



Université du Burundi  
Institut de Pédagogie Appliquée  
Département de Mathématiques

# Syllabus du cours de Géométrie II

Bac I

Volume horaire: 60 heures

Titulaire: Prof Aboubacar Nibirantiza

Bujumbura, Mars 2025

# Table des Matières

0.1	Contenu-matière . . . . .	5
0.2	Objectif général du cours . . . . .	5
0.3	Objectifs spécifiques . . . . .	5
0.4	Méthodologie d'enseignement . . . . .	6
0.4.1	Présentation du cours . . . . .	6
0.4.2	Travaux pratiques et dirigés . . . . .	6
0.4.3	Syllabus du cours . . . . .	6
0.4.4	Mode d'évaluation . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Développements limités</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	Motivation . . . . .	7
1.2	Formule de Taylor . . . . .	9
1.2.1	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	9
1.2.2	Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ . . . . .	10
1.2.3	Formule de Taylor-Young . . . . .	11
1.2.4	Résumé . . . . .	12
1.3	Exercices . . . . .	14
1.4	Développements limités au voisinage d'un point . . . . .	14
1.4.1	DL des fonctions usuelles à l'origine . . . . .	15
1.4.2	DL des fonctions en un point quelconque . . . . .	15
1.4.3	Opérations sur les DLs . . . . .	16
1.5	Applications des développements limités . . . . .	16
1.5.1	Calcul des limites . . . . .	16
1.5.2	Position d'une courbe par rapport à sa tangente . . . . .	17
1.5.3	Développement limité en $+\infty$ . . . . .	18
1.6	Exercices . . . . .	20

<b>2</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>21</b>
2.1	Notions de base . . . . .	21
2.2	Réduction du domaine d'étude . . . . .	23
2.3	Points multiples . . . . .	28
2.4	Tangente à une courbe paramétrée . . . . .	29
2.4.1	Tangente à une courbe . . . . .	29
2.4.2	Tangente en un point régulier . . . . .	31
2.4.3	Dérivation d'expressions usuelles . . . . .	33
2.5	Points singuliers- Branches infinies . . . . .	35
2.5.1	Tangente en un point singulier . . . . .	35
2.5.2	Position d'une courbe par rapport à sa tangente . . . . .	36
2.6	Branches infinies . . . . .	41
2.7	Exercices non corrigés . . . . .	44
2.8	Plan d'étude d'une courbe paramétrée . . . . .	44
2.8.1	Plan d'étude . . . . .	44
2.8.2	Une étude complète . . . . .	46
2.8.3	Autre façon de définir une courbe . . . . .	53
2.9	Courbes en polaires . . . . .	56
2.9.1	Coordonnées polaires . . . . .	56
2.9.2	Courbes d'équations polaires . . . . .	57
2.9.3	Calcul de la vitesse en polaires . . . . .	59
2.9.4	Tangente en un point distinct de l'origine . . . . .	59
2.9.5	Tangente à l'origine . . . . .	62
2.10	Courbes en polaires: Exemples . . . . .	65
2.10.1	Réduction du domaine d'études . . . . .	65
2.10.2	Plan d'étude . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Coniques</b>	<b>72</b>
3.1	Ellipses, hyperboles, paraboles . . . . .	72
3.1.1	Définition monofocale . . . . .	72
3.2	Étude des paraboles . . . . .	73
3.3	Étude des ellipses . . . . .	75
3.4	Étude des hyperboles . . . . .	78
3.5	Équation polaire d'une conique de foyer $O$ . . . . .	80
3.6	Définition bifocale des ellipses et des hyperboles . . . . .	81
3.7	Définition analytique d'une conique . . . . .	81
3.7.1	Définition . . . . .	81

3.7.2	Réduction de l'équation d'une conique . . . . .	81
3.7.3	Tangente à une conique propre . . . . .	87
3.8	Exercices . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Propriétés métriques des courbes paramétrées</b>	<b>89</b>
4.1	Paramétrage admissible . . . . .	89
4.2	Longueur d'arc paramétré . . . . .	90
4.3	Calcul pratique . . . . .	92
4.3.1	Formules . . . . .	92
4.3.2	Exemples . . . . .	92
4.4	Abscisse curviligne sur un arc orienté . . . . .	93
4.4.1	Arc paramétré orienté . . . . .	93
4.4.2	Abscisse curviligne . . . . .	94
4.5	Paramétrage par abscisse curviligne . . . . .	96
4.6	Courbure d'un arc orienté régulier . . . . .	97
4.6.1	Courbure, rayon de courbure . . . . .	97
4.6.2	Formules de Frénet . . . . .	98
4.6.3	Interprétation cinématique . . . . .	99
4.7	Calculs pratiques en coordonnées cartésiennes . . . . .	100
4.7.1	Abscisse curviligne et repère de Frenet . . . . .	100
4.7.2	Détermination de l'angle $\alpha$ . . . . .	100
4.7.3	Courbure . . . . .	101
4.7.4	Exemples . . . . .	101
4.8	Calcul pratique en coordonnées polaires . . . . .	103
4.8.1	Abscisse curviligne et repère de Frenet . . . . .	103
4.8.2	Détermination de l'angle $\alpha$ . . . . .	103
4.8.3	Courbure en $M(\theta)$ . . . . .	104
4.8.4	Exemples . . . . .	104
4.9	Exercices corrigés . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Introduction aux surfaces régulières</b>	<b>109</b>
5.1	Définitions . . . . .	109
5.2	Exemples . . . . .	110
5.3	Tangente et normale . . . . .	111
5.4	Exemples de surfaces . . . . .	112
5.4.1	Surface coniques . . . . .	112
5.4.2	Surface de révolution . . . . .	112

---

5.5	Quadriques . . . . .	113
5.6	Équation réduite d'une quadrique . . . . .	114
5.7	Quadriques propres . . . . .	117
5.8	Quadriques propres à centres . . . . .	117
5.9	Réduction des équations des quadriques: Calcul pratique . . . . .	120
5.10	Exemples . . . . .	120
5.11	Première et deuxième forme fondamentale . . . . .	123
5.11.1	Première forme fondamentale . . . . .	123
5.11.2	Seconde forme fondamentale . . . . .	130
5.11.3	Courbure normale à une surface régulière . . . . .	133
5.12	Exercices corrigés . . . . .	134
5.13	Exercices non corrigés . . . . .	136
5.14	Directions et courbures principales . . . . .	136
5.15	Exemples . . . . .	139

# Préface

## 0.1 Contenu-matière

Le cours de Géométrie II est un cours de fondements du calcul différentiel élémentaire de la géométrie différentielle. Il est fondé sur l'idéal d'initier les étudiants à faire des calculs variés en utilisant le calcul connu en analyse et algèbre. Il est composé essentiellement de deux grandes parties: les courbes et les surfaces réparties en chapitres suivants: Développements limités, Courbes paramétrées, Coniques, Propriétés métriques des courbes paramétrées, Introduction aux surfaces régulières. On propose à chaque chapitre des exemples à des plusieurs notions, des exercices corrigés et non corrigés.

## 0.2 Objectif général du cours

Faire acquérir aux étudiants les fondements du calcul différentiel élémentaire de la géométrie différentielle.

## 0.3 Objectifs spécifiques

À la fin de l'ECUE, l'étudiant devrait être capable de :

- a) Appliquer les développements limités,
- b) Définir analytiquement les courbes dans le plan,
- c) Résoudre les problèmes relatifs aux courbes du plan ou de l'espace,
- d) Classifier les courbes du plan ou de l'espace,
- e) Calculer la première et la seconde forme fondamentale,

- f) Traiter les questions métriques sur une surface régulière
- g) Déterminer le plan tangent et la normale en un point d'une surface,
- h) Résoudre certains problèmes liés aux quadriques

## 0.4 Méthodologie d'enseignement

### 0.4.1 Présentation du cours

Les grandes lignes de chaque chapitre seront présentées sur Power-Point. Ainsi, on explique brièvement le but de chaque chapitre et son utilité comme outils mathématique. On combine diverses méthodes lors de l'enseignement. Il s'agit des méthodes interactive, participative et expositive.

### 0.4.2 Travaux pratiques et dirigés

On initie les étudiants à faire des calculs variés en rapport avec les chapitres vus dans le cours. On leur demande de vérifier manuellement certaines assertions données dans le texte.

### 0.4.3 Syllabus du cours

Les étudiants seront indiqués où ils peuvent trouver le présent syllabus (numéro d'enregistrement au répertoire des publications)

### 0.4.4 Mode d'évaluation

L'évaluation des acquis est constitué de:

- l'évaluation formative sous forme d'interrogations, de devoirs à domicile ou de travaux pratiques et dirigés qui représente 40% des notes.
- un examen écrit à la fin du semestre qui vaut 60% des notes.

# Chapitre 1

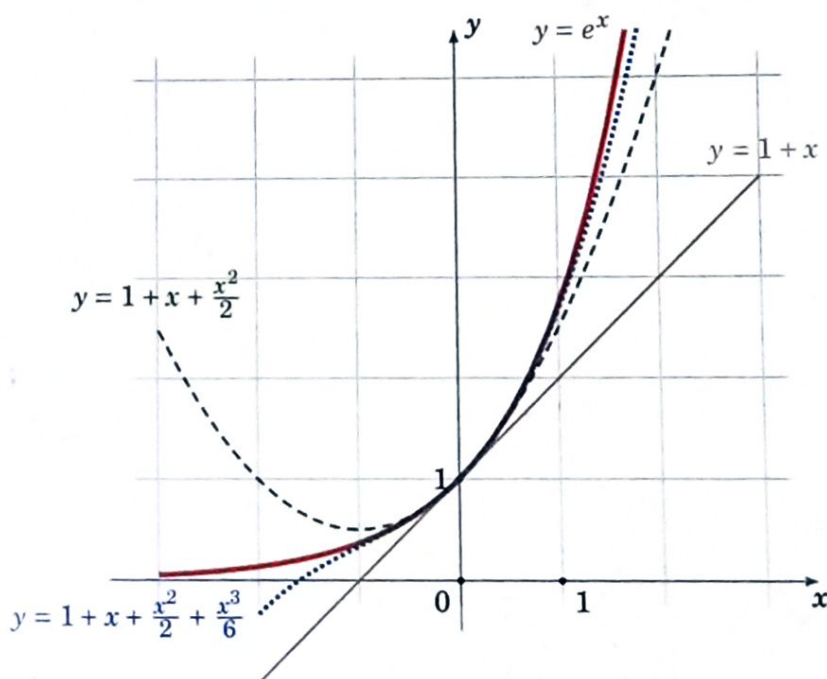
## Développements limités

### 1.1 Motivation

Ce chapitre constitue un rappel des notions vues en analyse I et II. Les démonstrations des théorèmes seront omises ici. Nous commençons par une motivation. Une idée du comportement de la fonction  $f(x) = \exp x$  autour du point  $x = 0$  est donné par sa tangente, dont l'équation est  $y = 1 + x$ . Nous avons approximé le graphe par une droite. Si l'on souhaite faire mieux, quelle parabole d'équation  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$  approche le mieux le graphe de  $f$  autour de  $x = 0$  ? Il s'agit de la parabole d'équation  $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ . Cette équation a la propriété remarquable que si on note

$$g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

alors  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$  et  $g''(0) = 0$ .



