+1}{p}}} \beta\left(\frac{m+1}{p}, n - \frac{m+1}{p}\right),$$

En utilisant l'expression précédente pour calculer $\int_0^\infty \frac{\begin{cases} t^2 \\ \lambda \end{cases}}{t^4 + \lambda^2} dt$, on a

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{t^4 + \lambda^2} dt = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \mathcal{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{t^4 + \lambda^2} dt = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \beta \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{2}\pi \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}. \end{aligned}$$

$$5. \int_0^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x^2 dx$$

Elle peut être ramenée à Fresnel en posant $x = \sqrt{y}$, $dx = \frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}}$, $y \in [0, \infty[$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \lambda x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

2.4.3 Travaux dirigés

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$, $a > 0$, b et c réels.
2. $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx$, $a \geq 0$.
3. $\int_0^{+\infty} e^{-k(\frac{x}{a}-\frac{b}{x})^2} dx$, a , b et $k > 0$.
4. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{x}\right)^2 e^{-k\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{x}\right)^2} dx$, a , b et $k > 0$.
5. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{x^2}\right) e^{-k\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{x}\right)^2} dx$, a , b et $k > 0$.
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx$, a et $b > 0$.
7. $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx$, $\alpha > 0$.

Exercice 2. Ramener les intégrales suivantes à des intégrales eulérienne et donner leur valeur :

1. $\int_0^1 (1-x^2)^m dx, \quad m > -1.$
2. $\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad m > -\frac{1}{2}.$
3. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad b > a.$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2x^2+4x+3)^4}.$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-4x} x^5 dx.$
6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[p]{1-x^p}}, \quad p > 1.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx, \quad 0 < p < q.$
8. $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad c < a < b.$

Exercice 3. Calculer les intégrales trigonométriques suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{array} \right\} dx, \quad (a \text{ et } b > 0).$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \quad a \text{ et } b > 0.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad a \text{ et } b > 0.$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx, \quad a \text{ et } b > 0.$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \quad a > 0.$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx.$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx \cos cx}{x} dx, \quad a, b \text{ et } c > 0.$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx \cos cx}{x^2} dx, \quad a, b \text{ et } c > 0.$
10. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx.$

Chapitre 3

Transformées de Laplace

3.1 Introduction

La transformation de Laplace est, avec la transformation de Fourier, l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuses questions de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc., mais elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827), surnommé le « *Newton français* », éphémère ministre de l'intérieur de Napoléon Bonaparte, qui avait commencé ses travaux dès les années 1770, sous l'Ancien régime. En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et restes de séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Sous l'influence de **Liouville**, le hongrois Joseph Petzval (1807-1891) fut le premier à étudier la transformation de Laplace en tant que telle, et ses applications aux équations différentielles linéaires. Plus tard, l'ingénieur britannique **Oliver Heaviside** (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales. **Laurent Schwartz** (1915-2002) a étendu la transformation de Laplace aux distributions, permettant de mieux comprendre et étayer le calcul symbolique.

La transformée de Laplace présente un grand intérêt du fait que dans un grand nombre de domaines des sciences, elle est un outil d'extrême utilité. Elle est particulièrement adaptée à l'étude de la dynamique de systèmes supposés dans un état connu à un certain instant, que l'on peut prendre comme origine des temps.

En mathématiques, la transformée de Laplace fait partie des outils utiles pour la résolution d'équations différentielles. Par la transformée de Laplace, les équations différentielles sont transformées en des équations algébriques. Ceci simplifie souvent le problème car on doit alors résoudre une équation algébrique plutôt qu'une équation différentielle. Ajoutons que les équations différentielles non homogènes sont traitées exactement de la même manière que les équations homogènes. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre d'abord l'équation homogène correspondante.

Un autre avantage de l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre les équations différentielles est que les conditions initiales jouent un rôle essentiel dans le

processus de transformation. De fait, les conditions initiales sont automatiquement incorporées dans la solution contrairement à l'approche classique où elles ne sont introduites que lorsque les constantes arbitraires d'intégration sont déterminées. La solution satisfaisant aux conditions initiales données est entièrement déterminée en ce sens qu'on n'a pas à rechercher les valeurs appropriées des constantes arbitraires dans la solution générale. Bref, la transformée de Laplace est un outil idéal pour résoudre les problèmes à valeurs initiales.

3.2 Définition

La transformée de Laplace appartient à la famille des transformées intégrales. De manière générale, une transformée intégrale établit une relation entre une fonction f de la variable réelle t et sa transformée F sous la forme :

$$F(p) = \int_I K(p, t) f(t) dt, \quad (3.1) \quad \text{où}$$

$(p, t) \mapsto K(p, t)$ est une fonction donnée appelée *noyau* de la transformation et où I est l'intervalle d'intégration spécifié. L'expression (3.1) permet de transformer une fonction f en une autre fonction F , appelée *transformée* de f . Bien sûr, il faut se poser la question de l'existence de l'intégrale de (3.1).

Définition 3.1 Soit f une fonction de variable t définie pour $t \in [0, \infty[$. La Transformée de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe p définie par la relation

$$F(p) = \mathcal{L}_p\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (3.2)$$

La transformée de Laplace utilise donc le noyau spécifié par $K(p, t) = e^{-pt}$. On note la transformée de Laplace de f par $F = \mathcal{L}\{f\}$, ce qui signifie $F(p) = \mathcal{L}_p\{f\}$.

Cette transformée de Laplace est parfois appelée *transformée de Laplace unilatérale* car elle est uniquement définie pour des valeurs positives de t . Les fonctions à transformer sont soit des fonctions réelles soit des fonctions complexes. Dans notre chapitre, nous allons considérer généralement des fonctions à valeurs réelles. Nous supposons également que toutes les fonctions à transformer sont causales c'est-à-dire fonctions nulles pour des valeurs de t strictement négatives ($f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Avant de donner des propriétés de la transformée de Laplace, nous discutons d'abord de l'existence de l'intégrale dans (3.2) Nous commençons par la définition de certains concepts.

Définition 3.2 Une fonction réelle f de variable réelle t est continue par morceaux sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ s'il existe une suite croissante $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ telle que :

- sur chaque sous-intervalle $t_{i-1} < t < t_i$, f est continue ;
- f admet une limite finie à chaque extrémité de sous-intervalle.

Une telle fonction f est dite continue par morceaux sur $[0, \infty[$ si elle est continue par morceaux sur chaque sous-intervalle de $[0, \infty[$. Notons qu'une fonction complexe f est

continue par morceaux si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ le sont.

Définition 3.3 La fonction f définie pour $0 \leq t < \infty$ est dite d'ordre exponentiel s'il existe un nombre réel a et des constantes positives T et M telles que pour $t > T$, $|f(t)| \leq Me^{at}$.

Soit g une fonction réelle ou complexe définie sur l'intervalle $[\alpha, \infty[$ et continue par morceaux et A un nombre réel. Si $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = A$, alors l'intégrale impropre $\int_{\alpha}^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et est égale à cette limite A . Sinon, l'intégrale impropre est divergente. Ainsi, la transformée de Laplace n'existe que si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge dans \mathbb{C} pour au moins certaines valeurs de p .

Théorème 3.1 (Existence de la transformée de Laplace).

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $0 \leq t < \infty$ et satisfaisant $|f(t)| \leq Me^{at}$ pour certaines constantes réelles M et a .

Alors

$$F(p) = \mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

existe pour $\mathcal{R}e(p) > a$.

Preuve. Pour démontrer le théorème d'existence, il faut montrer que l'intégrale

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

converge pour $\mathcal{R}e(p) > a$. Notons $p = x + iy$. Calculons

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-(x+iy)t} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-(x+iy)t}| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-xt} dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$, on a $|f(t)| \leq Me^{at}$. Dès lors, $F(p)$ est bornée en module pour tout p tel que $\mathcal{R}e(p) > a$ car

$$\begin{aligned} |F(p)| &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} Me^{at} e^{-xt} dt \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(x-a)t} dt = \frac{M}{x-a} \quad (x > a). \end{aligned}$$

Nous avons donc établi par comparaison que l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge lorsque $x - a > 0$, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{R}e(p) > a$.

□

3.3 Propriétés

1. La transformée de Laplace est linéaire.

Soient $f_i(t)$ des fonctions dont la transformée de Laplace existe et c_i des constantes.

Alors

$$\mathcal{L}_p \left\{ \sum_i c_i f_i(t) \right\} = \sum_i \mathcal{L}_p \{ f_i(t) \}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \left\{ \sum_i c_i f_i(t) \right\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left\{ \sum_i c_i f_i(t) \right\} dt \\ &= \sum_i c_i \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_i(t) dt \\ &= \sum_i \mathcal{L}_p \{ f_i(t) \}. \end{aligned}$$

2. Si $\mathcal{L}_p \{ f(t) \}$ existe pour $\mathcal{R}e(p) > p_1$, alors

$$\mathcal{L}_p \{ e^{-at} f(t) \} = \mathcal{L}_{p+a} \{ f(t) \},$$

pour $\mathcal{R}e(p) > p_1 - \mathcal{R}e(a)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \{ e^{-at} f(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}_{p+a} \{ f(t) \}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}e(p+a) > p_1$$

$$\mathcal{R}e(p) + \mathcal{R}e(a) > p_1$$

$$\mathcal{R}e(p) > p_1 - \mathcal{R}e(a).$$

3. $\mathcal{L}_p \{ f(at) \} = \frac{1}{a} \mathcal{L}_{\frac{p}{a}} \{ f(t) \}$ si $\mathcal{R}e(p) > ap_1$ où a est une constante positive.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \{ f(at) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt, \text{ posons } at = t', \text{ } dt = \frac{1}{a} dt' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}t'} f(t') \frac{dt'}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}t'} f(t') dt' \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}t} f(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}_{\frac{p}{a}} \{ f(t) \}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}e\left(\frac{p}{a}\right) > p_1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \mathcal{R}e(p) > p_1 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(p) > ap_1.$$

Produit de Convolution

On appelle produit de convolution des fonctions F et G de la variable t , l'expression

$$F * G = \int_0^t F(\tau)G(t - \tau)d\tau.$$

On peut montrer que $F * G = G * F$

$$\begin{aligned} F * G &= \int_0^t F(\tau)G(t - \tau)d\tau, \text{ posons } t - \tau = \tau', d\tau' = -d\tau \\ &= - \int_t^0 F(t - \tau')G(\tau')d\tau', \text{ car si } \tau = 0, \tau' = t \text{ et si } \tau = t, \tau' = 0. \\ &= \int_0^t F(t - \tau')G(\tau')d\tau' \\ &= \int_0^t G(\tau)F(t - \tau)d\tau \\ &= G * F. \end{aligned}$$

4. $\mathcal{L}_p\{F * G\} = \mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} = \mathcal{L}_p\{G * F\}$

En effet, on remarque que puisque

$$\mathcal{L}_p\{F\} = \int_0^\infty e^{-px}F(x)dx$$

et

$$\mathcal{L}_p\{G\} = \int_0^\infty e^{-py}G(y)dy,$$

il vient

$$\mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} = \int_0^\infty e^{-px}F(x)dx \int_0^\infty e^{-py}G(y)dy.$$

Comme l'intégrande de la première intégrale ne dépend pas de la variable d'intégration de la seconde intégrale, on peut écrire $\mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\}$ sous la forme

$$\mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} = \int_0^\infty F(x) \left(\int_0^\infty e^{-p(x+y)}G(y)dy \right) dx.$$

En posant d'abord

$$t = x + y, \text{ où } x \text{ est fixé,}$$

l'intégrale par rapport à y dans l'équation précédente devient une intégrale par rapport à t . Ainsi,

$$\mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} = \int_0^\infty F(x) \left(\int_x^\infty e^{-pt}G(t - x)dt \right) dx.$$

Ensuite, en posant $x = \tau$,

$$\mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} = \int_0^\infty F(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-pt}G(t - \tau)dt \right) d\tau$$

Etant donné que f et g sont des fonctions causales, $F(\tau) = G(\tau) = 0$ pour $t < 0$ et $G(t - \tau) = 0$ pour $\tau > t$ et en supposant qu'on peut inverser l'ordre d'intégration, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{F\}\mathcal{L}_p\{G\} &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t F(\tau)G(t - \tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t F(\tau)G(t - \tau)d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-pt}(F * G)(t)dt \\ &= \mathcal{L}_p\{F * G\}. \end{aligned}$$

5. Si $f(t)$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{périodique} \\ \text{antipériodique} \end{array} \right\}$ de période T , alors

$$\mathcal{L}_p\{f(t)\} = \frac{1}{1 \mp e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt.$$

Définition : $f(t)$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{périodique} \\ \text{antipériodique} \end{array} \right\}$ de période T si $\left\{ \begin{array}{l} f(t) = f(t + nT) \\ f(t) = (-1)^n f(t + nT) \end{array} \right\}$.

Donc, $f(t)$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{périodique} \\ \text{ou} \\ \text{antipériodique} \end{array} \right\}$ si $f(t + nT) = \left\{ \begin{array}{l} f(t) \\ \text{ou} \\ (-1)^n f(t) \end{array} \right\}$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t)dt \end{aligned}$$

on pose $t' = t - nT$, $t' \in [0, T]$, $dt' = dt$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{f(t)\} &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-p(t'+nT)} f(t' + nT)dt' \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-pnT} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e^{-pt'} f(t')dt' \\ (-1)^n \int_0^T e^{-pt'} f(t')dt' \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^\infty e^{-pnT} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt \\ \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-pnT} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n=0}^\infty e^{-pnT}$ est la somme de termes d'une série géométrique illimitée. On sait que

$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1 - x} \text{ et } \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x}.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

D'où

$$\mathcal{L}_p\{f(t)\} = \frac{1}{1 \mp e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

6. *Transformée d'une dérivée* : Si f est une fonction dont la transformée de Laplace existe, alors $\mathcal{L}\{f'\}$ existe et est définie par

$$\mathcal{L}_p\{f'\} = p\mathcal{L}_p\{f\} - f(0), \text{ c'est-à-dire } \mathcal{L}_p\{f'\} = pF(p) - f(0).$$

En effet,

$$\mathcal{L}_p\{f'\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{f'\} &= [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= -f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= -f(0) + p\mathcal{L}_p\{f\} \\ &= pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

Egalement, si f et f' sont des fonctions dont les transformées de Laplace existent, alors la transformée de Laplace de f'' existe et est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{f''\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f''(t) dt \\ &= [e^{-pt} f'(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt \\ &= -f'(0) + p\mathcal{L}_p\{f'\} \\ &= -f'(0) + p[-f(0) + p\mathcal{L}_p\{f\}] \\ &= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Cette propriété peut se généraliser comme suit. Si les transformées de Laplace des fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ existent, alors la transformée de Laplace de $f^{(n)}$ existe et est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p\{f^{(n)}\} &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^n F(p) - \sum_{i=1}^n p^{n-i} f^{(i-1)}(0). \end{aligned}$$

NB : Ces formules de la transformée des dérivées jouent un rôle important dans la résolution des équations différentielles.

3.4 Transformées de Laplace de certaines fonctions

1. Si $f(t) = 1$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p\{f\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \\ &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{p} [e^{-\infty} - e^0] \\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

2. Si $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, alors on déduit directement de la propriété 2 et de la transformée de Laplace de $f(t) = 1$ ci-dessus que

$$\mathcal{L}_p\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}.$$

3. Si $f(t) = t$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p\{f\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt \\ &= \left[-t \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \\ &= 0 - \frac{1}{p^2} [e^{-pt}]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{p^2} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

Si $f(t) = t^2$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p\{f\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 dt \\ &= \left[-t^2 \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} + \frac{2}{p} \left[-t \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{-pt}}{p^2} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 + \frac{2}{p} \left[0 + \frac{1}{p^2} \right] \\ &= \frac{2}{p^3}.\end{aligned}$$

D'une façon générale, si $f(t) = t^n$, alors

$$\mathcal{L}_p\{f\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

4. Si $f(t) = e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p\{f\} &= \int_0^\infty e^{-pt} e^{iat} dt & (3.3) \\
 &= \int_0^\infty e^{-(p-ia)t} dt \\
 &= -\frac{1}{p-ia} [e^{-(p-ia)t}]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{p-ia} \\
 &= \frac{p+ia}{p^2+a^2}, \text{ avec } \mathcal{R}e(p) > 0.
 \end{aligned}$$

Partant du fait que

$$e^{iat} = \cos at + i \sin at,$$

nous pouvons tirer directement $\mathcal{L}_p\{\cos at\}$ et $\mathcal{L}_p\{\sin at\}$ car

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p\{e^{iat}\} &= \int_0^\infty e^{-pt} e^{iat} dt & (3.4) \\
 &= \int_0^\infty e^{-pt} (\cos at + i \sin at) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-pt} \cos at dt + i \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt \\
 &= \mathcal{L}_p\{\cos at\} + i \mathcal{L}_p\{\sin at\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_p\{\cos at\} + i \mathcal{L}_p\{\sin at\} = \frac{p+ia}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2} + i \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Par conséquent, on trouve par identification que

$$\mathcal{L}_p\{\cos at\} = \frac{p}{p^2+a^2}$$

et

$$\mathcal{L}_p\{\sin at\} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

5. Si $f(t) = t^n e^{at}$, alors, d'après la propriété 2, on obtient

$$\mathcal{L}_p\{e^{at} t^n\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

Par exemple,

$$\mathcal{L}_p\{e^{2t} t^3\} = \frac{3!}{(p-2)^4} = \frac{6}{(p-2)^4}$$

et

$$\mathcal{L}_p\{e^{2t} \sin 3t\} = \frac{3}{(p-2)^2+9} \text{ comme } \mathcal{L}_p\{\sin 3t\} = \frac{3}{p^2+9}.$$

3.5 Transformée de Laplace inverse

Proposition 3.1 Soit γ un nombre réel choisi arbitrairement de telle sorte que l'intégrale suivante converge et que ce nombre soit supérieure à la partie réelle de toutes les singularités de $F(p)$. Si f possède une transformée de Laplace $F = \mathcal{L}\{f\}$, alors la transformée de Laplace inverse définie par $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad t > 0 \tag{3.5}$$

et $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Pour rappel, si $F(p) = \frac{\phi(p)}{(p-a)^n}$, $\phi(a) \neq 0$ et si n est un entier positif, alors $F(p)$ présente une singularité en $p = a$ que l'on appelle pôle d'ordre n .

Par exemple, $F(p) = \frac{p}{(p-3)^2(p+1)}$ a deux singularités, un pôle d'ordre 2 en $p = 3$ et un pôle d'ordre 1 en $p = -1$.

En vue d'évaluer l'intégrale (1.5), on considère l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{pt} F(p) dp$$

où C est le contour représenté dans la Figure 3.1 On note

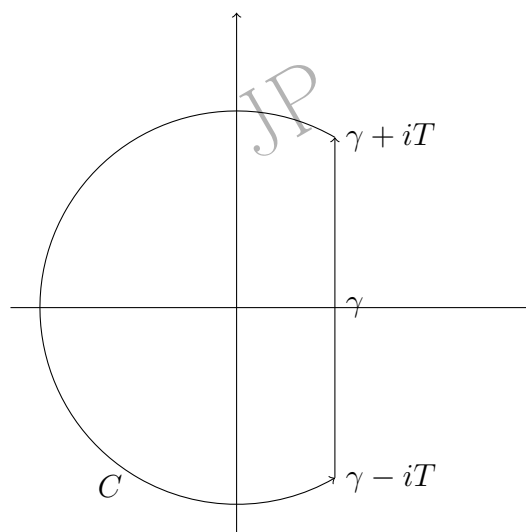


FIGURE 3.1 –

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{pt} F(p) dp.$$

Ce que l'on désigne parfois par la formule intégrale de Bromwich. L'intégrale (1.5) est égale à la limite de l'intégrale ci-dessus en $T \rightarrow \infty$, c'est-à-dire

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{pt} F(p) dp.$$

Comme l'opérateur de la transformée de Laplace est linéaire, il en est de même pour la transformée de Laplace inverse. Ainsi, si c_1 et c_2 sont des constantes quelconques et $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace de f et g respectivement, alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(p) + c_2G(p)\} = c_1f(t) + c_2g(t).$$

JP

Méthodes de recherche de transformées de Laplace inverse.

On peut utiliser plusieurs méthodes pour trouver les transformées inverses de Laplace. Voici trois méthodes parmi les méthodes possibles.

1. Méthodes des fractions rationnelles.

Toute fraction rationnelle $\frac{P(p)}{Q(p)}$, où $P(p)$ et $Q(p)$ sont des polyômes, le degré de $P(p)$ étant inférieur à celui de $Q(p)$, peut s'écrire comme la somme de fractions rationnelles de la forme $\frac{A}{(ap+b)^n}$, $\frac{Ap+B}{(ap^n+bp+c)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Il est donc possible de trouver $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P}{Q} \right\} (t)$ en calculant la transformée de Laplace de chacune des fractions rationnelles d'une de ces deux formes.

Les constantes réelles A et B, \dots sont déterminées par la réduction des fractions et en égalisant les termes de même degré en p dans les deux membres ou en utilisant des méthodes particulières (par exemple en utilisant la formule dite de *développement de Heaviside* (cfr 3^{ème} méthode ci-dessous)).

2. Méthodes par des séries.

Si $F(p)$ possède un développement en série des puissances inverses de p donnée par

$$F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \frac{a_3}{p^4} + \dots,$$

nous pouvons calculer la transformée de Laplace inverse terme à terme pour obtenir

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots$$

3. Formule de développement de Heaviside.

Soit $P(p)$ et $Q(p)$ deux polynômes tels que le degré de $P(p)$ est inférieur au degré de $Q(p)$. En supposant que $Q(p)$ possède n racines distinctes p_k , $k = 1, 2, \dots, n$, alors

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P}{Q} \right\} (t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t},$$

ce que l'on désigne souvent sous le nom de *formule de développement de Heaviside*. En effet, comme $Q(p)$ est un polynôme à n racines distinctes p_1, p_2, \dots, p_n , par la méthode des fractions rationnelles, nous pouvons écrire

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}. \quad (3.6)$$

En multipliant les 2 membres par $(p - p_k)$, et en calculant la limite pour $p \rightarrow p_k$, la

règle de l'Hospital implique

$$\begin{aligned}
 A_k &= \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)}{Q(p)} (p - p_k) \\
 &= \lim_{p \rightarrow p_k} P(p) \left\{ \frac{p - p_k}{Q(p)} \right\} \\
 &= \lim_{p \rightarrow p_k} P(p) \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ \frac{p - p_k}{Q(p)} \right\} \\
 &= P(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{Q'(p)} \\
 &= \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (1.6) peut s'écrire comme suit

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} \frac{1}{p - p_1} + \dots + \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \frac{1}{p - p_k} + \dots + \frac{P(p_n)}{Q'(p_n)} \frac{1}{p - p_n}.$$

La transformée de Laplace inverse terme à terme donne alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P}{Q} \right\} (t) &= \frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} e^{p_1 t} + \dots + \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t} + \dots + \frac{P(p_n)}{Q'(p_n)} e^{p_n t} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.
 \end{aligned}$$

3.6 Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles ordinaires

Comme nous avons déjà donné la formule de la transformée de Laplace des dérivées, nous sommes maintenant capable d'utiliser les méthodes de la transformée de Laplace pour résoudre les équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Considérons par exemple l'équation différentielle du second degré linéaire à coefficients constants. Sa forme générale, pour des réels a, b, c avec $a \neq 0$, est

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t), \quad (t \geq 0) \tag{3.7}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $\dot{y}(0) = \nu_0$ où un point désigne la dérivée par rapport au temps t .

En appliquant la transformée de Laplace terme à terme à (1.7), nous avons

$$a\mathcal{L}\{\ddot{y}\}(p) + b\mathcal{L}\{\dot{y}\}(p) + c\mathcal{L}\{y\}(p) = \mathcal{L}\{f\}(p).$$

En utilisant la formule de transformée des dérivées, nous obtenons (avec $Y = \mathcal{L}\{y\}$ et $F = \mathcal{L}\{f\}$)

$$a[p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)] + b[pY(p) - y(0)] + cY(p) = F(p)$$

$$\begin{aligned}
(ap^2 + bp + c)Y(p) - (ap + b)y_0 - av_0 &= F(p) \\
(ap^2 + bp + c)Y(p) &= F(p) + (ap + b)y_0 + av_0 \\
Y(p) &= \frac{F(p) + (ap + b)y_0 + av_0}{ap^2 + bp + c}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve l'expression de $y(t)$ en appliquant la transformée de Laplace inverse sur l'expression $Y(\lambda)$ trouvée ci-dessus.