Trouver l'équation de cette parabole c'est faire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $f$ . Bien sûr si l'on veut être plus précis, on continuerait avec une courbe du troisième degré qui serait en fait  $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ . Pour n'importe quelle fonction, il est possible donc de trouver le polynôme de degré  $n$  qui approche le mieux la fonction. Les résultats ne sont valables que pour  $x$  autour d'une valeur fixée (ce sera souvent autour de 0). Voici la formule dite formule de Taylor-Young:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

La partie polynomiale  $f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$  est le polynôme de degré  $n$  qui approche le mieux  $f(x)$  autour de  $x = 0$ . La partie  $x^n\varepsilon(x)$  est le «reste» dans lequel  $\varepsilon(x)$  est une fonction qui tend vers 0 (quand  $x$  tend vers 0) et qui est négligeable devant la partie polynomiale.

## 1.2 Formule de Taylor

Nous allons voir trois formules de Taylor, elles auront toutes la même partie polynomiale mais donnent plus ou moins d'informations sur le reste. Nous commencerons par la formule de Taylor avec reste intégral qui donne une expression exacte du reste. Puis la formule de Taylor avec reste  $f^{(n+1)}(c)$  qui permet d'obtenir un encadrement du reste et nous terminons avec la formule de Taylor-Young très pratique si l'on n'a pas besoin d'information sur le reste.

**Définition 1.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^n$  si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)}$  est continue. En particulier,  $f$  est de classe  $C^0$  si  $f$  est continue sur  $I$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^\infty$  si  $f$  est de classe  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $a, x \in I$ . Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

On note  $T_n(x)$  la partie polynomiale de cette formule (elle dépend de  $x$ , de  $f$  et de  $a$ ), c'est-à-dire

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

On remarque que si on pose  $x = a + h$  (et donc  $h = x - a$ ) la formule de Taylor devient pour tout  $a$  et  $a + h$  de  $I$ ,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

**Exemple 1.** La fonction définie par  $f(x) = \exp x$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $I = \mathbb{R}$ . Fixons  $a \in \mathbb{R}$ . Il est facile de voir que l'on a

$$\exp x = \exp a + \exp a.(x-a) + \dots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp t}{n!}(x-t)^n dt.$$

Bien sûr si l'on se place en  $a = 0$  alors on retrouve le début de notre approximation de la fonction exponentielle en  $x = 0$  :

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

### 1.2.2 Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$

**Théorème 2.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $a, x \in I$ . Alors il existe un réel  $c$  entre  $a$  et  $x$  tel que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Exemple 2.** Soient  $a, x \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n \geq 0$  il existe  $c$  entre  $a$  et  $x$  tel que

$$\exp x = \exp a + \exp a.(x-a) + \dots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \frac{\exp c}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas ce  $c$ . Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** Si de plus la fonction  $|f^{(n+1)}|$  est majorée sur  $I$  par un réel  $M$ , alors pour tout  $a, x \in I$ , on a

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Exemple 3.** On va approximer le  $\sin(0,01)$ .

Soit  $f(x) = \sin x$ . Alors  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ . On obtient ainsi  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -1$ . La formule de Taylor ci-dessus en  $a$  à l'ordre 3 devient alors

$$f(x) = 0 + 1.x + 0.\frac{x^2}{2!} - 1.\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{4!},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24},$$

pour un certain  $c$  entre 0 et  $x$ . Appliquons ceci pour  $x = 0,01$ . Le reste étant petit on trouve alors

$$\sin(0,01) \simeq 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,0099998333\dots$$

On peut même savoir quelle est la prévision de cette approximation: comme  $f^{(4)}(x) = \sin x$  alors  $|f^{(4)}(c)| \leq 1$ . Donc  $|f(x) - (x - \frac{x^3}{6})| \leq \frac{x^4}{24}$ . Pour  $x = 0,01$  cela donne  $|\sin(0,01) - (0,01 - \frac{(0,01)^3}{6})| \leq \frac{(0,01)^4}{24}$ . Comme  $\frac{(0,01)^4}{24} \simeq 4,16.10^{(-10)}$  alors notre approximation donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

On remarque ce qui suit:

1. Dans ce théorème l'hypothèse  $f$  de classe  $C^{n+1}$  peut être affaiblie en  $f$  est  $n + 1$  fois dérivable sur  $I$ .
2. Le réel  $c$  est entre  $a$  et  $x$  signifie que  $c \in ]a, x[$  ou  $]x, a[$ .
3. Pour  $n = 0$ , c'est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis: il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$ .
4. Si  $I$  est un intervalle fermé borné et  $f$  de classe  $C^{(n+1)}$ , alors  $f^{(n+1)}$  est continue sur  $I$ , donc il existe un  $M$  tel que  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  pour tout  $x \in I$ . Ce qui permet toujours d'appliquer le corollaire.

### 1.2.3 Formule de Taylor-Young

**Théorème 3.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n+1}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) et soit  $a \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$  on a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction définie sur  $I$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

**Exemple 4.** Soit  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + 1)$ ;  $f$  est infiniment dérivable. En calculant les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres, il est facile de voir qu'on obtient  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$  et donc  $f'(0) = 1$ . Ensuite,

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f^{(2)}(0) = -1, f^{(3)}(x) = +2\frac{1}{(1+x)^3}, f^{(3)}(0) = +2.$$

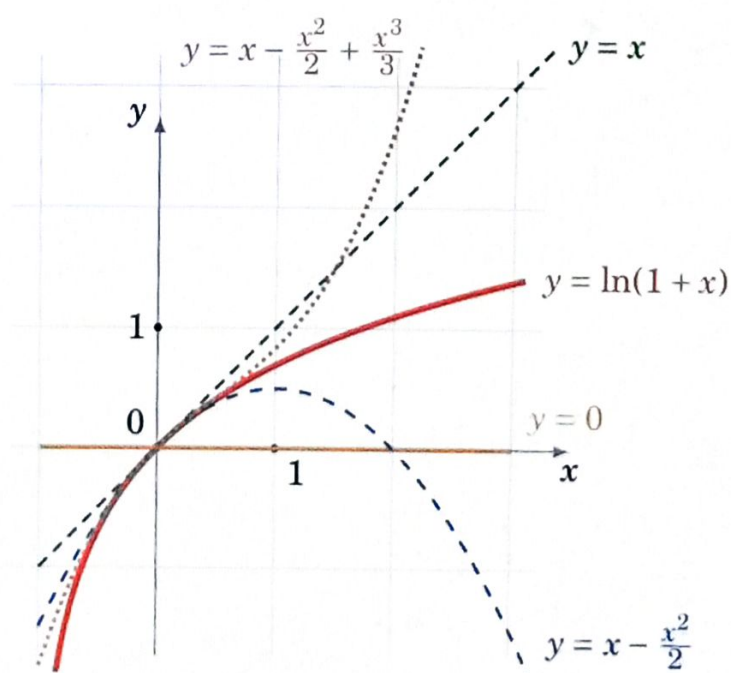
Par récurrence, on peut voir que  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$  et donc que  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ . Ainsi pour

$$n > 0 : \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Voici donc les premiers polynômes de Taylor:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Les formules de Taylor nous disent que les restes sont de plus en plus petits lorsque  $n$  croît. On peut faire les dessins de  $T_0, T_1, T_2, T_3$  et sur ces dessins les graphes des polynômes  $T_0, T_1, T_2, T_3$  s'approchent de plus en plus du graphe de  $f$ . Attention ceci n'est vrai qu'autour de 0.



Pour  $n$  quelconque, nous obtenons que l'on a

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

### 1.2.4 Résumé

Il y a donc trois formules de Taylor qui s'écrivent toutes sous la forme

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

où  $T_n(x)$  est toujours le même polynôme de Taylor

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

C'est l'expression du reste  $R_n(x)$  qui change (attention le reste n'a aucune raison d'être un polynôme).

On a

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \quad \text{Taylor avec reste integral}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{Taylor avec reste, } f^{(n+1)}(c), c \text{ entre } a \text{ et } x$$

$$R_n(x) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{Taylor-Young avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Selon les situations l'une des formulations est plus adaptée que les autres. Bien souvent nous n'avons pas besoin de beaucoup d'informations sur le reste et c'est donc la formule de Taylor-Young qui sera la plus utile.

En notation:

Le terme  $(x-a)^n \varepsilon(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  est souvent abrégé en «petit o» de  $(x-a)^n$  et est noté  $o((x-a)^n)$ . Donc  $o((x-a)^n)$  est une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0.$$

Il faut s'habituer à cette notation qui simplifie les écritures, mais il faut toujours garder à l'esprit ce qu'elle signifie.

**Cas particulier: Formule de Taylor-Young au voisinage de 0.**

On se ramène souvent au cas particulier où  $a = 0$ , la formule de Taylor-Young s'écrit alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

Et avec la notation "petit o" cela donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

### 1.3 Exercices

1. Écrire les trois formules de Taylor en 0 pour les fonctions suivantes

- la fonction  $x \mapsto \cos x$
- la fonction  $x \mapsto \exp(-x)$
- la fonction  $x \mapsto shx$

2. Écrire les formules de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

3. Écrire les formules de Taylor en 1 pour la fonction

$$x \mapsto x^3 - 9x^2 + 14x + 3.$$

### 1.4 Développements limités au voisinage d'un point

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque.

**Définition 2.** Pour  $a$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $f$  admet un développement limité (DL) au point  $a$  et à l'ordre  $n$ , s'il existe des réels  $c_0, c_1, \dots, c_n$  et une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  de sorte que pour tout  $x \in I$ :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

- L'égalité précédente s'appelle un DL de  $f$  au voisinage de  $a$  à l'ordre  $n$ .
- Les termes  $c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n$  sont appelés la partie polynomiale du DL,
- Le terme  $(x - a)^n \varepsilon(x)$  est appelée le reste du DL.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant  $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ . On obtient ainsi la proposition suivante.