Etant donné qu'un système différentiel est la donnée de plusieurs équations différentielles faisant intervenir plusieurs fonctions inconnues, on procède comme pour la résolution d'une équation différentielle sauf que l'on considère simultanément la transformée de Laplace de plusieurs fonctions.

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) = \cos t, \quad \text{avec } \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = 1. \quad (3.8)$$

En appliquant la transformée de Laplace terme à terme, nous obtenons :

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) - 2pY(p) + 2y(0) + 2Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Avec les valeurs initiales spécifiées, cela nous donne :

$$(p^2 - 2p + 2)Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + p - 2,$$

et

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{p + p(p^2 + 1) - 2(p^2 + 1)}{(p^2 + 1)(p^2 - 2p + 2)} \\
&= \frac{p^3 - 2p^2 + 2p - 2}{(p^2 + 1)(p^2 - 2p + 2)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression peut s'écrire comme suit :

$$\frac{p^3 - 2p^2 + 2p - 2}{(p^2 + 1)(p^2 - 2p + 2)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 2}$$

et il s'ensuit que

$$(Ap + B)(p^2 - 2p + 2) + (Cp + D)(p^2 + 1) = p^3 - 2p^2 + 2p - 2,$$

$$(A + C)p^3 + (-2A + B + D)p^2 + (2A - 2B + C)p + (2B + D) = p^3 - 2p^2 + 2p - 2$$

Par identification des termes en p^3 , en p^2 , en p et des termes indépendants, on se ramène à la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues pour trouver les constantes A , B , C et D . Par conséquent, on trouve $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{-2}{5}$, $C = \frac{4}{5}$ et $D = \frac{-6}{5}$. D'où

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{\frac{1}{5}p - \frac{2}{5}}{p^2 + 1} + \frac{\frac{4}{5}p - \frac{6}{5}}{p^2 - 2p + 2} \\
&= \frac{\frac{1}{5}p}{p^2 + 1} - \frac{\frac{2}{5}}{p^2 + 1} + \frac{\frac{4}{5}p}{p^2 - 2p + 2} - \frac{\frac{6}{5}}{p^2 - 2p + 2} \\
&= \frac{1}{5} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{2}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{4}{5} \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 1} - \frac{2}{5} \frac{1}{(p - 1)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Par la transformée de Laplace inverse, on trouve alors la solution au problème de valeur initiale (1.8) :

$$y(t) = \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 1} \right\} - \frac{2}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\} + \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} \right\} - \frac{2}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \right\},$$

$$y(t) = \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t + \frac{4}{5} e^t \cos t - \frac{2}{5} e^t \sin t.$$

Exemple 2. Considérons l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants suivante :

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = 0, \quad \text{avec } \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = 1. \quad (3.9)$$

En appliquant la transformée de Laplace à chaque terme de cette équation, obtient

$$p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) - p Y(p) + y(0) - 2 Y(p) = 0.$$

Ceci donne, avec les conditions initiales,

$$(p^2 - p - 2)Y(p) - p + 1 = 0$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2 - p - 2}$$

Par la méthode des fractions rationnelles, cette dernière expression peut s'écrire

$$\frac{p-1}{p^2 - p - 2} = \frac{p-1}{(p-2)(p+1)} = \frac{A_1}{p-2} + \frac{A_2}{p+1}$$

En appliquant la formule de développement de Heaviside,

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p-1}{p^2 - p - 2} (p-2) \\ &= \lim_{p \rightarrow 2} (p-1) \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p-2}{p^2 - p - 2} \\ &= 1 \cdot \lim_{p \rightarrow 2} \frac{1}{2p-1}, \quad \text{par Hospital} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p-1}{p^2 - p - 2} (p+1) \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} (p-1) \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p+1}{p^2 - p - 2} \\ &= -2 \cdot \lim_{p \rightarrow -1} \frac{1}{2p-1}, \quad \text{par Hospital} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

D'ou

$$Y(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{p-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{p+1}$$

et la transformée de Laplace inverse terme à terme donne

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

3.7 Travaux dirigés

Exercice 1. Calculer la transformée de Laplace pour les fonctions suivantes :

1. $f(t) = 4e^{5t} + 6t^3 - 3 \sin 4t + 2 \cos 2t.$

2. $f(t) = e^{4t} \cos 5t.$

3. $f(t) = 3 \cos 6t - 5 \sin 6t.$

4. $f(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) & \text{si } t \geq \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{si } t < \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Exercice 2. Calculer la transformée de Laplace de :

1. $f(x) = \frac{e^{bx}}{2a} \sin ax$

2. $f(x) = e^{-x} \sin^2 x$

3. $f(t) = \int_0^t (u^2 - u + e^{-u}) du$

4. $f(x) = \frac{xe^{bx}}{2a} \sin ax$

Exercice 3. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre les équations différentielles aux conditions initiales :

1. $y'(x) = y(x) + xe^x, \quad y(0) = -1.$

2. $y''(x) + 4y(x) = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

3. $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8.$

4. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

5. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

Exercice 4. On considère le système différentiel, avec conditions initiales, suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 0.$$

Résoudre le système en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant en utilisant la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) + x(t) - y(t) = 2 + 3e^{2t} \\ x'(t) + 2y'(t) - 3x(t) = -3 + 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 4 \text{ et } y(0) = 1.$$

Chapitre 4

Séries de Fourier et Transformée de Fourier

4.1 Introduction

Les *séries de Fourier* constituent un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'**analyse harmonique**.

Les séries de Fourier ont été introduites par **Joseph Fourier** en 1822, mais il fallut un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés : une théorie de l'intégrale pleinement satisfaisante et les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. Elles font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes, etc.

Les séries de Fourier se rencontrent *dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.*

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f . Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées. De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques).

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

- ◆ L'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier (souvent représentés dans un diagramme spectral ou spectre) ;
- ◆ La synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

Deux questions se posent alors : premièrement, est-il possible de représenter une fonction non périodique par quelque chose d'analogue à une série de Fourier ? Ensuite, peut-on étendre ou modifier le concept de série de Fourier de manière à inclure le cas d'un spectre continu ? De même qu'à la limite continue, une somme est remplacée par une intégrale, la série de Fourier sera remplacée par une intégrale de Fourier. Celle-ci peut être utilisée

pour représenter des fonctions non périodiques, par exemple un son qui n'est pas répété, une impulsion unique de tension, ou un flash de lumière.

Le théorème intégral de Fourier fait intervenir un spectre continu de fréquences, par exemple un ensemble de sons musicaux simples ou de couleurs de lumières simples. La transformation de Fourier est donc une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associée à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier s'exprime comme "somme infinie" des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale. Séries et transformation de Fourier constituent les deux outils de base de l'analyse harmonique.

Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle **signal** et sa transformée de Fourier s'appelle son **spectre**.

4.2 Quelques rappels

4.2.1 Les séries classiques

Définition 4.1 . Soit (u_n) une suite numérique et (s_n) la suite des sommes partielles : $s_n = \sum_{i=0}^n u_i$. On appelle série de terme général (u_n) que l'on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite (si elle existe) de la suite (s_n) .

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n u_i.$$

Les u_n sont les termes de la série, la limite (si elle existe) est la somme de la série.

Remarque :

- Si la suite (s_n) converge vers S alors : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$.
- Si la suite (s_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors la série est divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si la suite (s_n) n'a pas de limite alors la série est aussi divergente

4.2.2 Propriétés

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (condition nécessaire mais pas suffisante).
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente.

3. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont convergentes alors : $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont convergentes et $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
4. Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'une certaine valeur de n et si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. De plus, si pour toutes valeurs de n : $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
5. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'une certaine valeur de n et si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergent vers le même limite alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente. De plus, si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour toutes valeurs de n , alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.
6. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est une série convergente. Une série absolument convergente est convergente.

4.2.3 Les séries de fonctions

La terme général d'une série peut dépendre d'une variable réelle x . On a alors une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Pour chaque valeur de x , on se ramène à une série numérique ordinaire.

Si, pour chaque x appartenant à un ensemble D , $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est convergente alors la série définit une fonction

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) .$$

Définition 4.2 . On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est majorable sur un domaine D si et seulement si il existe une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, |u_n(x)| \leq \alpha_n$. Autrement dit, chaque fonction $u_n(x)$ est majorée par le terme constant d'une série numérique convergente.

4.2.4 Fonctions périodiques

Une fonction f est dite périodique de période T si :

$$\forall x, f(x + T) = f(x).$$

(où T est une constante réelle positive). La plus petite des valeurs de $T > 0$ est appelée "**moindre période**" ou "**période**" de f . On dit encore que la fonction f est T -périodique.

Exemples :

- $\sin x$ a pour période $2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$ et pour moindre période 2π ;
- $\sin nx$ a pour moindre période $\frac{2\pi}{n}$;
- $\tan x$ a pour moindre période π .

Remarque : si f est une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} , alors la fonction g définie par :

$$g(x) = f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

est T -périodique. On peut par cette remarque ramener l'étude des fonctions T -périodiques à celles des fonctions 2π -périodiques.

4.2.5 Calcul de quelques intégrales utiles

1. $\int_a^{a+2\pi} \cos px \cos qxdx$ (p et q étant des entiers) On a

$$\int_a^{a+2\pi} \cos px \cos qxdx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } p = q = 0. \end{cases}$$

2. $\int_a^{a+2\pi} \sin px \sin qxdx$ (p et q étant des entiers) On a

$$\int_a^{a+2\pi} \sin px \sin qxdx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = q = 0. \end{cases}$$

3. $\int_a^{a+2\pi} \sin px \cos qxdx$ (p et q étant des entiers) On a

$$\int_a^{a+2\pi} \sin px \cos qxdx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = q = 0. \end{cases}$$

4.3 Séries de Fourier

4.3.1 Introduction

On s'attache ici à l'étude du problème suivant :

Une fonction périodique F de période T peut-elle s'exprimer comme somme d'une série trigonométrique :

$$\sum (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}?$$

Etudié par **Fourier** au début du dix-neuvième siècle dans sa recherche de solutions de l'équation de la chaleur (équation de diffusion), ce problème conduit à une branche des mathématiques toujours vivantes.

4.3.2 Définition de la série de Fourier

Soit f une fonction définie sur un intervalle $] -l, l[$ et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par $f(x + 2l) = f(x)$, c'est-à-dire supposons f de période $T = 2l$.

Définition 4.3 (*Série de Fourier*) : La série de Fourier correspondant à $f(x)$ est définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

où les coefficients a_n et $b_n \forall n \in \mathbb{N}$ sont appelés coefficients de Fourier et valent :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (4.1)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (4.2)$$

Nous remarquons que les fonctions trigonométriques $\cos \frac{n\pi}{l} x$ et $\sin \frac{n\pi}{l} x$ sont de période $\frac{2l}{n}$ c'est-à-dire de fréquences égales à $\frac{n}{2l}$, c'est-à-dire des multiples entiers fois la fréquence de la fonction f qui vaut $\frac{1}{2l}$.

Notons que :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

est la moyenne de f sur une période.

Dans la suite, nous utiliserons surtout des fonctions de la variable x de période $2l$.

Remarques : Dans les applications en théorie du signal, on utilise la variable temporelle t , on note T la période (au lieu de $2l$) et on introduit son inverse $f = \frac{1}{T}$ qui est appelée la **fréquence fondamentale du signal**, la quantité $\frac{n\pi x}{l}$ devient alors $\frac{2n\pi t}{T} = 2\pi n f t$, ce qui peut s'interpréter comme un multiple entier n de fois la fréquence fondamentale du signal $f = \frac{1}{T}$ multipliée par 2π .

□ Dans ce contexte, le coefficient $\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne du signal f puisque :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

Ce terme est appelé la **composante continue** ou encore **valeur DC du signal**.

□ Le terme $a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t$ est appelé la **fondamentale du signal** ou encore la **première harmonique du signal**.

□ Le terme $a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t$ est appelé la **nième harmonique du signal**.