**Proposition 1.** Si  $f$  est de classe  $C^n$  au voisinage d'un point  $a$  alors  $f$  admet un DL au point  $a$  à l'ordre  $n$ , qui provient de la formule de Taylor-Young:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x)$$

où  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

On peut voir que si  $f$  admet un DL alors ce DL est unique. On en tire le corollaire suivant

**Corollaire 2.** *Si  $f$  est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

On peut voir par exemple que la fonction  $x \rightarrow \cos x$  est paire et que son DL en 0 ne contient que des monômes pairs

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

### 1.4.1 DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

$$\sinh x = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

Il faut aussi savoir écrire le DL à l'aide des sommes formelles (et ici des «petits o»):

$$\exp x = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

### 1.4.2 DL des fonctions en un point quelconque

La fonction  $f$  admet un DL au voisinage d'un point  $a$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto f(x+a)$  admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables  $h = x - a$ .

**Exemple 5.** La fonction  $f(x) = \exp x$  en 1. On pose  $h = x - 1$ . Si  $x$  est proche de 1 alors  $h$  est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL de  $\exp h$  en  $h = 0$ . On note  $e = \exp 1$ .

$$\begin{aligned} \exp x &= \exp(1 + (x - 1)) = \exp(1) \exp(x - 1) = e \exp h = e \left( 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + h^n \varepsilon(h) \right) \\ &= e \left( 1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x - 1)^n}{n!} + (x - 1)^n \varepsilon(x - 1) \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x - 1) = 0. \end{aligned}$$

### 1.4.3 Opérations sur les DLs

On rappelle qu'on peut effectuer la somme, le produit, la division et la composition des DLs des fonctions qui admettent des DLs en un point. Ceci ne sera pas développées ici.

## 1.5 Applications des développements limités

Voici les applications les plus remarquables des développements limités. On utilisera aussi les DL lors de l'étude locale des courbes paramétrées lorsqu'il y a des points singuliers.

### 1.5.1 Calcul des limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées! Il suffit juste de remarquer que si  $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_0$ .

**Exemple 6.** Limite en 0 de  $\frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$ . Notons  $\frac{f(x)}{g(x)}$  cette fraction. En 0 le calcul montre qu'on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2 x \\ &= \left( x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \left( x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{3}x^4 \right) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

et on a

$$g(x) = 3x^2 \sin^2 x = 3x^2 (x + o(x))^2 = 3x^4 + o(x^4).$$

Ainsi on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)}$$

en notant  $o(1)$  une fonction (inconnue) tendant vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ . Donc on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{36}.$$

Note : En calculant le DL à un ordre inférieur (2 par exemple), on n'aurait pas pu conclure, car on aurait obtenu  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{o(x^2)}{o(x^2)}$ , ce qui ne lève pas l'indétermination. De façon générale, on calcule les DLs à l'ordre le plus bas possible, et si cela ne suffit pas, on augmente progressivement l'ordre (donc la précision de l'approximation).

### 1.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant un DL en  $a$ :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_k(x - a)^k + (x - a)^k \varepsilon(x),$$

où  $k$  est le plus petit entier  $\geq 2$  tel que le coefficient  $c_k$  soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$  est  $y = c_0 + c_1(x - a)$  et la position de la courbe par rapport à la tangente pour  $x$  proche de  $a$  est donnée par le signe  $f(x) - y$ , c'est-à-dire le signe de  $c_k(x - a)^k$ .

Il y a trois cas possibles.

1. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
2. Si le signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.
3. Si le signe change (lorsque l'on passe de  $x < a$  à  $x > a$ ) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse  $a$ . C'est un point d'inflexion.

Comme le DL de  $f$  en  $a$  à l'ordre 2 s'écrit aussi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + (x - a)^2 \varepsilon(x)$$

alors l'équation de la tangente est aussi  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Si en plus  $f''(a) \neq 0$  alors  $f(x) - y$  garde un signe constant autour de  $a$ . En conséquence si  $a$  est un point d'inflexion alors  $f''(a) = 0$ . (La réciproque est fausse.)

**Exemple 7.** Soit  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ .

1. Déterminons la tangente en  $\frac{1}{2}$  du graphe de  $f$  et précisons la position du graphe par rapport à la tangente. Les calculs montrent que le DL de  $f$  en  $\frac{1}{2}$  par la formule de Taylor-Young est

$$f(x) = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2\varepsilon(x).$$

Donc la tangente en  $\frac{1}{2}$  est  $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$  et le graphe de  $f$  est en dessous de la tangente car  $f(x) - y = (-\frac{3}{2} + \varepsilon(x))(x - \frac{1}{2})^2$  est négatif autour de  $x = \frac{1}{2}$ .

2. Déterminons les points d'inflexion. Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de  $f''(x) = 0$ . Donc parmi  $x = 0$  et  $x = 1$ .

- Le DL en 0 est  $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4$  (il s'agit juste d'écrire les monômes par degrés croissants!). L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc  $y = 1$  (une tangente horizontale). Comme  $-2x^3$  change de signe en 0 alors 0 est un point d'inflexion de  $f$ .
- Le DL en 1 : on calcule  $f(1), f'(1), \dots$  pour trouver le DL en 1,

$$f(x) = -2(x - 1) + 2(x - 1)^3 + (x - 1)^4.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc  $y = -2(x - 1)$ . Comme  $2(x - 1)^3$  change de signe en 1, alors 1 est aussi un point d'inflexion de  $f$ .

### 1.5.3 Développement limité en $+\infty$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = ]x_0, +\infty[$ . On dit que  $f$  admet un DL en  $+\infty$  à l'ordre  $n$  s'il existe des réels  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où  $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exemple 8.** Soit  $f$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ . Cela nous permet d'avoir une idée assez précise du comportement de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ . Lorsque  $x \rightarrow +\infty$  alors  $f(x) \rightarrow \ln 2$ . Et le second terme est  $+\frac{1}{2}x$ , donc est positif, cela signifie que la fonction  $f(x)$  tend vers  $\ln 2$  tout en restant au-dessus de  $\ln 2$ .

On remarque que l'on a

1. Un DL en  $+\infty$  s'appelle aussi un développement asymptotique.
2. Dire que la fonction  $x \rightarrow f(x)$  admet un DL en  $+\infty$  à l'ordre  $n$  est équivalent à dire que la fonction  $x \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)$  admet un DL en  $0^+$  à l'ordre  $n$ .
3. On peut définir de même ce qu'est un DL en  $-\infty$ .

**Proposition 2.** On suppose que la fonction  $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$  admet un DL en  $+\infty$  (ou en  $-\infty$ ):

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

où  $k$  est le plus petit entier  $\geq 2$  tel que le coefficient de  $\frac{1}{x^k}$  soit non nul. Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ): la droite  $y = a_0x + a_1$  est une asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de  $f(x) - y$ , c'est-à-dire, le signe de  $\frac{a_k}{x^{k-1}}$ .

**Exemple 9.** Asymptote de  $f(x) = \exp \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$ .

1. En  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \exp \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \exp \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \dots = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Donc l'asymptote de  $f$  en  $+\infty$  est  $y = x + 1$ . Comme

$$f(x) - x - 1 = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand  $x \rightarrow \infty$ , le graphe de  $f$  reste en dessous de l'asymptote.

2. En  $-\infty$ ,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \exp \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \exp \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Donc  $y = -x - 1$  est une asymptote de  $f$  en  $-\infty$ . On a

$$f(x) + x + 1 = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand  $x \rightarrow -\infty$ , le graphe de  $f$  reste au-dessus de l'asymptote.

## 1.6 Exercices

1. Soit  $f(x) = \exp x + \sin x$ . Calculer l'équation de la tangente en  $x = 0$  et la position du graphe. Idem avec  $g(x) = \operatorname{sh} x$ .
2. Soit  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$ . Déterminer l'asymptote en  $+\infty$  et la position du graphe par rapport à cette asymptote.
3. Calculer la limite de  $\frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$  lorsque  $x$  tend vers 1. Idem pour  $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$ .
4. Calculer le DL en  $+\infty$  à l'ordre 5 de  $\frac{x}{x^2-1}$ . Idem à l'ordre 2 de  $(1 + \frac{1}{x})^x$ .

# Chapitre 2

## Courbes paramétrées

Dans ce chapitre nous allons étudier les propriétés fondamentales des courbes paramétrées.

### 2.1 Notions de base

**Définition 3.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $D \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  (ou dans  $\mathbb{R}^3$ ). On note pour  $t \in D$ :

$$f(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{resp. } f(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  (resp.  $x, y$  et  $z$ ) sont appelées **fonctions composantes** de  $f$ .

**Définition 4.** La fonction  $f$  est dérivable si ses fonctions composantes  $x$  et  $y$  (resp.  $x, y$  et  $z$ ) sont dérivables. La dérivée de  $f$  est alors définie par

$$f'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{resp. } f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons en premier lieu, c'est-à-dire aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  (dans le plan), c'est-à-dire, les courbes planes. La définition des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  est similaire.

**Définition 5.** Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Une courbe paramétrée plane ou arc paramétré est une application

$$f : t \mapsto f(t)$$

de  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On peut noter également comme suit

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto M(t)$$

en remplaçant  $f(t)$  par  $M(t)$ .

Notation: En abrégé, on note  $t \mapsto M(t)$  ou bien  $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ . Enfin, en identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , on note aussi  $t \mapsto x(t) + iy(t)$  avec l'identification usuelle entre le point  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  et son affixe  $z(t) = x(t) + iy(t)$ .

Il faut comprendre que  $x$  et  $y$  désignent des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  ou que  $z$  désigne une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{C}$ .

Bref, une courbe paramétrée est une application qui, à un réel  $t$  (paramètre), associe un point du plan.

En prenant  $D$  et  $f$  considérés ci-haut, on peut désigner également une courbe paramétrée par le couple  $(D, f)$ .

**Exemple 10.** 1. L'application  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in D = [0, 2\pi]$ : une paramétrisation du cercle trigonométrique.

2. L'application  $t \mapsto (2t - 3, 3t + 1)$ ,  $t \in D = \mathbb{R}$ : une paramétrisation de la droite passant par le point  $A(-3, 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2, 3)$ .

3. Si  $f$  est une fonction d'un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  une paramétrisation du graphe de  $f$ , c'est-à-dire de la courbe d'équation  $y = f(x)$  est

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

**Définition 6.** Le support d'une courbe paramétrée  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto M(t)$  est l'ensemble des points  $M(t)$  où  $t$  décrit  $D$ .

Néanmoins par la suite, quand cela ne pose pas de problème, nous identifierons ces deux notions en employant le mot courbe pour désigner indifféremment à la fois l'application et son graphe. Des courbes paramétrées différentes peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des courbes:

$$[0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t) \quad \text{et} \quad [0, 4\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

dont le support est un cercle, parcouru une seule fois pour la première paramétrisation et deux fois pour l'autre.

Plus surprenant, la courbe

$$t \mapsto \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), t \in \mathbb{R}$$

est une paramétrisation du cercle trigonométrique privé du point  $(-1, 0)$ , avec des coordonnées qui sont des fractions rationnelles.

**Interprétation cinématique:** La cinématique est l'étude des mouvements. Le paramètre  $t$  s'interprète comme le temps. On affine alors le vocabulaire: la courbe paramétrée s'appelle plutôt *point en mouvement* et le support de cette courbe porte le nom de *trajectoire*. Dans ce cas, on peut dire que  $M(t)$  est la position du point  $M$  à l'instant  $t$ .

## 2.2 Réduction du domaine d'étude

Rappelons tout d'abord l'effet de quelques transformations géométriques usuelles sur le point  $M(x, y)$  ( $x$  et  $y$  désignant les coordonnées de  $M$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  donné).

1. Translation de vecteur  $\vec{u}(a, b)$ : on l'écrit  $t_{\vec{u}}(M) = (x + a, y + b)$ .
2. Réflexion d'axe  $(Ox)$ : on a  $s_{(Ox)}(M) = (x, -y)$ .
3. Réflexion d'axe  $(Oy)$ : on a  $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$ .
4. Symétrie centrale de centre  $O$ : on a  $s_O(M) = (-x, -y)$ .
5. Symétrie centrale de centre  $I(a, b)$ : on a  $s_I(M) = (2a - x, 2b - y)$ .
6. Réflexion d'axe la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ : on a  $s_D(M) = (y, x)$ .
7. Réflexion d'axe la droite  $(D')$  d'équation  $y = -x$ : on a  $s_{D'}(M) = (-y, -x)$ .
8. Rotation d'angle  $\pi/2$  autour de  $O$ : on a  $\text{rot}_{O, \pi/2}(M) = (y, -x)$ .
9. Rotation d'angle  $-\pi/2$  autour de  $O$ : on a  $\text{rot}_{O, -\pi/2}(M) = (-y, x)$ .

Il n'est pas difficile de faire la représentation graphique de quelques-unes de ces transformations. On utilise ces transformations pour réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée. Nous le ferons à travers les exemples suivants.

**Exemple 11.** Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc pour

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin t \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2} \cos t \end{cases}$$

En effet,

- pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $M(t+2\pi) = (t+2\pi - \frac{3}{2} \sin(t+2\pi), 1 - \frac{3}{2} \cos(t+2\pi))$ . En utilisant les formules trigonométriques pour  $\sin(t+2\pi)$  et  $\cos(t+2\pi)$ , il est facile de voir qu'on obtient que

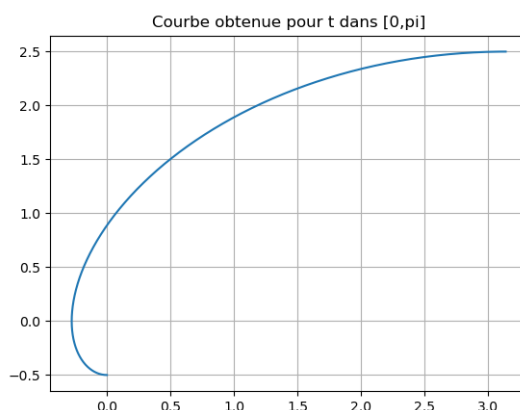
$$M(t+2\pi) = (t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t) + (2\pi, 0) = t_{\vec{u}}(M(t)), \quad \vec{u} = (2\pi, 0).$$

Donc, on étudie l'arc et on en trace le support sur un intervalle de longueur  $2\pi$  au choix, comme  $[-\pi, \pi]$  par exemple, puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs  $k(2\pi, 0) = (2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

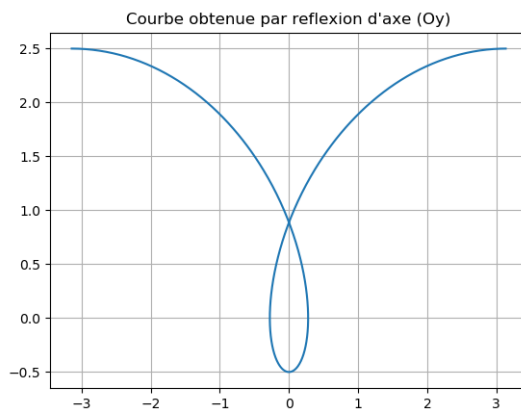
- Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ ,

$$M(-t) = \left( -(t - \frac{3}{2} \sin t), 1 - \frac{3}{2} \cos t \right) = s_{Oy}(M(t)).$$

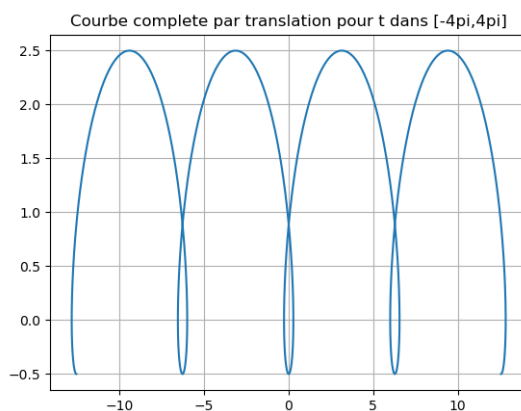
On étudie la courbe et on en trace le support sur  $[0, \pi]$ , i.e,



ensuite on effectue la réflexion d'axe ( $Oy$ )



puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs  $k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , i.e,

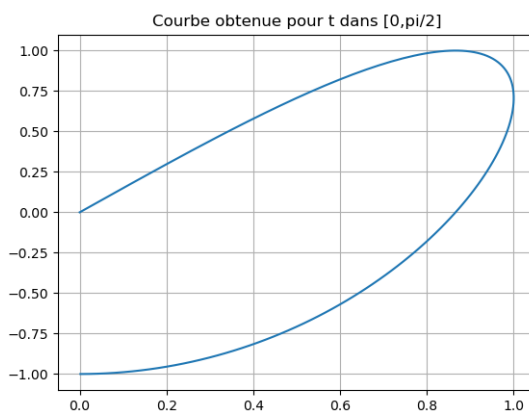


**Exemple 12.** Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible d'une **courbe de Lissajous**:

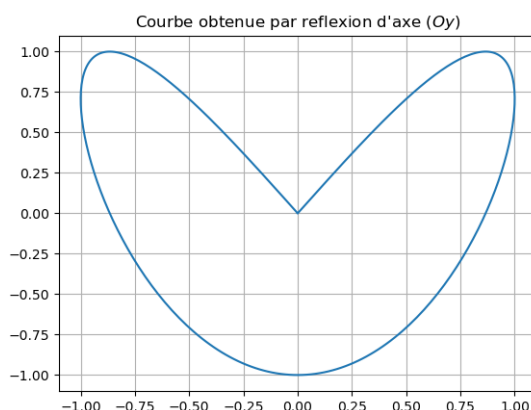
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

En effet,

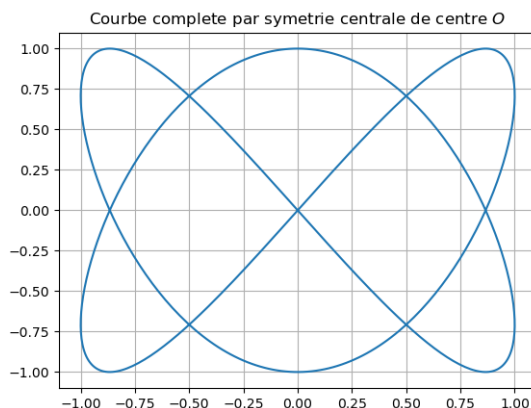
- pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M(t + 2\pi) = M(t)$  et on obtient la courbe complète quand  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$ .
- Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $M(-t) = (-\sin(2t), -\sin(3t)) = s_O(M(t))$ . On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \pi]$ , puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre 0.
- Pour  $t \in [0, \pi]$ ,  $M(\pi - t) = (\sin(2\pi - 2t), \sin(3\pi - 3t)) = (\sin(-2t), \sin(\pi - 3t))$  et au final on a  $(-\sin(2t), \sin(3t)) = s_{(Oy)}(M(t))$ . On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , i.e,



et on effectue la réflexion d'axe ( $Oy$ ) i.e,



puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre  $O$ ; i.e,



**Exemple 13.** Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc

$$z(t) = \frac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it}).$$

En calculant  $z(t + \frac{2\pi}{3})$ , trouver une transformation géométrique simple laissant la courbe globalement invariante.

En effet,

- pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z(t + 2\pi) = \frac{1}{3}(2e^{i(t+2\pi)} + e^{-2i(t+2\pi)}) = \frac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it}) = z(t)$ . La courbe complète est obtenue quand  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$ .
- Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ , on a

$$z(-t) = \frac{1}{3}(2e^{-it} + e^{2it}) = \overline{\frac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it})} = \overline{z(t)}.$$

Donc, on étudie et on construit la courbe quand  $t$  décrit  $[0, \pi]$ , la courbe complète étant alors obtenue par réflexion d'axe  $(Ox)$  (qui correspond à la conjugaison).

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{3} \left( 2e^{i\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-2i\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 2e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{it} + e^{-\frac{4i\pi}{3}} e^{-2it} \right) \\ &= e^{\frac{2i\pi}{3}} z(t). \end{aligned}$$

Le point  $M(t + \frac{2\pi}{3})$  est donc l'image du point  $M(t)$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . La courbe complète est ainsi invariante par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

## 2.3 Points multiples

**Définition 7.** Soit  $f : t \mapsto M(t)$  une courbe paramétrée et soit  $A$  un point du plan. La multiplicité du point  $A$  par rapport à la courbe  $f$  est le nombre de réels  $t$  pour lesquels  $M(t) = A$ .

En termes plus savants : la multiplicité du point  $A$  par rapport à l'arc  $f$  est  $\text{Card}(f^{-1}(A))$ .

- Si  $A$  est atteint une et une seule fois, sa multiplicité est 1 et on dit que le point  $A$  est un **point simple** de la courbe.
- Si  $A$  est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, on dit que  $A$  est un **point double** de la courbe.
- On parle de même **de points triples, quadruples, . . . , multiples** (dès que le point est atteint au moins deux fois).
- Une courbe dont tous les points sont simples est appelée **une courbe paramétrée simple**. Il revient au même de dire que l'application  $t \rightarrow M(t)$  est injective.

Une question se pose alors: Comment trouver les points multiples?