Théorème 4.1 (Translation de l'intervalle d'intégration) : Comme f a une période de $2l$, les coefficients de Fourier peuvent aussi être déterminés par les formules :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (4.4)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Preuve : Tout d'abord $g(x) = f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x$ est $2l$ -périodique car :

$$g(x + 2l) = f(x + 2l) \cos \frac{n\pi}{l} (x + 2l) = f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x + 2n\pi \right) = f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x = g(x).$$

Ensuite, si $g(x)$ est $2l$ -périodique, on a :

$$\int_{-l}^l g(x) dx = \int_a^{a+2l} g(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

En effet, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx &= \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} g(y-2l) dy \text{ où l'on a posé : } x = y - 2l \\ &= \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} g(y) dy \text{ comme } g(y) \text{ est } 2l\text{-périodique.} \end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha = -l$ et $\beta = a$, on a

$$\int_{-l}^a g(x) dx = \int_l^{a+2l} g(y) dy, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2l} g(x) dx &= \int_a^{-l} g(x) dx + \int_{-l}^l g(x) dx + \int_l^{a+2l} g(x) dx \\ &= - \int_{-l}^a g(x) dx + \int_{-l}^l g(x) dx + \int_{-l}^a g(x) dx \\ &= \int_{-l}^l g(x) dx. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.2 (Cas particulier) :

Si $l = \pi$, la série devient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et les coefficients de Fourier a_n et b_n , $n \in \mathbb{N}$, deviennent :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (4.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (4.6)$$

Jusqu'à maintenant, on ne sait pas si la série converge, et même si elle converge, si elle converge vers $f(x)$.

Plus précisément, en définissant la *somme partielle* d'indice N de la série :

$$S_N^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right),$$

le problème de la convergence peut donc s'énoncer comme suit : *Sous quelles conditions la série $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(x)$ converge-t-elle vers $f(x)$?*

Pour rappel :

Définition 4.4 (Convergence ponctuelle ou simple) Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge ponctuellement sur un ensemble S si et seulement si :

$$\forall x \in S \text{ on a } \lim_{N \rightarrow \infty} \left(f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right) = 0.$$

4.3.3 Conditions de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier

Théorème 4.3 (Conditions suffisantes de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série) Supposons que :

1. $f(x)$ est définie sur $[-l, l]$ sauf peut-être en un nombre fini de points ;
2. $f(x)$ est périodique de période $2l$;
3. $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues par morceaux dans $[-l, l]$;

alors la série de Fourier converge vers :

- . $f(x)$ si x est un point de continuité de f ;
- . $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un point de discontinuité de f .

On peut alors écrire :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

en tout point de continuité.

Si x est un point de discontinuité, le membre de gauche de l'équation précédente doit être remplacé par la valeur moyenne de f au point de discontinuité, c'est-à-dire :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Remarques :

◆ Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* sur $[a, b]$ si :

1. f est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_k ;
2. en chacun des points x_1, x_2, \dots, x_k , les limites à gauche et à droite de f existent, c'est-à-dire :

$$\forall j = 1, \dots, k, f(x_j-) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_j - h) \text{ et } f(x_j+) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_j + h).$$

En particulier, $f(a^+)$ et $f(b^-)$ existent.

- ◆ On dit qu'une fonction f est *lisse par morceaux* sur $[a, b]$ si $f(\cdot)$ et $f'(\cdot)$ sont continues par morceau sur $[a, b]$. En particulier $f'(a^+)$ et $f'(b^-)$ existent.
- ◆ On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue (*resp. lisse*) par morceaux sur \mathbb{R} si elle est continue (*resp. lisse*) par morceaux sur tout intervalle borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ci-dessous un exemple et un contre-exemple de fonction lisse par morceaux.

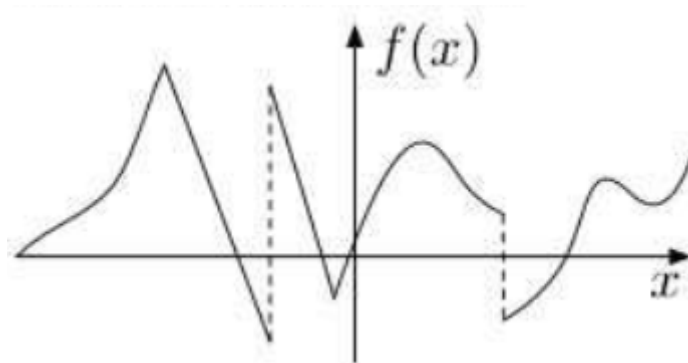


FIGURE 4.1 – Fonction lisse par morceaux

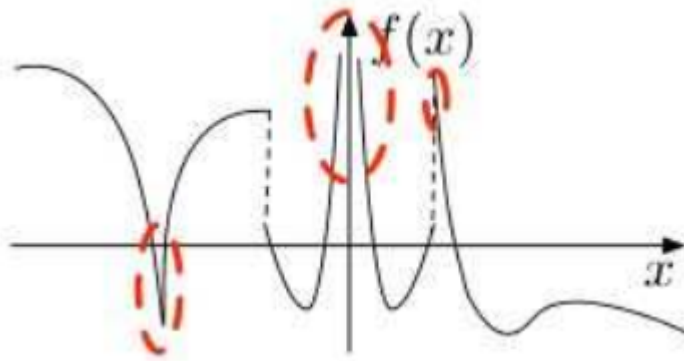


FIGURE 4.2 – Fonction non lisse par morceaux

- ◆ Les conditions 1 et 3 de Dirichlet peuvent alors être remplacées par la formule : "Si f est lisse par morceaux sur \mathbb{R} ".
- ◆ Il existe une version un peu plus forte du théorème de Dirichlet, qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.4 (*Autres conditions suffisantes de Dirichlet pour la convergence de la série*) Supposons que :

1. f est périodique de période $2l$;
2. f est bornée ;
3. f possède sur chaque intervalle d'une période un nombre fini de discontinuités et d'extrema locaux,

alors la série de Fourier converge vers :

- $f(x)$ si x est un point de continuité de f ;
- $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un point de discontinuité de f .

La preuve du théorème 4.3 découle des lemmes suivants :

Lemme 4.1 Montrons que :

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos px = \frac{\sin(p + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}. \quad (4.7)$$

En effet, on a

$$\cos nx \sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right]$$

puisqu'en développant le membre de droite en utilisant les formules d'addition, on a :

$$\frac{1}{2} \left(\sin nx \cos \frac{1}{2}x + \cos nx \sin \frac{1}{2}x - \sin nx \cos \frac{1}{2}x + \cos nx \sin \frac{1}{2}x \right) = \cos nx \cdot \sin \frac{1}{2}x.$$

Sommons de $n = 1$ à p :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}x (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos px) &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x + \dots + \right. \\ &\quad \left. \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(p - \frac{1}{2} \right) x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(p + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{1}{2}x \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos px = \frac{1 \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos px &= \frac{1 \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1 \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

Remarque : on appelle le n -ième *noyau de Dirichlet* "nommé ainsi en l'honneur du mathématicien allemand Johann Dirichlet" le polynôme trigonométrique défini par :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx). \quad (4.8)$$

C'est donc une fonction 2π -périodique de classe \mathcal{C}^∞ . De plus,

- ◆ si x n'est pas un multiple entier de 2π , alors $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}$;
- ◆ si x est un multiple entier de 2π , alors $D_n(x) = 2n + 1$.

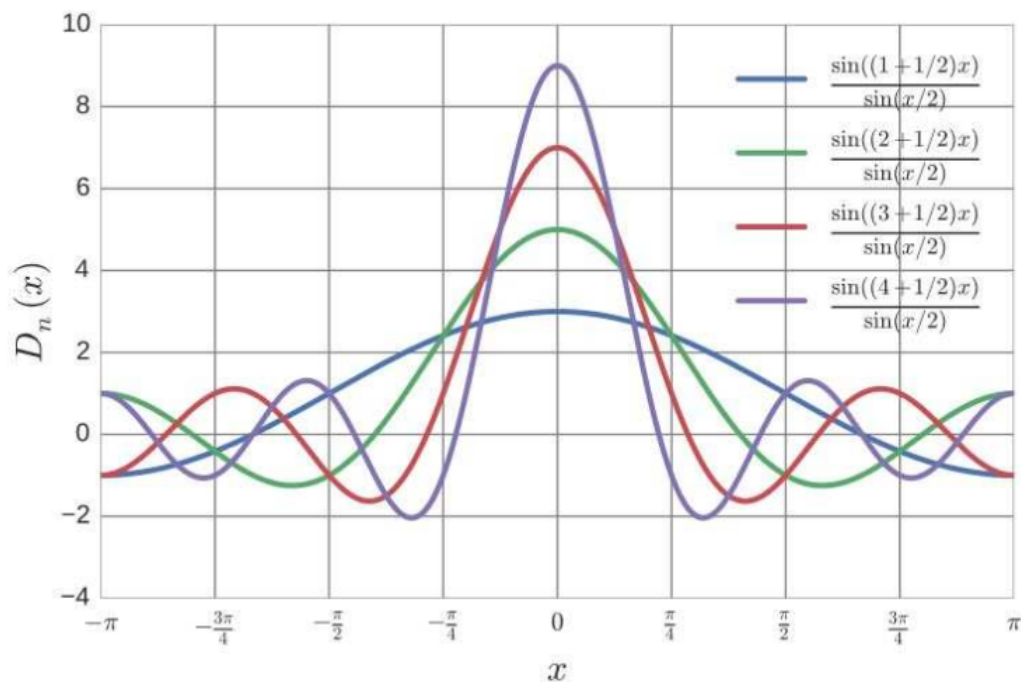


FIGURE 4.3 – Tracé des premiers noyaux de Dirichlet

Le n -ième terme de la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique et intégrable f s'écrit :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt = (D_n * f)(x)$$

L'identité précédente est un produit de convolution, ou l'application d'un opérateur à noyau.

Lemme 4.2 *Montrons que :*

1. $\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$
2. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} dx = \pi$, de même $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} dx = \pi$.

En effet,

1.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{ix}{2}} (1 - e^{-ix})} \\ &= \frac{e^{inx} - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} = \frac{e^{inx} - 1 + 1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= -\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{-ix}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= \frac{1 - e^{inx}}{e^{-ix} (1 - e^{ix})} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}}\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \text{et} \quad \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^n z^k.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} &= e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} + \sum_{k=0}^n e^{-ikx}, \quad i.e.z = e^{-ix} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)x} + \sum_{k=0}^n e^{-ikx}; \\ &= \sum_{k'=1}^n e^{ik'x} + \sum_{k=0}^n e^{-ikx}, \quad k' = k + 1; \\ &= \sum_{k'=1}^n e^{ik'x} + \sum_{k'=-n}^{-n} e^{ik'x}, \quad -k = k'; \\ &= \sum_{k'=1}^n e^{ik'x} + \sum_{k'=-n}^0 e^{ik'x}; \\ &= \sum_{k=1}^n e^{ikx} + \sum_{k=-n}^0 e^{ikx}; \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx &= \int_0^\pi \sum_{k=-n}^n e^{ikx} dx; \\
 &= \sum_{k=-n}^n \int_0^\pi e^{ikx} dx; \\
 &= \sum_{k=-n}^{-1} \int_0^\pi e^{ikx} dx + \int_0^\pi e^{i0x} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{ikx} dx; \\
 &= \pi + \sum_{k=-n}^{-1} \int_0^\pi e^{ikx} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{ikx} dx; \\
 &= \pi + \sum_{k'=1}^n \int_0^\pi e^{-ik'x} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{ikx} dx; \quad k = -k' \\
 &= \pi + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{-ikx} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{ikx} dx; \\
 &= \pi + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (e^{ikx} + e^{-ikx}) dx; \\
 &= \pi + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos kx dx; \\
 &= \pi + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^\pi; \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Lemme 4.3 Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nxdx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nxdx = 0$$

si $f(x)$ est continue par morceaux.

Pour prouver ce lemme, on a besoin de l'**inégalité de Bessel** :

Théorème 4.5 (Inégalité de Bessel) On a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx \quad (4.9)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f , supposée continue par morceaux.

Prouvons l'inégalité de Bessel : En effet, posons

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right). \quad (4.10)$$

C'est la suite des sommes partielles de la série de Fourier correspondant à $f(x)$.