**Pour trouver les points multiples d'une courbe, on cherche les couples  $(t, u) \in D^2$  tels que  $t > u$  et  $M(t) = M(u)$ .**

On se limite au couple  $(t, u)$  avec  $t > u$  afin de ne pas compter la solution redondante  $(u, t)$  en plus de  $(t, u)$ .

**Exemple 14.** Trouver les points multiples de l'arc

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

En effet, soit  $(t, u) \in (\mathbb{R}^*)^2$  tel que  $t > u$ . On résout le système d'équations

$$M(t) = M(u) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + t^2 = 2u + u^2 \\ 2t - \frac{1}{t^2} = 2u - \frac{1}{u^2} \end{cases}$$

Une résolution simple nous donne

$$M(t) = M(u) \Leftrightarrow \begin{cases} (t-u)(t+u+2) = 0 \\ (t-u)\left(2 + \frac{t+u}{t^2u^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Comme  $t - u \neq 0$  cela donne encore le système suivant

$$M(t) = M(u) \Leftrightarrow \begin{cases} t + u + 2 = 0 \\ 2 + \frac{t+u}{t^2u^2} = 0 \end{cases}$$

En posant  $S = t + u$  et  $P = tu$ , on écrit encore

$$M(t) = M(u) \Leftrightarrow \begin{cases} S + 2 = 0 \\ 2 + \frac{S}{P^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = -2 \\ P = -1 \end{cases}$$

Cela équivaut à dire que  $t$  et  $u$  sont les deux solutions de  $X^2 + 2X + 1 = 0$  ou  $X^2 + 2X - 1 = 0$  (rappelons le trinôme  $X^2 - SX + P = 0$ ) c'est à dire, (à cause du fait que  $t > u$ ), on a

$$\begin{cases} t = -1 + \sqrt{2} \\ u = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Il reste à déterminer où est ce point double  $M(t) = M(u)$ . On fixe  $t = -1 + \sqrt{2}$  et  $u = -1 - \sqrt{2}$ . De plus  $x(t) = t^2 + 2t = 1$  puisque pour cette valeur de  $t$ ,  $t^2 + 2t - 1 = 0$ . Le calcul simple nous montre qu'on obtient  $x(t) = 1$  et  $y(t) = -5$ . **Ainsi la courbe admet un point double, au point de coordonnées  $(1, -5)$ .**

## 2.4 Tangente à une courbe paramétrée

### 2.4.1 Tangente à une courbe

Soit  $f : t \mapsto M(t)$ ,  $t \in D \subset \mathbb{R}$  une courbe. Soit  $t_0 \in D$ . On veut définir la tangente en  $M(t_0)$ .

On doit déjà prendre garde au fait que lorsque ce point  $M(t_0)$  est un point multiple de la courbe, alors la courbe peut tout à fait avoir plusieurs tangentes en ce point. Pour éviter cela, on supposera que la courbe est **localement simple en  $t_0$** , c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert non vide  $I$  de centre  $t_0$  tel que l'équation  $M(t) = M(t_0)$  admette une et une seule solution dans  $D \cap I$ , à savoir  $t = t_0$ . Il revient au même de dire que l'application  $t \rightarrow M(t)$  est **localement injective**. Dans tout ce paragraphe, nous supposons systématiquement que cette condition est réalisée.

**Définition 8.** On dit que la courbe admet une tangente en  $M(t_0)$  si la droite  $(M(t_0)M(t))$  admet une position limite quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Dans ce cas, la droite limite est la tangente en  $M(t_0)$ .

On sait déjà que la tangente en  $M(t_0)$ , quand elle existe, passe par le point  $M(t_0)$ . Mais il nous manque sa direction. Pour  $t_0 \neq t$ , un vecteur directeur de la droite  $(M(t_0)M(t))$  est le vecteur

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}$$

(rappelons que ce vecteur est supposé non nul pour  $t$  proche de  $t_0$  et distinct de  $t_0$ ). Quand  $t$  tend vers  $t_0$ , les coordonnées de ce vecteur tendent vers 0 ; autrement dit le vecteur  $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$  tend (malheureusement) vers 0. Le vecteur nul n'indique aucune direction particulière et nous ne connaissons toujours pas la direction limite de la droite  $(M(t_0)M(t))$ . Profitons-en néanmoins pour définir la notion de limite et de continuité d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 9.** Soit  $f : t \mapsto M(t)$ ,  $t \in D \subset \mathbb{R}$  une courbe et soit  $t_0 \in D$ . La courbe est continue en  $t_0$  si et seulement si les fonctions  $x$  et  $y$  sont continues en  $t_0$ . La courbe est continue sur  $D$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $D$ .

En d'autres termes la courbe est continue en  $t_0$  si et seulement si  $x(t) \rightarrow x(t_0)$  et  $y(t) \rightarrow y(t_0)$ , lorsque  $t \rightarrow t_0$ . Revenons maintenant à notre tangente. Un autre vecteur directeur de la droite  $(M(t_0)M(t))$  est le vecteur

$$\frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$$

On a multiplié le vecteur  $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$  par le réel  $\frac{1}{t - t_0}$ . Remarquons que chaque coordonnée de ce vecteur est un taux d'accroissement, dont on cherche la limite. D'où la définition suivante.

**Définition 10.** Soit  $f : t \mapsto M(t)$ ,  $t \in D \subset \mathbb{R}$  une courbe et soit  $t_0 \in D$ . La courbe est dérivable en  $t_0$  si et seulement si les fonctions  $x$  et  $y$  le sont. Dans ce cas, le vecteur dérivé de la courbe en  $t_0$  est le vecteur  $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ . Ce vecteur se note  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$ .

Cette notation se justifie car dans le vecteur  $\overrightarrow{\frac{1}{t-t_0}M(t_0)M(t)}$ , dont on cherche la limite,  $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$  peut s'écrire (on rappelle qu'une différence de deux points  $B - A$  est un vecteur  $\overrightarrow{AB}$ ). Ainsi:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = \frac{\overrightarrow{\text{différence infinitésimale de } \vec{M}}}{\overrightarrow{\text{différence infinitésimale de } t}} \text{ en } t_0.$$

## 2.4.2 Tangente en un point régulier

Si le vecteur dérivé  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$  n'est pas nul, celui-ci indique effectivement la direction limite de la droite  $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ . Nous étudierons plus tard le cas où le vecteur dérivé est nul.

**Définition 11.** Soit  $t \rightarrow M(t), t \in D \subset \mathbb{R}$ , une courbe dérivable sur  $D$  et soit  $t_0$  un réel de  $D$ .

1. Si  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{O}$ , le point  $M(t_0)$  est dit **régulier**.
2. Si  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = \vec{O}$ , le point  $M(t_0)$  est dit **singulier**.
3. Une courbe dont tous les points sont réguliers est appelée **courbe régulière**.

### Interprétation cinématique.

Si  $t$  est le temps, le vecteur dérivé  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$  est le vecteur vitesse au point  $M(t_0)$ . Un point singulier, c'est-à-dire un point en lequel la vitesse est nulle, s'appellera alors plus volontiers **point stationnaire**. D'un point de vue cinématique, il est logique que le vecteur vitesse en un point, quand il est non nul, dirige la tangente à la trajectoire en ce point. C'est ce qu'exprime le théorème suivant, qui découle directement de notre étude du vecteur dérivé:

**Théorème 4.** En tout point régulier d'une courbe dérivable, cette courbe admet une tangente. La tangente en un point régulier est dirigée par le vecteur dérivé en ce point.

Si  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{O}$ , une équation de la tangente  $T_0$  en  $M(t_0)$  est donc fournie par

$$M(x,y) \in T_0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

**Exemple 15.** Trouver les points où la tangente à la courbe de Lissajous

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t), \quad t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

est verticale, puis horizontale.

En effet, par symétries, on limite notre étude sur  $t \in [0, \pi/2]$ . Or au point  $M(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ , le vecteur dérivé est

$$\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix}$$

Quand est-ce que la première coordonnée de ce vecteur dérivé est nul (sur  $t \in [0, \pi/2]$ )? On a donc

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Et pour la seconde, on

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 3 \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Les deux coordonnées ne s'annulent jamais en même temps, donc le vecteur dérivé n'est jamais nul, ce qui prouve que tous les points sont réguliers, et le vecteur dérivé dirige la tangente. La tangente est verticale lorsque le vecteur dérivé est vertical, ce qui équivaut à  $x'_0(t) = 0$ , autrement dit en  $M(\pi/4)$ . La tangente est horizontale lorsque le vecteur dérivé est horizontal, ce qui équivaut à  $y'_0(t) = 0$ , autrement dit en  $M(\pi/6)$  et en  $M(\pi/2)$ .

On obtient deux tangentes en  $M(\pi/6)$  et en  $M(\pi/2)$  et on trouve les autres tangentes horizontales et verticales par symétries. On remarque que:

- Une courbe peut avoir une tangente verticale, contrairement à ce à quoi on est habitué pour les graphes de fonctions du type  $y = f(x)$ .
- Par contre dans le cas d'une paramétrisation cartésienne du type

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

qui est une paramétrisation du graphe de la fonction (où cette fois-ci  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ), le vecteur dérivé en  $t_0 = x_0$  est  $(1, f'_0(x_0))$ . Celui-ci n'est jamais nul puisque sa première coordonnée est non nulle. Ainsi, une paramétrisation cartésienne dérivable est toujours régulière. De plus, pour la même raison, ce vecteur n'est jamais vertical.

### 2.4.3 Dérivation d'expressions usuelles

On généralise un peu l'étude précédente. Voici comment dériver le produit scalaire de deux fonctions vectorielles ainsi que la norme.