On a :

$$\int_{-l}^l (f(x) - S_N(x))^2 dx \geq 0$$

comme l'intégrand est positif. En développant l'intégrand, on obtient

$$\int_{-l}^l (f(x))^2 \geq 2 \int_{-l}^l f(x)S_N(x)dx - \int_{-l}^l (S_N(x))^2 dx \quad (4.11)$$

Multiplions les deux membres de (4.10) par $2f(x)$ et intégrons :

$$\begin{aligned} 2 \int_{-l}^l f(x)S_N(x)dx &= 2 \left[\frac{a_0}{2} \int_{-l}^l f(x)dx + \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx + b_n \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right) \right] \\ &= 2l \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]. \end{aligned}$$

Elevons (4.10) au carré et intégrons :

$$\int_{-l}^l (S_N(x))^2 dx = l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

où on a utilisé le résultat :

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ l & \text{si } m = n \end{cases}$$

et

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0$$

qui s'obtiennent directement à l'aide des formules

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.11) et en divisant par l , on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx.$$

En prenant la limite pour $N \rightarrow \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel.

Prouvons maintenant le lemme 4.3.

La série :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente (puisque majorée par une intégrale finie, si f est continue par morceaux, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$).

Lemme 4.4 *Montrons que :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) x dx = 0 \quad (4.12)$$

si $f(x)$ est continue par morceaux.

On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) x dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{1}{2} x \cos N x dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{1}{2} x \sin N x dx.$$

En appliquant le lemme 4.3 avec $f(x)$ remplacée par $f(x) \sin \frac{1}{2} x$ ou $f(x) \cos \frac{1}{2} x$ (qui sont bien continues par morceaux), on a le résultat requis.

Remarquons que ce résultat peut aussi être prouvé si les limites d'intégration sont a et b plutôt que $-\pi$ et π .

Revenons au théorème proprement dit.

Lemme 4.5 *Supposons $l = \pi$, c'est-à-dire que la série de Fourier correspondant à $f(x)$ a une période $2l = 2\pi$ et montrons que :*

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt. \quad (4.13)$$

On a, en utilisant les formules des coefficients de Fourier lorsque $l = \pi$:

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos nu \cos nx du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin nu \sin nx du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-x) du \end{aligned}$$

et aussi :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-x) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(u-x) \right) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} du
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 4.1 en y remplaçant t par $u-x$. Passons à la variable d'intégration $t = u-x$, on a :

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

Comme l'intégrand a une période 2π , on peut remplacer l'intervalle de $-\pi-x$ à $\pi-x$ par tout intervalle de longueur 2π , en particulier $[-\pi, \pi]$. On a donc :

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

ce qui est le résultat attendu.

JP

Lemme 4.6 *Montrons que :*

$$\begin{aligned}
 S_N(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin(N + \frac{1}{2})t dt \quad (4.14) \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin(N + \frac{1}{2})t dt.
 \end{aligned}$$

On a par le lemme 4.4 :

$$\begin{aligned}
 S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) \sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad (4.15) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t+x) \sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+x) \sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.
 \end{aligned}$$

Multiplions les intégrales du lemme 4.2 2) par $f(x-0)$ et $f(x+0)$ respectivement et sommons :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x-0) \sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+0) \sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad (4.16)$$

En soustrayant (4.16) de (4.15), on a le résultat attendu.

Lemme 4.7 Si $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues par morceaux, montrons que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (4.17)$$

La fonction

$$\frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

est continue par morceaux sur $0 \leq t \leq \pi$ car $f(x)$ l'est aussi. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \end{aligned}$$

existe puisque par hypothèse $f(x)$ est continue par morceaux, de telle sorte que la dérivée à droite de $f(x)$ en chaque x existe.

Alors,

$$\frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

est continue par morceaux sur $0 \leq t \leq \pi$.

De la même manière, la fonction :

$$\frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

est continue par morceaux sur $-\pi \leq t \leq 0$.

Par les lemmes 4.4 et 4.6, on a :

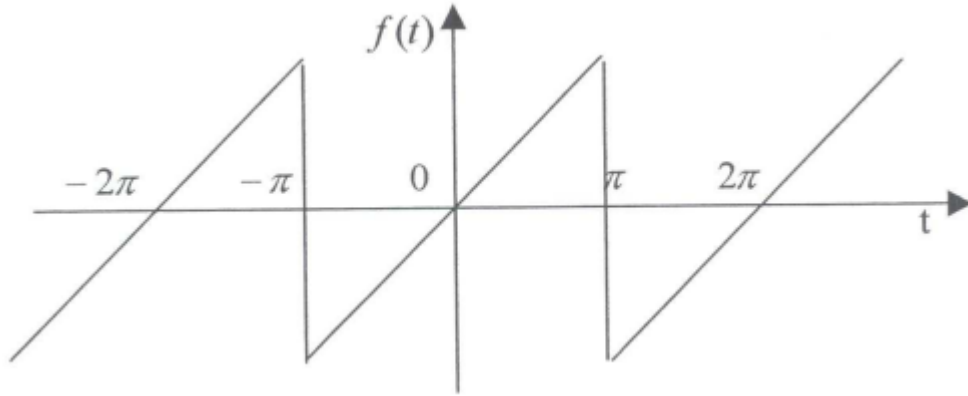
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ S_N(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right\} = 0$$

ou encore :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

ce qui achève de prouver le théorème et établit les conditions de Dirichlet.

Exemple 1. Soit la fonction définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$ et périodique de période 2π .



Cette fonction vérifie les conditions de Dirichlet d'existence de la série de Fourier.

Calculons ses coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx, \quad \forall n \neq 0$$

Une intégration par parties donne directement :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= 0 + \frac{1}{n^2\pi} [\cos nx]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx, \quad \forall n \neq 0$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos x}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\pi \cos n\pi + \pi \cos(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi} (\sin n\pi + \sin n\pi) \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

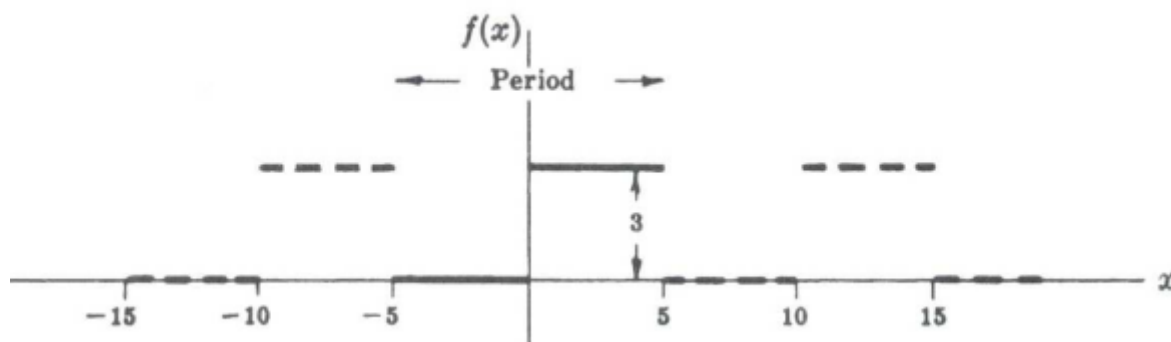
Nous pouvons donc écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \quad \text{sur } [-\pi, \pi]. \quad (4.18)$$

Exemple 2. Trouver les coefficients de Fourier correspondant à

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -5 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

de période 10, et écrire la série de Fourier correspondante. Comment faudrait-il définir f en $x = -5, 0$, et 5 pour que la série de Fourier converge sur $-5 \leq x \leq 5$ vers f ?



Solution :

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^0 0 dx + \frac{1}{5} \int_0^5 3 dx = 0 + \frac{1}{5} \cdot 3 [x]_0^5 = \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \int_{-5}^0 0 \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \frac{1}{5} \int_0^5 3 \cos \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \right]_0^5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^5 3 \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{3}{5} \left[-\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right]_0^5 \\ &= -\frac{3}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{3}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Si n est pair, alors $b_n = 0$ et si n est impaire, alors $b_n = \frac{6}{n\pi}$.

La série de Fourier correspondant à $f(x)$ est donc

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) &= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \dots \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{5}. \end{aligned}$$

Comme $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet, la série converge vers $f(x), \forall x$ qui correspond à un point de continuité et vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ aux points de discontinuité. En $x = -5, x = 0$ et $x = 5$, la série converge vers $\frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$. Il faut donc définir comme suit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } x = -5 \\ 0 & \text{si } -5 < x < 0 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

Exemple 3. Si

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et dérivable à gauche et à droite en tout point, alors les coefficients (réels) de Fourier sont :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt \\ &= -\frac{1}{\pi} [t]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} [t]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi} (0 + \pi) + \frac{1}{\pi} (\pi - 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos ntdt \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\sin nt]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [\sin nt]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin ntdt \\ &= \frac{1}{n\pi} [\cos nt]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [\cos nt]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} [(\cos 0 - \cos n\pi) - (\cos n\pi - \cos 0)] \\ &= \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n - (-1)^n + 1] \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Si n est pair, alors $b_n = 0$ et si n est impair, alors $b_n = \frac{4}{n\pi}$
 La série de Fourier est donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin nt \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}. \end{aligned}$$

Remarque : Si $t = \frac{\pi}{2}$, alors

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

et

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} \\ 1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4.3.4 Forme complexe d'une série de Fourier

En utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta, \end{aligned}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Remplaçons dans la série de Fourier correspondant à $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + a_n e^{-i\frac{n\pi x}{l}} - ib_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + ib_n e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2} \\
 &= \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n'=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n'} + ib_{-n'}}{2} e^{i\frac{n'\pi x}{l}} \\
 &= \frac{a_0}{2} e^{i0x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}
 \end{aligned}$$

où

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{si } n > 0 \\ a_0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Les c_n sont appelés *coefficients complexes* de Fourier.

De $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ si $n > 0$ et $c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$ si $n < 0 \Leftrightarrow c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, on peut avoir les coefficients réels de Fourier :

$$\begin{aligned}
 a_n &= c_n + c_{-n} \\
 b_n &= i(c_n - c_{-n}) \\
 a_0 &= c_0.
 \end{aligned}$$

Comme $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 c_{-n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + i \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{l} + i \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi x}{l}} dx \\
 &= \bar{c}_n
 \end{aligned}$$

Donc, pour n quelconque *entier relatif*,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx \\
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}
 \end{aligned}$$

Remarque : en égalant la série de Fourier à $f(x)$, on a supposé que les conditions de Dirichlet sont vérifiées et que $f(x)$ est continue en x . Si $f(x)$ est discontinue en x , le membre de gauche de l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}$$

doit être remplacé par $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Notons que l'inégalité de Bessel devient alors, en termes des coefficients complexes c_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx$$

4.3.5 Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

Rappel : fonctions paires et impaires

- ◆ Une fonction f est **paire** si et seulement si $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$. Si une fonction est paire, alors :

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

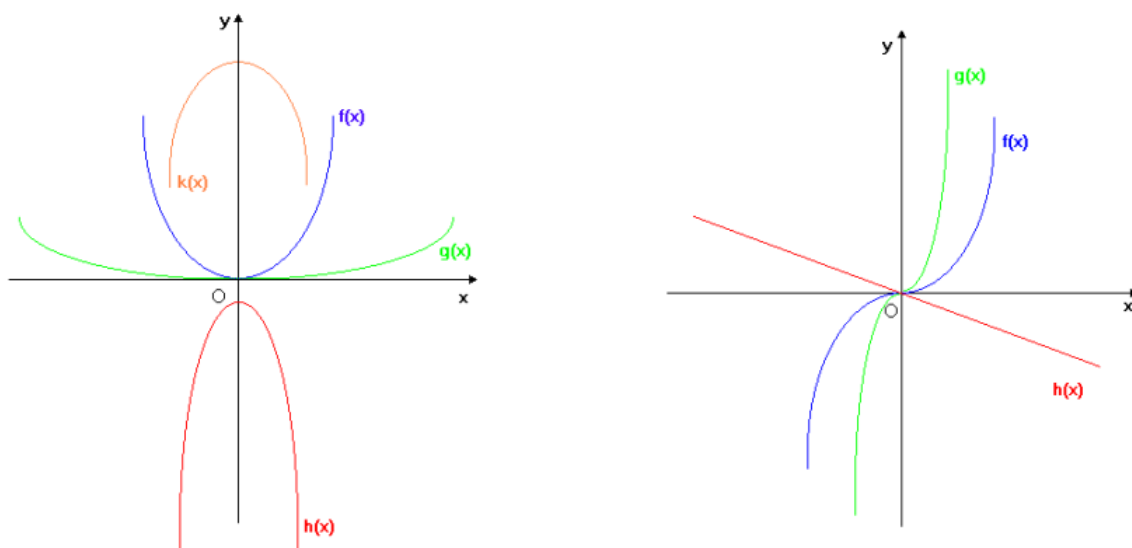
car son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical.