**Théorème 5.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications définies sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et soit  $t_0 \in D$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $t_0$ . Alors:

1. l'application  $t \mapsto \langle \overrightarrow{f(t)}, \overrightarrow{g(t)} \rangle$  est dérivable en  $t_0$  et

$$\frac{d\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle}{dt}(t_0) = \left\langle \frac{d\overrightarrow{f}}{dt}(t_0), \overrightarrow{g(t_0)} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{f(t_0)}, \frac{d\overrightarrow{g}}{dt}(t_0) \right\rangle.$$

2. Si  $\overrightarrow{f(t_0)} \neq 0$ , l'application  $t \mapsto \|\overrightarrow{f(t)}\|$  est dérivable en  $t_0$  et, dans ce cas,

$$\frac{d\|\overrightarrow{f}\|}{dt}(t_0) = \frac{\langle \overrightarrow{f(t_0)}, \frac{d\overrightarrow{f}}{dt}(t_0) \rangle}{\|\overrightarrow{f(t_0)}\|}.$$

*Démonstration.* Le produit scalaire et la norme sont des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Soient  $\overrightarrow{f} = (x_1, y_1)$  et  $\overrightarrow{g} = (x_2, y_2)$ . Alors  $\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$  est dérivable en  $t_0$  et un calcul simple montre qu'on obtient

$$\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle'(t_0) = (x_1x_2 + y_1y_2)'(t_0) = \langle \overrightarrow{f}', \overrightarrow{g} \rangle(t_0) + \langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}' \rangle(t_0).$$

2. La fonction  $\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{f} \rangle$  est positive, strictement positive en  $t_0$  et est dérivable en  $t_0$ . D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, la fonction  $\|\overrightarrow{f}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{f} \rangle}$  est dérivable en  $t_0$  et voir que

$$(\|\overrightarrow{f}\|)'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{f} \rangle}} (\langle \overrightarrow{f}', \overrightarrow{f} \rangle + \langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{f}' \rangle)(t_0) = \frac{\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{f}' \rangle}{\|\overrightarrow{f}\|}(t_0).$$

□

**Exemple 16.** Si  $t \mapsto M(t) = (\cos t, \sin t)$  une paramétrisation du cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Pour tout réel  $t$ , on a  $\|\overrightarrow{OM}(t)\| = 1$ . En dérivant cette fonction constante, on obtient pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\left\langle \overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\rangle = 0$  (voir point 2 du théorème 5) et on retrouve le fait que la tangente au cercle au point  $M(t)$  est orthogonale au rayon  $\overrightarrow{OM}(t)$ .

**Théorème 6.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications définies sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda$  une application de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $t_0 \in D$ . On suppose que  $f, g$  et  $\lambda$  sont dérivables en  $t_0$ . Alors  $f + g$  et  $\lambda f$  sont dérivables en  $t_0$ , et

$$\frac{d(\overrightarrow{f+g})}{dt}(t_0) = \frac{d\overrightarrow{f}}{dt}(t_0) + \frac{d\overrightarrow{g}}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad \frac{d(\lambda \cdot \overrightarrow{f})}{dt}(t_0) = \lambda'(t_0)\overrightarrow{f}(t_0) + \lambda(t_0)\frac{d\overrightarrow{f}}{dt}(t_0).$$

*Démonstration.* En utilisant les coordonnées  $\overrightarrow{f} = (x_1, y_1)$  et  $\overrightarrow{g} = (x_2, y_2)$ , il est facile d'établir ces résultats (**Laissé aux étudiants comme DAD**).  $\square$

En travaillant toujours avec les coordonnées, on établit aisément que:

**Théorème 7.** Soient  $t \mapsto \theta(t)$  une application dérivable sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un domaine  $D'$  de  $\mathbb{R}$  et  $u \mapsto f(u)$  une application dérivable sur  $D'$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $f \circ \theta$  est dérivable sur  $D$  et, pour  $t_0 \in D$ ,

$$\frac{d(f \circ \theta)}{dt}(t_0) = \theta'(t_0) \cdot \frac{df}{d\theta}(\theta(t_0)).$$

## Exercices

1. Soit la courbe définie par  $x(t) = t^5 - 4t^3, y(t) = t^2$ . Calculer le vecteur dérivé en chaque point. Déterminer le point singulier. Calculer une équation de la tangente au point  $(3, 1)$ . Calculer les équations de deux tangentes au point  $(0, 4)$ .
2. Soit  $f$  une fonction dérivable de  $D \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la dérivée de l'application

$$t \mapsto \|f(t)\|^2.$$

3. Calculer le vecteur dérivé en tout point de l'astroïde définie par

$$x(t) = \cos(3t), y(t) = \sin(3t).$$

Quels sont les points singuliers ? Trouver une expression simple pour la pente de tangente en un point régulier.

4. Calculer le vecteur dérivé en tout point de la cycloïde définie par

$$x(t) = r(t - \sin t), y(t) = r(1 - \cos t).$$

Quels sont les points singuliers ? En quels points la tangente est-elle horizontale ?  
En quels points la tangente est-elle parallèle à la bissectrice d'équation ( $y = x$ ) ?

## 2.5 Points singuliers- Branches infinies

### 2.5.1 Tangente en un point singulier

Rappelons qu'un point  $M(t_0)$  d'une courbe paramétrée  $M(t) = (x(t), y(t))$  est dit point singulier si le vecteur dérivé en ce point est nul, c'est-à-dire si  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = \vec{0}$ , ou autrement dit si  $(x'(t), y'(t)) = (0, 0)$ . Lorsque le vecteur dérivé est nul, il n'est d'aucune utilité pour la recherche d'une tangente. Pour obtenir une éventuelle tangente en un point singulier, le plus immédiat est de revenir à la définition en étudiant la direction limite de la droite  $(M(t_0)M(t))$ , par exemple en étudiant la limite du coefficient directeur de cette droite dans le cas où cette droite n'est pas parallèle à  $(Oy)$ . En supposant que c'est le cas :

**En un point  $M(t_0)$  singulier, on étudie  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ .**

**Si cette limite est un réel  $l$ , la tangente en  $M(t_0)$  existe et a pour coefficient directeur  $l$ .**

**Si cette limite existe mais est infinie, la tangente en  $M(t_0)$  existe et est parallèle à  $(Oy)$ .**

**Exemple 17.** *Trouver les points singuliers de la courbe*

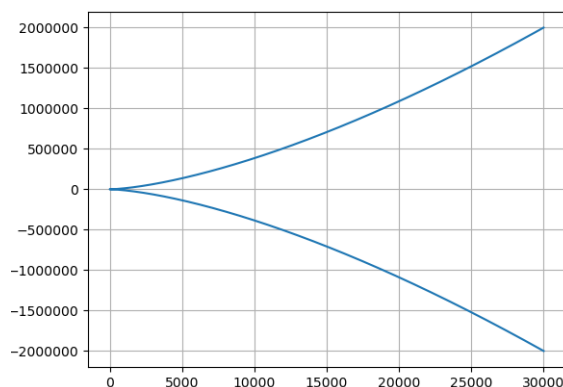
$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}.$$

*Donner une équation cartésienne de la tangente en tout point de la courbe.*

En effet,

- le vecteur dérivé s'obtient en calculant pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$ . Ce vecteur est nul si et seulement si  $6t = 6t^2 = 0$ , c'est-à-dire si  $t = 0$ . Tous les points de la courbe sont réguliers, à l'exception de  $M(0)$ .

- Pour la tangente en  $M(0)$ : pour  $t = 0$ ,  $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{2t^3}{3t^2} = \frac{2t}{3}$ . Quand  $t$  tend vers 0, cette expression tend vers 0. L'arc admet une tangente en  $M(0)$  et cette tangente est la droite passant par  $M(0) = (0,0)$  et de pente 0: c'est l'axe ( $0x$ ) d'équation  $y = 0$ .
- Pour la tangente en  $M(t)$ ,  $t \neq 0$ : pour  $t \in \mathbb{R}^*$ , la courbe admet en  $M(t)$  une tangente dirigée par  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$  ou aussi par le vecteur  $\frac{1}{6t} \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ . Une équation de la tangente en  $M(t)$  est donc  $t(x - 3t^2) - (y - 2t^3) = 0$  ou encore  $y = tx - t^3$  (ce qui reste valable en  $t = 0$ ). Il faut savoir que la courbe est la suivante:

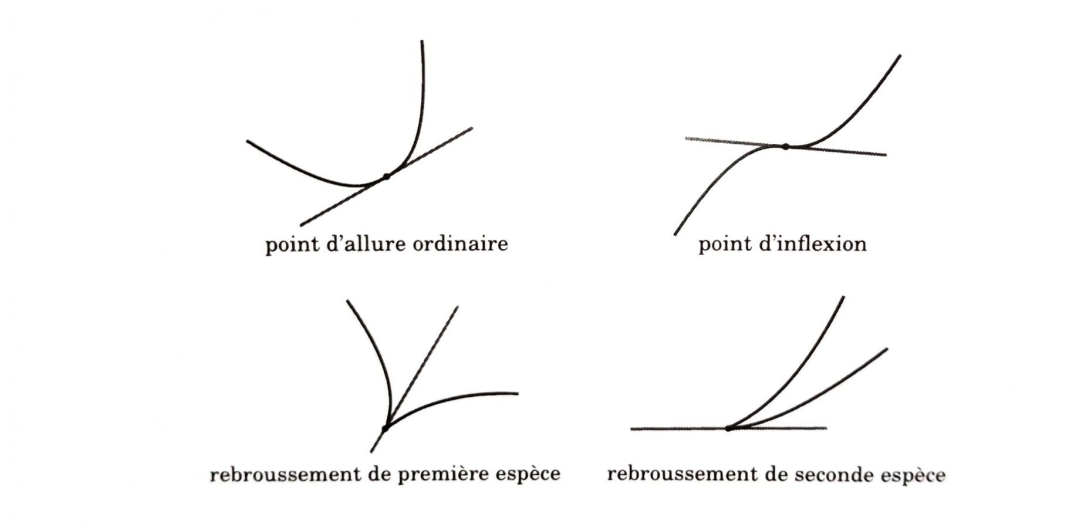


## 2.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Quand la courbe arrive en  $M(t_0)$ , le long de sa tangente, on a plusieurs possibilités:

- la courbe continue dans le même sens, sans traverser la tangente :c'est un **point d'allure ordinaire**,
- la courbe continue dans le même sens, en traversant la tangente :c'est un **point d'inflexion**,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette tangente en la traversant, c'est un **point de rebroussement de première espèce**,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette tangente sans la traverser,c'est un **point de rebroussement de seconde espèce**.

Ces quatre cas sont illustrés par les schémas suivants:



Intuitivement, on ne peut rencontrer des points de rebroussement qu'en un point stationnaire, car en un point où la vitesse est non nulle, on continue son chemin dans le même sens.

Pour déterminer de façon systématique la position de la courbe par rapport à sa tangente en un point singulier  $M(t_0)$ , on effectue un développement limité des coordonnées de  $M(t) = (x(t), y(t))$  au voisinage de  $t = t_0$ . Pour simplifier l'expression on suppose  $t_0 = 0$ . On écrit

$$M(t) = M(0) + t^p \vec{v} + t^q \vec{w} + t^q \vec{\varepsilon}(t)$$

où

- $p < q$  sont des entiers
- $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs non colinéaires
- $\vec{\varepsilon}(t)$  est un vecteur tel que  $\|\vec{\varepsilon}(t)\| \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

En un tel point  $M(0)$ , la courbe  $C$  admet une tangente, dont un vecteur directeur de la courbe  $C$  par rapport à cette tangente est donnée par la parité de  $p$  et  $q$ :

- Si  $p$  est impair et  $q$  pair, alors on a **un point d'allure ordinaire**
- Si  $p$  est impair et  $q$  impair, alors on a **un point d'inflexion**
- si  $p$  est pair et  $q$  impair, alors on a **un point de rebroussement de première espèce**
- si  $p$  est pair et  $q$  pair, alors on a **un point de rebroussement de seconde espèce**

Prenons par exemple  $M(t) = t^2\vec{v} + t^5\vec{w}$ . Donc  $p = 2$  et  $q = 5$ . Lorsque  $t$  passe d'une valeur négative à positive,  $t^2$  s'annule mais en restant positif, donc la courbe arrive au point le long de la tangente (dirigée par  $\vec{v}$ ) et rebrousse chemin en sens inverse. Par contre  $t^5$  change de signe, donc la courbe franchit la tangente au point singulier. C'est bien un point de rebroussement de première espèce.

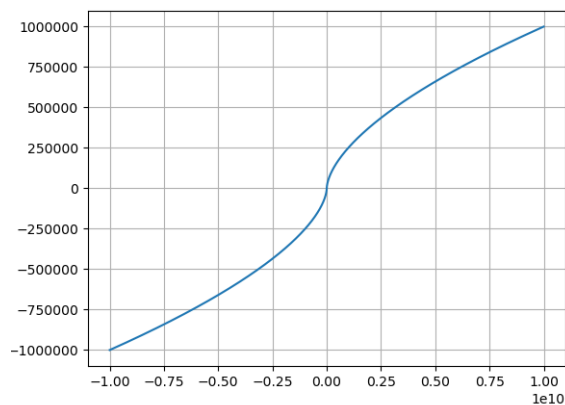
**Exemple 18.** *Étudier le point singulier à l'origine de*

$$\begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

En effet, en  $M(0) = (0, 0)$ , il y a bien un point singulier. On écrit

$$M(t) = t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $p = 3, q = 5, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La tangente, dirigée par  $\vec{v}$  est verticale à l'origine. Comme  $p = 3$  est impair alors  $t^3$  change de signe en 0, donc la courbe continue le long de la tangente, et comme  $q = 5$  est aussi impair, la courbe franchit la tangente au point singulier. C'est un point d'inflexion. Voici la figure ci-dessous:



**Exemple 19.** Étudier le point singulier à l'origine de

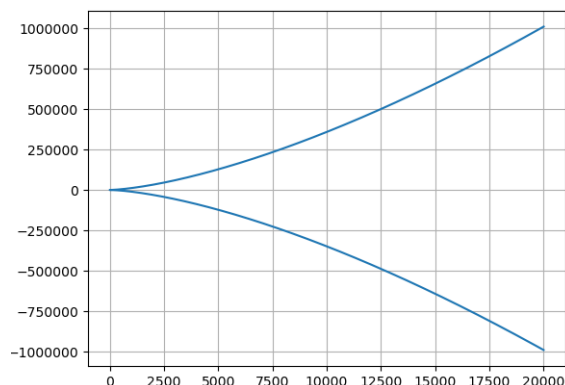
$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{cases}$$

En effet, en  $M(0) = (0, 0)$ , il y a bien un point singulier. On écrit

$$M(t) = t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $p = 2, q = 3, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $p = 2, q = 3, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

C'est un point de rebroussement de première espèce.



**Exemple 20.** Étudier le point singulier à l'origine de

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 2t^4 \end{cases}$$

On écrit

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc  $p = 2$  avec  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , par contre le vecteur  $v' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  est colinéaire à  $\vec{v}$ , donc  $q = 4$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . C'est un point de rebroussement de seconde espèce.

**Exemple 21.** Étudier le point singulier à l'origine de

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \ln(1+t) \\ y(t) = t^2(\exp(t^2) - 1) \end{cases}$$

En effet, on écrit les DLs de  $x(t)$  et de  $y(t)$  qui sont

$$x(t) = t^3 - \frac{t^4}{2} + t^4 \varepsilon_1(t)$$

et

$$y(t) = t^4 + t^4 \varepsilon_2(t)$$

et ainsi

$$M(t) = t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \vec{\varepsilon}(t)$$

On a donc  $p = 3, q = 4$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . C'est un point d'allure ordinaire.

## 2.6 Branches infinies

Dans ce paragraphe, la courbe  $f : t \mapsto M(t)$  est définie sur un intervalle  $D$  de  $\mathbb{R}$ . On note aussi  $C$  la courbe et  $t_0$  désigne l'une des bornes de  $D$  et n'est pas dans  $D$  ( $t_0$  est soit un réel, soit  $-\infty$ , soit  $+\infty$ ).

**Définition 12.** *Il y a branche infinie en  $t_0$  dès que l'une des deux fonctions  $|x|$  ou  $|y|$  tend vers l'infini quant  $t$  tend vers  $t_0$ . Il revient au même de dire que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$ .*

Pour chaque branche infinie, on cherche s'il existe une asymptote, c'est-à-dire une droite qui approxime cette branche infinie. La droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $C$  si  $y(t) - (ax(t) + b) \rightarrow 0$ , lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

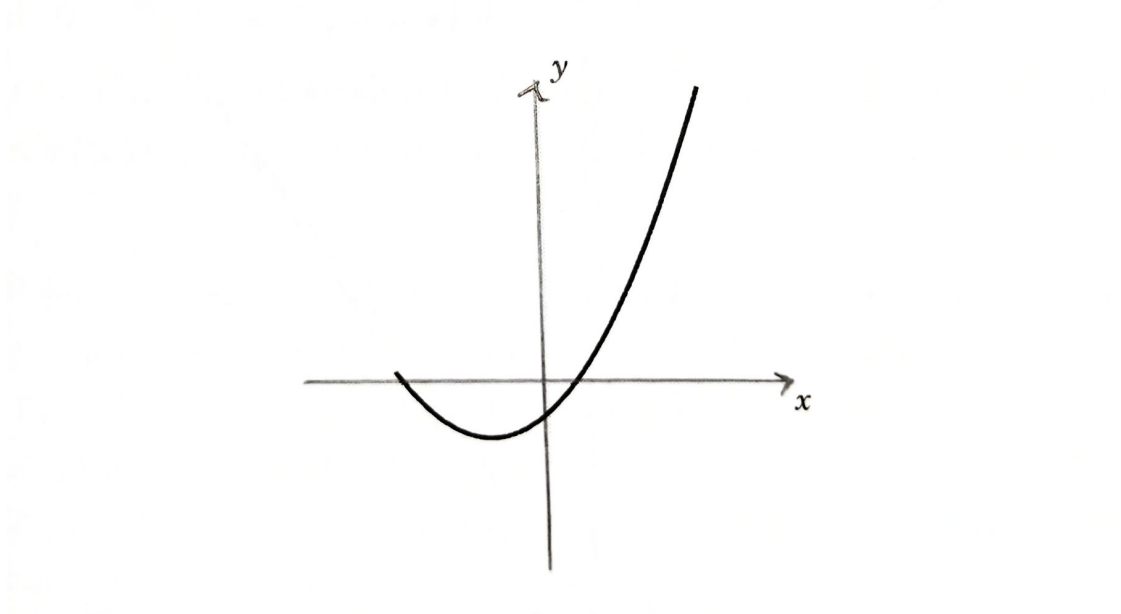
Dans la pratique, on mène l'étude suivante:

1. Si, quand  $t$  tend vers  $t_0$ ,  $x(t)$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $y(t)$  tend vers un réel  $l$ , la droite d'équation  $y = l$  est **asymptote horizontale à  $C$** .
2. Si, quand  $t$  tend vers  $t_0$ ,  $y(t)$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $x(t)$  tend vers un réel  $l$ , la droite d'équation  $x = l$  est **asymptote verticale à  $C$** .
3. Si, quand  $t$  tend vers  $t_0$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  tendent vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) il faut affiner. On étudie la limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$  avec des sous-cas suivants:
  - (a) Si  $\frac{y(t)}{x(t)}$  tend vers 0, la courbe admet **branche parabolique** de direction asymptotique d'équation  $y = 0$  (mais il n'y a pas d'asymptote).
  - (b) Si  $\frac{y(t)}{x(t)}$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ , la courbe admet **branche parabolique** de direction asymptotique d'équation  $x = 0$  (mais il n'y a pas d'asymptote).
  - (c) Si  $\frac{y(t)}{x(t)}$  tend vers un réel non nul  $a$ , la courbe admet **branche parabolique** de direction asymptotique d'équation  $y = ax$ .

Il faut encore affiner l'étude. On étudie alors la limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t))$  avec les deux-sous cas:

- \* Si l'expression  $y(t) - ax(t)$  tend vers un réel  $b$  (nul ou pas) alors la limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - (ax(t) + b)) = 0$  et la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote oblique**.
- \* Si  $y(t) - ax(t)$  tend vers  $\pm\infty$ , ou n'a pas de limite, la courbe n'a qu'une direction asymptotique d'équation  $y = ax$ , mais n'admet pas de droite asymptote

Une branche parabolique peut ne pas admettre de droite asymptote, comme dans le cas d'une parabole:



**Exemple 22.** Étudier les asymptotes de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^2-1} \end{cases}$$

Déterminer la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

En effet, on peut faire l'étude en étapes suivantes:

1. Pour les branches infinies. La courbe est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ . Il y a 4 branches infinies correspondant à  $-1^-$ ,  $-1^+$ ,  $+1^-$ ,  $+1^+$ .

2. **Étude en  $-1^-$** : Lorsque  $t \rightarrow -1^-$ , alors  $x(t) \rightarrow \frac{1}{2}$  et  $y(t) \rightarrow -\infty$ : la droite verticale  $x = \frac{1}{2}$  est asymptote pour cette branche infinie (qui part cette fois vers le bas)
3. **Étude en  $-1^+$** : Lorsque  $t \rightarrow -1^+$ , alors  $x(t) \rightarrow \frac{1}{2}$  et  $y(t) \rightarrow +\infty$ : la droite verticale  $x = \frac{1}{2}$  est asymptote pour cette branche infinie (qui part cette fois vers le haut)
4. **Étude en  $+1^-$** : Lorsque  $t \rightarrow +1^-$ , alors  $x(t) \rightarrow -\infty$  et  $y(t) \rightarrow -\infty$ : on cherche une asymptote oblique en calculant la limite de  $\frac{y(t)}{x(t)}$ :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3t}{t^2-1}}{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{3}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

On cherche si  $y(t) - \frac{3}{2}x(t)$  admet une limite finie, lorsque  $t \rightarrow +1^-$ :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (y(t) - \frac{3}{2}x(t)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\frac{3t}{t^2-1} - \frac{3}{2} \frac{t}{t-1}] = \lim_{t \rightarrow 1^-} (-\frac{3t}{2(t+1)}) = -\frac{3}{4}.$$

Ainsi la droite d'équation  $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$  est asymptote à cette branche infinie.