- ◆ Une fonction f est **impaire** si et seulement si $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$. Si une fonction est impaire, alors :

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

car son graphe est symétrique par rapport à l'origine des axes $(0, 0)$.

Mais une fonction dont la courbe représentative possède un axe ou un centre de symétrie n'est pas forcément paire ou impaire : il est nécessaire que le centre soit O ou l'axe soit (Oy) .



Par conséquent, si une fonction est paire, la série de Fourier correspondante ne comptera que des termes cosinoïdaux et un terme constant et s'écrira :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (4.19)$$

En effet,

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0$$

car $f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}$ est impaire. Les coefficients a_k peuvent se calculer comme suit :

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx$$

Pour une fonction impaire, la série de Fourier ne comptera que des termes sinusoïdaux et s'écrira donc :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (4.20)$$

En effet,

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0$$

car $f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}$ est une fonction impaire. Les coefficients b_k peuvent se calculer comme suit :

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Séries de Fourier en sinus ou en cosinus

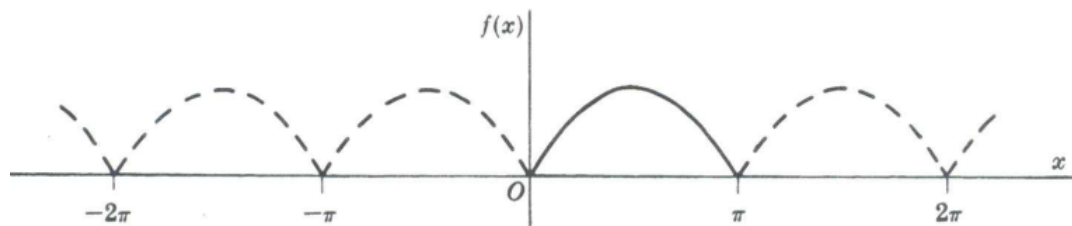
Une fonction définie sur l'intervalle $[0, l]$ et prolongée sur l'intervalle $[-l, 0]$ pour en faire une fonction paire (resp. impaire) admet un développement en séries de Fourier en cosinus (resp. en sinus). On a alors, dans le cas d'une fonction paire :

$$b_n = 0 \text{ et } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

et dans le cas d'une fonction impaire :

$$a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Exemple 1 : Développons $f(x) = \sin x$, $\forall 0 < x < \pi$ en série de Fourier de cosinus, on la prolonge d'abord en une fonction paire pour obtenir des cosinus.



On a

$$b_n = 0$$

et

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{n+1} + \frac{-\cos n\pi - 1}{n-1} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{n+1} - \frac{\cos n\pi + 1}{n-1} \right) \\
 &= \frac{-2}{\pi} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} = \frac{-2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \text{ si } n \neq 1.
 \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on obtient :

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^\pi = 0.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \cos nx \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^2 - 1}
 \end{aligned}$$

4.3.6 Identité de Parseval

Si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la série correspondant à $f(x)$, si f satisfait aux conditions de Dirichlet, et si la série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$, alors on a la formule suivante :

Théorème 4.6 (*Identité de Parseval*) :

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.21)$$

Preuve : Si f satisfait aux conditions de Dirichlet, on a en tout point de continuité :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Cette identité est en fait valable $\forall x$ si la série de Fourier converge uniformément, parce qu'alors $f(x)$ est continue en tout point. Multiplions par $f(x)$ et intégrons terme par terme entre $-l$ et l (ce qui est justifié comme la série converge uniformément). On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \{f(x)\}^2 dx &= \frac{a_0}{2} + \int_{-l}^l f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \\ &= \frac{a_0^2}{2} l + l \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

En divisant par l , on obtient l'identité de Parseval.

L'identité de Parseval se réécrit comme suit en termes des coefficients complexes :

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (4.22)$$

Exemple La série de Fourier en *cosinus* de $f(x) = x$, $\forall 0 < x < 2$ prolongée de façon paire est

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Ici, $l = 2$, $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)$, $\forall n \neq 0$, $b_n = 0$. L'identité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4 \pi^4} ((-1)^n - 1)^2$$

et donc :

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots \right).$$

Finalement, on a :

$$\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{96}$$

On peut en déduire la somme S de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

En effet :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{2^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^4} \\ &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16} \end{aligned}$$

Donc

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)S = \frac{\pi^4}{96}$$

soit

$$S = \frac{\pi^4}{90}.$$

4.4 Intégrale de Fourier et transformation de Fourier

4.4.1 Introduction

Nous avons considéré jusqu'ici la théorie d'un développement d'une fonction f de période $2l$ en série de Fourier. Une question naturelle à se poser est : *qu'arrive-t-il si $l \rightarrow \infty$?* Dans ce cas, la série de Fourier devient une **intégrale de Fourier** et le développement en série de Fourier devient une **transformation de Fourier**. En traitement du signal, la série de Fourier nous permet d'analyser un signal périodique non sinusoïdal en termes de ses composantes harmoniques. On parle d'analyse du signal dans le sens que cette décomposition en composantes simples permet de mieux le comprendre, de savoir comment il est construit : par exemple on pourra différencier le son émis par un instrument ou d'un autre par les harmoniques qu'il contient. La série de Fourier nous permet aussi de déterminer la réponse d'un système linéaire, comme la somme des réponses aux composantes individuelles.

La transformée de Fourier (TF) apporte une réponse à la question suivante : *Est-il possible de généraliser la méthode de décomposition introduite par la série de Fourier à des fonctions non périodiques ?*

4.4.2 Définition de la transformée de Fourier d'un signal

On définira la transformée de Fourier (TF) du signal $x(t)$ comme suit :

$$X(\omega) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

Remarquons que l'opération que l'on fait pour obtenir la TF est toujours la même : il s'agit de "projeter" la fonction $t \mapsto x(t)$ sur une base de fonctions exponentielles. La différence, et il faut bien comprendre ce point, est que, ici, il n'y a pas un ensemble discret de fonctions $f_n = e^{i\omega_n t}$ sur lesquelles projeter, mais une infinité de fonctions $e^{i\omega t}$ chacune associée à la pulsation $\omega \in \mathbb{R}$: On passe donc d'une série de coefficients c_n à une fonction continue $X(\omega)$ de la pulsation ω .

La connaissance de sa transformée $X(\omega)$ doit nous permettre de retrouver $x(t)$. Il est possible d'obtenir ce résultat à partir du même passage à la limite mais contentons nous de donner le résultat final : on montre que la fonction $t \mapsto x(t)$ peut s'écrire en termes

de sa TF comme :

$$\begin{aligned} x(t) &= TF^{-1}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df. \end{aligned}$$

Que signifie tout ça ? Nous voyons ici que une fonction quelconque (de durée limitée pour le moment) x peut être exprimée comme une intégrale de fonctions exponentielles complexes $e^{i\omega t}$ (pour tout $\omega \in \mathbb{R}$), chacune multipliée par une amplitude donnée par la valeur $X(\omega)$ (calculée donc en ω). En d'autres mots, la $TF[x(t)]$ représente le spectre du signal $x(t)$, et donne, pour chaque pulsation ω , l'amplitude $X(\omega)$ correspondante à la contribution $e^{i\omega t}$.

4.4.3 Intégrale de Fourier

Théorème 4.7 *Supposons que :*

- $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues par morceaux sur tout intervalle fini ;
 - $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converge, c'est-à-dire $f(x)$ est absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$,
- alors le théorème de Fourier intégral affirme que :

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha) d\alpha \quad (4.23)$$

où :

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \quad (4.24)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \quad (4.25)$$

Le résultat (4.23) s'applique si x est un point de continuité de f . Si x est un point de discontinuité, on doit remplacer $f(x)$ par $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ comme dans le cas des séries de Fourier. Notons que les conditions ci-dessus sont suffisantes mais non nécessaires. La similitude de (4.23) et de ((4.24),(4.25)) avec les résultats correspondant pour les séries de Fourier est visible. Le membre de droite de (4.23) est parfois appelé *développement de Fourier intégral* de f .

Formes équivalentes du théorème de Fourier intégral Le théorème de Fourier intégral peut aussi être écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) du d\alpha \quad (4.26)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha \quad (4.27)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (4.28)$$

où il est sous-entendu que si f n'est pas continue en x , le membre de gauche doit être remplacé par $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Montrons que les formules (4.23) et (4.26) sont deux formes équivalentes du théorème de Fourier intégral.

Partons de la forme

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) du d\alpha$$

Ce résultat peut être écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) (\cos \alpha x \cos \alpha u + \sin \alpha x \sin \alpha u) du d\alpha$$

ou encore :

$$f(x) = \int_{\alpha=0}^{\infty} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha$$

où l'on a posé

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u du$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u du.$$

Les deux formes sont donc bien équivalentes. Montrons à présent que (4.26) et (4.28) sont équivalentes. On a par (4.26) et le fait que $\cos \alpha(x-u)$ est une fonction paire de α :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) du d\alpha \quad (4.29)$$

Alors, en utilisant le fait que $\sin \alpha(x-u)$ est une fonction impaire de α , on a :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha(x-u) du d\alpha \quad (4.30)$$

Multiplions (4.30) par i et ajoutons à (4.29), on a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (\cos \alpha(x-u) + i \sin \alpha(x-u)) du d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha \end{aligned}$$

De la même manière, on peut déduire que (4.26) résulte de (4.28).

4.4.4 Transformées de Fourier

Définition

De (4.28), il s'ensuit que si l'on pose :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du, \quad (4.31)$$

alors :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha \quad (4.32)$$

La fonction $F(\alpha)$ est appelée la **transformée de Fourier** de f et est parfois écrite $F(\alpha) = \mathfrak{F}_\alpha \{f(x)\}$. La notation $\mathfrak{F}_\alpha \{f\}$ peut aussi être remplacée par $TF\{f\}(\alpha)$ ou encore simplement $\hat{f}(\alpha)$.

La fonction f est alors la **transformée de Fourier inverse** de $F(\alpha)$ et est écrite $f(x) = \mathfrak{F}^{-1} \{F(\alpha)\} = TF^{-1}\{F(\alpha)\}$.

La définition de transformée de Fourier n'est pas universelle. En physique, dans la plupart des exemples, la variable x concernée est, soit une longueur, soit un temps. Usuellement, la notation x représente une longueur. Dans ce cas, la variable α a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Elle est appelée nombre d'onde et est notée généralement k . Lorsque l'on considère une fonction du temps $t \mapsto f(t)$, on utilise pour la transformée de Fourier de $f(t)$ la notation :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (4.33)$$

où la variable ω , qui a les dimensions de l'inverse d'un temps, est la pulsation.

En physique, la formule d'inversion s'interprète comme une décomposition de $f(x)$ en une somme d'oscillations harmoniques. Si x est une longueur, $F(\alpha = k)$ est l'amplitude correspondant au nombre d'onde k . Si $x = t$ est un temps, $F(\alpha = \omega)$ est l'amplitude correspondant à la pulsation ω . Elle s'écrit alors :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{-i2\pi ft} df \quad (4.34)$$

où l'on a posé $\alpha = \omega = 2\pi f$.

Remarque : Les constantes 1 et $\frac{1}{2\pi}$ précèdent les intégrales dans les formules (4.31) et (4.32) peuvent être remplacées par n'importe quelles constantes dont le produit vaut $\frac{1}{2\pi}$. Par exemple, certains électroniciens ou physiciens utilisent (pour des raisons de symétrie avec la transformation de Fourier inverse) la transformation suivante

$$\mathfrak{F}\{f\} : \omega \mapsto \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.35)$$

avec t en secondes et ω la pulsation (en $rad.s^{-1}$). La transformation inverse s'écrit alors

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.36)$$

4.4.5 Conditions suffisantes d'existence (conditions de Dirichlet)

La transformée de Fourier d'une fonction f existe si $f(x)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (4.37)$$

On écrit cette dernière condition sous la forme $f \in L_1(\mathbb{R})$. En effet, si f est absolument intégrable, alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (4.38)$$

puisque l'on a $|f(x)e^{-i\omega x}| = |f(x)|$.

Notons que cette condition garantit l'existence de la transformée de Fourier, mais n'est pas nécessaire. Pour que la transformation inverse redonne la fonction f , les conditions supplémentaires :

- f est continue par morceaux sur tout intervalle fini
- f' est continue par morceaux sur tout intervalle fini

sont également suffisantes.

En généralisant dans \mathbb{R}^n , on a la définition suivante :

Définition 4.5 On appelle transformée de Fourier d'une fonction

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

l'expression :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm ix \cdot \alpha} f(x) dx,$$

où

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n, x \cdot \alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

Théorème 4.8 $\mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\}$ existe si f est intégrable

En effet, si $\mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\}$ existe, cela veut dire que $f(x)e^{\pm ix \cdot \alpha} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et

$$|f(x)e^{\pm ix \cdot \alpha}| = |f(x)| |e^{\pm ix \cdot \alpha}| = |f(x)|$$

Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$f(x)e^{\pm ix \cdot \alpha} \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

Dans la suite de notre section, nous allons utiliser l'expression (4.31) pour la transformée de Fourier.

4.4.6 Transformées de Fourier en sinus et en cosinus

Dans le cas de dimension 1, c'est-à-dire $n = 1$, on a $F_c(\alpha)$ la transformée de Fourier en cosinus de $f(x)$ et $f(x)$ la transformée de Fourier inverse en cosinus de $F_c(\alpha)$:

$$\mathfrak{F}_\alpha^c\{f(x)\} = F_c(\alpha) = \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x dx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos x \alpha d\alpha$$

si f est une fonction paire. De même, on a $F_s(\alpha)$ la transformée de Fourier en sinus de $f(x)$ et $f(x)$ la transformée de Fourier inverse de $F_s(\alpha)$:

$$\mathfrak{F}_\alpha^s\{f(x)\} = F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin x \alpha d\alpha$$

si f est impaire.

4.4.7 Quelques exemples des transformées de Fourier de certaines fonctions (n=1)

1. Fonction paire : $\mathbf{f(-x) = f(x)}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ix\alpha} dx + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= - \int_\infty^0 f(-x') e^{ix'\alpha} dx' + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx, \quad \text{en posant } x' = -x \\ &= \int_0^\infty f(x') e^{ix'\alpha} dx' + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= \int_0^\infty f(x) (e^{ix\alpha} + e^{-ix\alpha}) dx \\ &= 2 \int_0^\infty f(x) \cos x \alpha dx \\ &= 2\mathfrak{F}_\alpha^c[f(x)] \end{aligned}$$

2. fonction impaire : $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ix\alpha} dx + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= - \int_\infty^0 f(-x') e^{ix'\alpha} dx' + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx, \quad \text{en posant } x' = -x \\ &= \int_0^\infty f(-x') e^{ix'\alpha} dx' + \int_0^\infty f(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= - \int_0^\infty f(x) (e^{ix\alpha} - e^{-ix\alpha}) dx \\ &= -2i \int_0^\infty f(x) \sin x \alpha dx \\ &= -2i\mathfrak{F}_\alpha^s[f(x)] \end{aligned}$$

3. Transformée de Fourier d'une fonction porte :

$$\text{Soit } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \delta_{[a,b]}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha \{ \delta_{[a,b]}(x) \} &= \left(\int_{-\infty}^a + \int_a^b + \int_b^\infty \right) \delta_{[a,b]}(x) e^{-ix\alpha} dx \\ &= \int_a^b e^{-ix\alpha} dx = \left[\frac{e^{-ix\alpha}}{-i\alpha} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ia\alpha}}{-i\alpha} \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha \{ \delta_{[-a,a]}(x) \} &= \left[\frac{e^{-ix\alpha}}{-i\alpha} \right]_{-a}^a = \frac{-2i \sin a\alpha}{-i\alpha} \\ &= 2 \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \text{ pour } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient $F(\alpha) = 2a$.

$$4. \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - k|x|, & -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}, k > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha \{ f(x) \} &= 2\mathcal{F}_\alpha^c \{ f(x) \} \\ &= 2 \int_0^\infty f(x) \cos x\alpha dx \\ &= 2 \int_0^\infty (1 - kx) \cos x\alpha dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{k}} (1 - kx) \cos x\alpha dx \\ &= 2 \left[(1 - kx) \frac{\sin x\alpha}{\alpha} \right]_0^{\frac{1}{k}} + 2k \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\sin x\alpha}{\alpha} dx \\ &= -\frac{2k}{\alpha^2} [\cos x\alpha]_0^{\frac{1}{k}} \\ &= -\frac{2k}{\alpha^2} \left[\cos \frac{\alpha}{k} - 1 \right] \\ &= \frac{2k}{\alpha^2} \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2k}}{\frac{\alpha}{2k}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$5. \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

f étant paire, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\alpha\{f(x)\} &= 2\mathcal{F}_\alpha^c\{f(x)\} = 2 \int_0^\infty \frac{\cos x\alpha}{x^2 + a^2} dx = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(x^2+a^2)} \cos x\alpha dt dx \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-ta^2} dt \left[\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos x\alpha dt dx \right] \\
 &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \cdot e^{-ta^2} dt \quad \text{posons } u = \sqrt{t} \\
 &= 2\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4u^2} + a^2u^2\right)} du \\
 &= 2\sqrt{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-2\sqrt{a^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4}}} \\
 &= \frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha|}
 \end{aligned}$$

6. $f(x) = e^{-k|x|}$

$$\mathcal{F}_\alpha\{f(x)\} = 2 \int_0^\infty e^{-ka^2} \cos x\alpha dx = 2 \frac{k}{k^2 + \alpha^2}$$

7. $f(x) = e^{-ax^2}$

$$\mathcal{F}_\alpha\{f(x)\} = 2 \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos x\alpha dx = 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

4.4.8 Propriétés de la transformation de Fourier

Propriété de linéarité

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que, λ et μ étant des scalaires, on a :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{\lambda f(x) + \mu g(x)\} = \lambda F(\alpha) + \mu G(\alpha). \tag{4.39}$$

En d'autres termes, *la transformation de Fourier commute avec l'addition et la multiplication par un scalaire.*

Translation

Cherchons la transformée de Fourier de $f(x - a)$ (avec a réel). En posant $u = x - a$, on obtient :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f(x - a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) e^{-i\alpha x} dx = e^{-i\alpha a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du$$

soit :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f(x - a)\} = e^{-i\alpha a} F(\alpha). \tag{4.40}$$

A la translation de $f(x)$ correspond un déphasage de $F(\alpha)$ proportionnel à α c'est-à-dire que la transformée de Fourier de $f(x - a)$ s'obtient en multipliant $F(\alpha)$ par le facteur de phase $e^{-i\alpha a}$.

Modulation

Inversement, la transformée de Fourier de $e^{i\alpha_0 x} f(x)$ (avec α_0 réel) est donnée par :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{e^{i\alpha_0 x} f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\alpha - \alpha_0)x} dx$$

soit :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{e^{i\alpha_0 x} f(x)\} = F(\alpha - \alpha_0). \quad (4.41)$$

A la modulation de $f(x)$ correspond une translation de $F(\alpha - \alpha_0)$.

Changement d'échelle

Changer l'unité pour la variable x revient à multiplier celle-ci par une constante réelle $a \neq 0$. En posant $u = ax$, on obtient :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u/a} du$$

soit :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right). \quad (4.42)$$

Une compression de l'échelle des x entraîne une dilatation de l'échelle des α .

En termes plus physiques, une compression de l'échelle des longueurs entraîne une dilatation de l'échelle des nombres d'onde. De même, une compression de l'échelle des temps entraîne une dilatation de l'échelle des pulsations. C'est là une propriété extrêmement importante en pratique de la transformation de Fourier.

Conjugaison complexe

On a :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{f^*(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-i\alpha x} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \right]^*$$

soit :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{f^*(x)\} = F^*(-\alpha). \quad (4.43)$$

Transformée de Fourier de $f'(x)$

Supposons f intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée f' possède alors une transformée de Fourier, donnée par :

$$\mathfrak{F}_\alpha \{f'(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx. \quad (4.44)$$

Intégrons par parties l'intégrale au second membre de l'équation (4.44) :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f'(x)\} = [f(x)e^{-i\alpha x}]_{-\infty}^{\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx. \quad (4.45)$$

Comme f' est intégrable, $f(x)$ a bien une limite finie pour $x \rightarrow \pm\infty$. Cette limite ne peut être différente de 0, sans quoi f ne serait pas intégrable. Le terme tout intégré de la formule (4.45) est donc nul. Il reste :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f'(x)\} = i\alpha \mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\} = i\alpha F(\alpha). \quad (4.46)$$

A la dérivation de $f(x)$ par rapport à x correspond donc la multiplication de $F(\alpha)$ par $i\alpha$.

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m , on a :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f^{(m)}(x)\} = (i\alpha)^m F(\alpha). \quad (4.47)$$

Le résultat (4.47) conduit à une majoration importante. De la formule :

$$(i\alpha)^m F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)e^{-i\alpha x} dx$$

on déduit l'inégalité :

$$|\alpha|^m |F(\alpha)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx. \quad (4.48)$$

Plus f est dérivable, à dérivées intégrables, plus sa transformée de Fourier $F(\alpha)$ décroît rapidement à l'infini.

Transformée de Fourier de l'intégrale de $x(t)$

En supposant que $f(0) = 0$, on montre de la même manière que :

$$\mathfrak{F}_\alpha\left\{\int_{-\infty}^x f(u) du\right\} = \frac{1}{i\alpha} F(\alpha). \quad (4.49)$$

Propriété de dualité

La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de Fourier à partir de paires déjà connues. Cette propriété s'énonce comme suit, pour une fonction f , si :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f(x)\} = F(\alpha),$$

alors :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha). \quad (4.50)$$

Ceci se démontre en débutant avec l'expression de la transformée de Fourier inverse :

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha$$

et en échangeant maintenant les variables x et α ; on obtient :

$$f(-\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\alpha x} dx$$

et le membre de droite n'est rien d'autre que $\frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}\{F(x)\}$ ce qui prouve la propriété.

Cette propriété devient, pour un signal $x(t)$, si :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{x(t)\} = X(f)$$

alors :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{X(t)\} = x(-f). \quad (4.51)$$

En effet, on a alors :

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

et en échangeant maintenant les variables t et f ; on obtient :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i2\pi ft} dt$$

et le membre de droite n'est rien d'autre que $\mathfrak{F}_\alpha\{X(t)\}$ ce qui prouve la propriété.

Dérivation de $F(\alpha)$ par rapport à α

On a :

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

soit, en dérivant sous le signe somme :

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\alpha x} dx = \mathfrak{F}\{-ix f(x)\}$$

soit finalement :

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \mathfrak{F}\{-ix f(x)\}. \quad (4.52)$$

(La dérivation sous le signe somme est légitime si $x f(x)$ est intégrable).

Plus généralement, on a :

$$\mathfrak{F}\{f(-ix)^m f(x)\} = F^{(m)}(\alpha). \quad (4.53)$$

Ce résultat conduit encore à une majoration :

$$|F^{(m)}(\alpha)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |f(x)| dx \quad (4.54)$$

Plus f décroît rapidement à l'infini, plus $F(\alpha)$ est dérivable (avec des dérivées bornées).

4.4.9 Théorème de convolution pour les transformées de Fourier

Définition

La convolution de deux fonctions f et g appartenant à L_1 est définie par :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du. \quad (4.55)$$

Transformée de Fourier et produit de convolution

On peut montrer que $f * g = g * f$ appartient aussi à L_1 (nous l'admettrons). On peut alors calculer la transformée de Fourier de cette fonction. Un important théorème, souvent appelé le théorème de convolution, établit que la transformée de Fourier de la convolution de f et de g est égale au produit des transformées de Fourier de f et de g , c'est-à-dire en formule :

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \mathfrak{F}\{f\}\mathfrak{F}\{g\} \quad (4.56)$$

Formellement :

$$\mathfrak{F}_\alpha\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(u)g(x-u)dxdu \quad (4.57)$$

Effectuons le changement de variable $x - u = v$, $dx = dv$ dans l'intégrale (4.57). On obtient :

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(u+v)} f(u)g(v)dudv. \quad (4.58)$$

L'intégrale double (4.58) est le produit ordinaire de deux intégrales simples :

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} f(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha v} g(v)dv. \quad (4.59)$$

On obtient ainsi la relation :

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \mathfrak{F}\{f\}\mathfrak{F}\{g\}. \quad (4.60)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est donc bien égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de ces deux fonctions. A cause de la symétrie des intégrales de Fourier et de Fourier inverse représentant respectivement $f(x)$ et $F(\alpha)$, il existe un résultat analogue reliant le produit (ordinaire) $f(x)g(x)$ et le produit de convolution de $F(\alpha)$ et de $G(\alpha)$:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F * G\} = 2\pi\mathfrak{F}^{-1}\{F\}\mathfrak{F}^{-1}\{G\} = 2\pi f(x)g(x) \quad (4.61)$$

Cette dernière formule peut encore être écrite comme suit :

$$\mathfrak{F}\{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi}F * G. \quad (4.62)$$

4.5 Travaux dirigés

Exercice 1. Développer en série de Fourier $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$, f étant une fonction rendue périodique de période 2π .

Exercice 2. Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 1 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Exercice 3. Trouver les coefficients complexes de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{4}(\pi - x)^2, \text{ avec } x \in [0, 2\pi]$$

et donner la série de Fourier de f .

Exercice 4. Trouver les coefficients de Fourier pour $f(x) = e^{ax}$, $x \in [-\pi, \pi]$ et donner la série de Fourier correspondant à f .

Exercice 5. Appliquer la relation de Parseval au développement en série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases},$$

f étant une fonction rendue périodique de période 2π . Déterminer ensuite les coefficients complexes de Fourier.

Exercice 6. Soit f une fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = x(2\pi - x) \text{ pour tout } x \in]0, 2\pi[.$$

Développer f en série de Fourier. En déduire les sommes des séries :

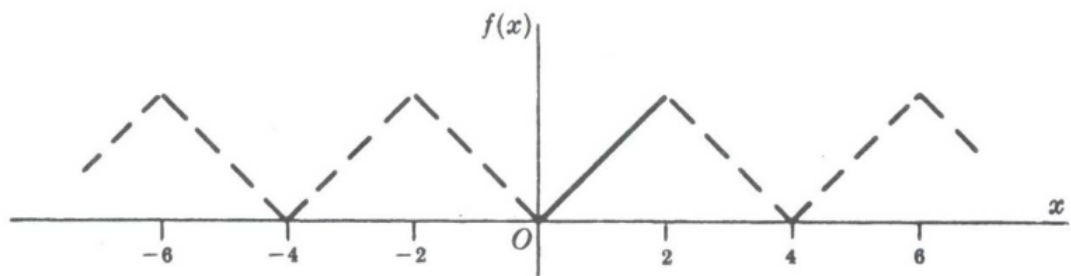
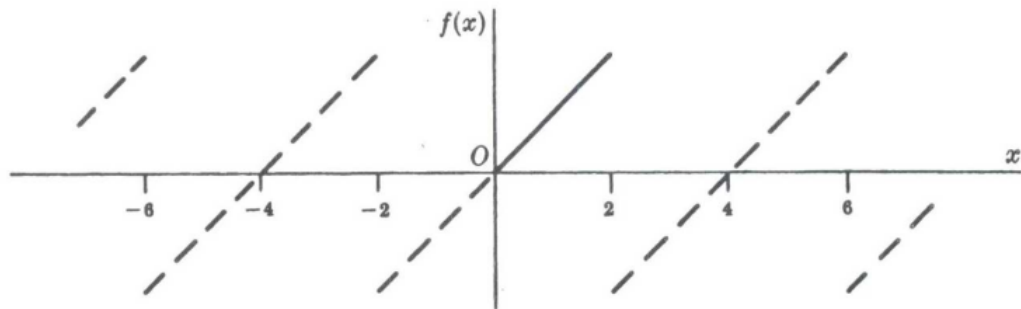
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 7. Trouver les coefficients de Fourier (réels et complexes) pour la fonction f rendue 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \pi + x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

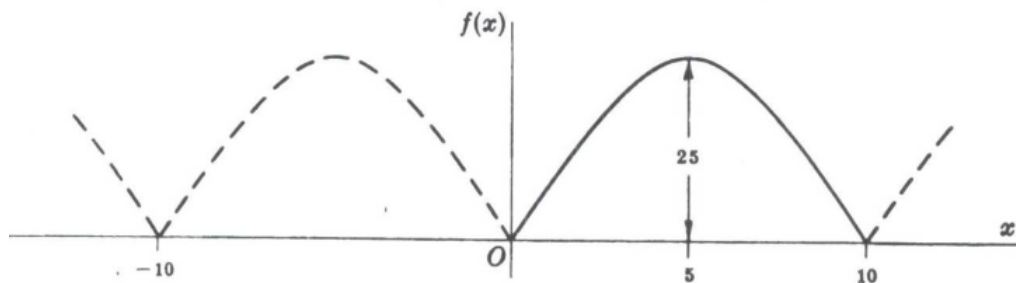
Exercice 8. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-1, 1]$ par l'équation $f(x) = x^2$.

Exercice 9. Développer $f(x) = x, \forall 0 < x < 2$ en séries de sinus et en séries de cosinus



Exercice 10. Même question pour $f(x) = x^2, \forall 0 < x < 2$ en séries de cosinus.

Exercice 11. Même question pour $f(x) = -x^2 + 10x, \forall 0 < x < 10$



Exercice 12. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte Π définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13. La transformée de Fourier des fonctions impulsions Π_T définies par

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 14. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15. Calculez la transformée de Fourier de

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Exercice 16. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exercice 17. En appliquant la transformation de Fourier résoudre l'équation différentielle

$$-y'' + y = e^{-2|x|}.$$

JP

Chapitre 5

Eléments du calcul variationnel

5.1 Position du problème

On considère une fonction $F(x, \Phi(x), \Phi'(x))$ de classe $C_2(\Omega)$ où

- x est une variable indépendante
- $\Phi = \Phi(x)$ est fonction de x
- $\Phi'(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$
- Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 .

on introduit ensuite la fonctionnelle

$$I[\Phi(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \Phi(x), \Phi'(x)) dx$$

Parmi toutes les fonctions Φ pour lesquelles cette intégrale existe, on choisira celle qui la rende extrémale.

Question : Pour quelle fonction $\Phi(x)$, I prend-elle des valeurs extrêmes ?

Définition

On dit que $\Phi(x)$ est admissible pour ce problème si

- $\Phi(x) \in C_2(]x_0, x_1[)$
- Φ prend des valeurs fixes en x_0 et x_1 :

$$\Phi(x_0) = y_0, \quad \Phi(x_1) = y_1.$$

Si $\Phi(x) = u(x)$ est une fonction admissible et si on considère la variation $\delta\Phi(x) = \varepsilon v(x)$, $\varepsilon \ll 1$

$$\Phi(x) + \delta\Phi(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$$

On obtient une nouvelle fonction admissible si u et $v \in C_2(]x_0, x_1[)$ avec $v(x_0) = v(x_1) = 0$.
considérons la correspondance $\varepsilon \rightarrow I(\varepsilon) = I(u(x) + \varepsilon v(x))$

La condition pour que I admette des valeurs extrêmes est

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

5.2 Equation d'Euler

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $I(\Phi)$ soit extrémale pour une fonction admissible $\Phi = u$ est que cette fonction satisfasse à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

avec $u' = \frac{du}{dx}$, $F = F(x, u, u')$.

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon v, u' + \varepsilon v') dx, \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, u, u') + \varepsilon v \frac{\partial F}{\partial u} + \varepsilon v' \frac{\partial F}{\partial u'} + \varepsilon^2(\dots) + \dots] dx \\ \frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1} (v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'}) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx} (v \frac{\partial F}{\partial u'}) - v' \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial u'})] dx \\ &= [v(x) \frac{\partial F}{\partial u'}]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} v(x) [\frac{\partial F}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial u'(x)})] dx \\ &= 0, \forall v(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial u'(x)}) = 0}$$

Notons que lorsque F ne dépend pas explicitement de x :

$$F = F(u(x), u'(x)),$$

on a une intégrale première

$$E = F(u, u') - u' \frac{\partial F}{\partial u'}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= u' \frac{\partial F}{\partial u} + u'' \frac{\partial F}{\partial u'} - u' \frac{\partial F}{\partial u'} - u' \frac{\partial F}{\partial u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.3 Généralisations

a. cas de plusieurs variables dépendantes

$$F = F(x, \phi_i(x), \phi'_i(x)), \quad 1 \leq i \leq p$$

ϕ_i sont admissibles si

- $\phi_i \in C_2(]x_0, x_1[)$
- $\phi_i(x_0) = y_0^i, \phi_i(x_1) = y_1^i$.

Si $\phi_i(x) = u_i(x)$ sont admissibles

$\phi_i(x) + \delta\phi_i(x) = u_i(x) + \varepsilon v_i(x)$ sont admissibles si $v_i(x_0) = v_i(x_1) = 0$.

On a ici

$$\begin{aligned}
 I(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_i + \varepsilon v_i, u'_i + \varepsilon v'_i) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, u_i, v_i) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial F}{\partial u} + v'_i \frac{\partial F}{\partial u'_i} \right) + \varepsilon^2(\dots) + \dots] dx \\
 \frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \sum_{i=1}^p \int_{x_0}^{x_1} \left(v_i \frac{\partial F}{\partial u} + v'_i \frac{\partial F}{\partial u'_i} \right) dx \\
 &= \sum_{i=1}^p \left[v_i \frac{\partial F}{\partial u'_i} \right]_{x_0}^{x_1} + \sum_{i=1}^p \int_{x_0}^{x_1} v_i \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_i} \right) \right) dx \\
 &= 0, \quad \forall v_i(x). \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_i} \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq p}
 \end{aligned}$$

b. cas des dérivées d'ordre supérieure

(1) $F = F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) :$

ϕ est admissible si

- $\phi \in C_3(]x_0, x_1[)$
- ϕ et ϕ' prennent des valeurs fixes en $x_0, x_1 :$

$$\delta\phi(x_0) = \delta\phi(x_1) = 0$$

$$\delta\phi'(x_0) = \delta\phi'(x_1) = 0$$

$$I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon v, u' + \varepsilon v', u'' + \varepsilon v'') dx$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1} \left[v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} + v'' \frac{\partial F}{\partial u''} \right] dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx} \left(v \frac{\partial F}{\partial u'} \right) - v \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d}{dx} \left(v' \frac{\partial F}{\partial u''} \right) - v' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right], \quad \forall v
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0}$$

Exercice : expliquer les étapes

(2) On tire de là que

si $F = F(x, \phi, \phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)})$
 $\phi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \phi(x),$

$$E(F) = 0$$

où

$$E = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial u^{(k)}} \right) \quad u^{(0)} = u \quad (E \text{ est appelé l'opérateur d'Euler})$$

c. cas de plusieurs variables indépendantes

1) $F = F\left(x, y, \phi(x, y), \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

conditions d'admissibilités :

- $\phi \in C_2(\omega), \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^2
- ϕ prend des valeurs fixes sur un compact $k \subset \Omega$

On obtient

$$I(\varepsilon) = \int \int_k F(x, y, u + \varepsilon v_1, \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int \int_k \left[v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})} \right] dx dy$$

Rappel (Formules de Green)

$$\int \int_k (D_x f) g dx dy = \int_c f g dy - \int \int_k f (D_x g) dx dy,$$

$$\int \int_k (D_y f) g dx dy = - \int_c f g dx - \int \int_k f (D_y g) dx dy$$

De là on tire que

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int \int_k v \frac{\partial F}{\partial u} dx dy + \int_c v \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} dy - \int \int_k v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} dx dy - \int_c v \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})} dx - \int \int_k v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})} dx dy$$

La variation de V sur C étant nulle où C est un contour borné délimitant K , la condition

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0 \quad , \forall v$$

implique

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})} \right) = 0$$

2) Si $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la formule précédente se généralise comme suit :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x_k})} \right] = 0$$

Bibliographie

- [1] Lesfari, A. : *Notions fondamentales d'ANALYSE MATHEMATIQUE* (Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés), éditions Ellipses, Paris (2014).
- [2] Piskounov N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome 2
- [3] Osgood Brad, *Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications*, Stanford University
- [4] Exercices de Calcul Intégral à l'usage des premières candidatures Sciences Mathématiques et Physique, Université de Liège, Faculté des Sciences.

JP

« La vie n'est pas d'attendre que les orages passent, c'est d'apprendre comment danser sous la pluie. »

Sénèque