5. **Étude en  $+1^+$** . Les calculs sont similaires et la même droite d'équation  $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$  est asymptote à cette autre branche infinie.
6. **Position par rapport à l'asymptote verticale.** Il s'agit de déterminer le signe de  $x(t) - \frac{1}{2}$  lorsque  $x \rightarrow -1^-$  (puis  $x \rightarrow -1^+$ ). Une étude de signe montre que  $x(t) - \frac{1}{2} > 0$  pour  $t < -1$  et  $t > +1$ , et la courbe est alors à droite de l'asymptote verticale, par contre  $x(t) - \frac{1}{2} < 0$  pour  $-1 < t < +1$ , et la courbe est alors à gauche de l'asymptote verticale. (utilises un tableau de signe pour y voir clair)
7. **Position par rapport à l'asymptote oblique.** Il s'agit de déterminer le signe de  $y(t) - (\frac{3}{2}x(t) - \frac{3}{4})$ . La courbe est au-dessus de l'asymptote oblique pour  $-1 < t < +1$ ; et en-dessous de l'asymptote ailleurs. (utilises un tableau de signe pour y voir clair)
8. **Points à l'infini.** Lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien  $t \rightarrow -\infty$ ) alors  $x(t) \rightarrow 1$  et  $y(t) \rightarrow 0$ . Le point  $(1, 0)$  est donc un point limite de la courbe paramétrée.

## 2.7 Exercices non corrigés

1. Déterminer la tangente et le type de point singulier à l'origine dans chacun des cas:

$$(t^5, t^3 + t^4), \quad (t^2 - t^3, t^2 + t^3), \quad (t^2 + t^3, t^4), \quad (t^3, t^6 + t^7).$$

2. Trouver les branches infinies de la courbe définie par  $x(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ ,  $y(t) = t$ . Déterminer l'asymptote, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
3. Déterminer le type de point singulier de l'astroïde définie par

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t.$$

Pourquoi l'astroïde n'a-t-elle pas de branche infinie?

4. Déterminer le type de point singulier de la cycloïde définie par

$$x(t) = r(t - \sin t), \quad y(t) = r(1 - \cos t).$$

Pourquoi la cycloïde n'a-t-elle pas d'asymptote?

## 2.8 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Dans la pratique, les courbes sont traitées de manière différente à l'écrit et à l'oral. **À l'écrit, l'étude d'une courbe est souvent détaillée en un grand nombre de petites questions.** Par contre, à l'oral, un énoncé peut simplement prendre la forme " construire la courbe ". Dans ce cas, on peut adopter le plan d'étude qui suit. Ce plan n'est pas universel et n'est qu'une proposition. Aussi, pour deux courbes différentes, il peut être utile d'adopter deux plans d'étude différents.

### 2.8.1 Plan d'étude

1. **Domaine de définition de la courbe.** Le point  $M(t)$  est défini si et seulement si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont définis. Il faut ensuite déterminer un **domaine d'étude** (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités ...

2. **Vecteur dérivé.** Calcul des dérivées des coordonnées de  $t \rightarrow M(t)$ . Les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $x'(t) = 0$  (et  $y'(t) \neq 0$ ) fournissent les points à tangente verticale et les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $y'(t) = 0$  (et  $x'(t) \neq 0$ ) fournissent les points à tangente horizontale. Enfin, les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $x'(t) = y'(t) = 0$  fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.
3. **Tableau de variations conjointes** L'étude de  $x'$  et  $y'$  permet de connaître les variations de  $x$  et  $y$ . Reporter les résultats obtenus des domaine d'étude **variations conjointes** des fonctions  $x$  et  $y$  dans un tableau. On verra cela dans les exemples où nous verrons le tableau des variations des deux fonctions  $x$  et  $y$  ensemble. Il nous montre l'évolution du point  $M(t)$ . Par suite, pour une valeur de  $t$  donnée, on doit lire verticalement des résultats concernant  $x$ , et  $y$ . Par exemple,  $x$  tend vers  $+\infty$ , pendant que  $y$  "vaut" 3. Voici le modèle.

$t$	
$x'(t)$	
$x$	
$y$	
$y'(t)$	

4. **Étude des points singuliers.**
5. **Étude des branches infinies.**
6. **Construction méticuleuse de la courbe.** On place dans l'ordre les deux axes et les unités. On construit ensuite toutes les droites asymptotes. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote, ...). Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer l'arc grâce aux règles suivantes:

**Tracé de la courbe paramétrée  $(x(t), y(t))$**

- Si  $x$  croît et  $y$  croît, on va vers la droite et vers le haut.
  - Si  $x$  croît et  $y$  décroît, on va vers la droite et vers le bas.
  - Si  $x$  décroît et  $y$  croît, on va vers la gauche et vers le haut.
  - Si  $x$  décroît et  $y$  décroît, on va vers la gauche et vers le bas.
7. **Points multiples** On cherche les points multiples s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

## 2.8.2 Une étude complète

**Exemple 23.** *Construire la courbe*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$$

*Démonstration.* On note  $\mathcal{C}$  la courbe à construire.

**-Domaine d'étude**

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , le point  $M(t)$  est défini si et seulement si  $t \neq \pm 1$ . Aucune réduction intéressante du domaine n'apparaît clairement et on étudie donc sur

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

**-Variations conjointes des coordonnées.**

La fonction  $x$  est dérivable sur  $D$  et, pour tout  $t \in D$ ,

$$x'(t) = \frac{3t^2(t^2 - 1) - t^3(2t)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^2(t^2 - 3)}{(t^2 - 1)^2}.$$

La fonction  $x$  est donc strictement croissante sur  $] -\infty, -\sqrt{3}]$  et sur  $[3, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $[-\sqrt{3}, -1[$ , sur  $] -1, 1[$  et sur  $]1, +\sqrt{3}[$ .

La fonction  $y$  est dérivable sur  $D \cup \{-1\}$  et, pour  $t \in D \cup \{-1\}$ ,

$$y'(t) = \frac{(6t - 2)(t - 1) - (3t^2 - 2t)}{3(t - 1)^2} = \frac{3t^2 - 6t + 2}{3(t - 1)^2}.$$

La fonction  $y$  est donc strictement croissante sur  $] -\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}]$  et sur  $[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ , strictement décroissante sur  $[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$  et sur  $]1, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .

Les fonctions  $x'$  et  $y'$  ne s'annulent jamais simultanément et est donc une courbe régulière.

La tangente en un point  $M(t)$  est dirigée par le vecteur dérivé

$$\left( \frac{t^2(t^2 - 3)}{(t^2 - 1)^2}, \frac{3t^2 - 6t + 2}{3(t - 1)^2} \right)$$

ou encore (après simplification) par le vecteur

$$\left( \frac{3t^2(t^2 - 3)}{(t + 1)^2}, 3t^2 - 6t + 2 \right).$$

**Tangentes parallèles aux axes.**  $y'$  s'annule en  $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ . En les points  $M(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$  et  $M(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$  la courbe admet une tangente parallèle à  $(Ox)$ . On a

$$x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right)} = \frac{\left(1 - \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}{-\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \frac{6\sqrt{3} - 10}{-6 + \sqrt{3}},$$

ou encore

$$x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{33} (6\sqrt{3} + 10) \left(-6 - \sqrt{3} = \frac{42 - 26\sqrt{3}}{33} = -0,09\dots\right)$$

et de même,

$$y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(3 - \sqrt{3} - 2)}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{3}) = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} = 0,17\dots$$

Par un calcul simple conjugué (c'est-à-dire en remplaçant  $\sqrt{3}$  par  $-\sqrt{3}$  au début de calcul), on a  $x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{42+26\sqrt{3}}{33} = 2,63\dots$  et  $y\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} = 2,48\dots$   
 $x'$  s'annule en 0,  $\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{3}$ . En les points

$$M(0) = (0, 0), \quad M(\sqrt{3}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 7\sqrt{3}}{6}\right) = (2, 59\dots; 2, 52\dots)$$

$$M(-\sqrt{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 7\sqrt{3}}{6}\right) = (-2, 59\dots; -2, 52\dots)$$

la courbe a une tangente parallèle à  $(Oy)$ .

**Étude en l'infini.** Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  tendent toutes deux vers  $+\infty$  et il y a donc une branche infinie. Même chose quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . Étudions  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ . Pour  $t \in D \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(3t - 2)}{3(t - 1)} \times \frac{t^2 - 1}{t^3} = \frac{(3t - 2)(t + 1)}{3t^2}.$$

Cette expression tend vers 1 quand  $t$  tend  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Pour  $t \in D$ ,

$$y(t) - x(t) = \frac{t(3t - 2)}{3(t - 1)} - \frac{t^3}{t^2 - 1} = \frac{t^2 - 2t}{3(t - 1)(t + 1)}$$

On a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^2 - 2t}{3(t - 1)(t + 1)} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left( y(t) - \left( x(t) + \frac{1}{3} \right) \right) = 0.$$

Quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ , la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + \frac{1}{3}$  est donc asymptote à la courbe.

Étudions la position relative de  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$ . Pour  $t \in D$ ,

$$\left(y(t) - \left(x(t) + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{t^2 - 2t}{3(t-1)(t+1)} - \frac{1}{3} = \frac{-2t + 1}{3(t-1)(t+1)}.$$

On a le tableau suivant

$t$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
Signe de $y(t) - \left(x(t) + \frac{1}{3}\right)$		+	-	+	-
Position relative		$\mathcal{C}$ au dessus de $\Delta$	$\mathcal{C}$ en dessous de $\Delta$	$\mathcal{C}$ au dessus de $\Delta$	$\mathcal{C}$ en dessous de $\Delta$

$\mathcal{C}$  et  $\Delta$  se coupent au point  $M\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right) = (-1, 6\dots; 1, 6\dots)$ .

- Étude en  $t = -1$ .

Quand  $t$  tend vers  $-1$ ,  $y(t)$  tend vers  $-\frac{5}{6}$ , et  $x(t)$  tend vers  $-\infty$  en  $-1^-$  et vers  $+\infty$  en  $-1^+$ . La droite d'équation  $y = -\frac{5}{6}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ . La position relative est fournie par le signe de

$$y(t) + \frac{5}{6} = \frac{6t^2 + t - 5}{6(t-1)} = \frac{(t+1)(6t-5)}{6(t-1)}.$$

- Étude en  $t = 1$ . Quand  $t$  tend vers 1,  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini, ainsi, on a

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2} = \frac{2}{3}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(y(t) - \frac{2}{3}x(t)\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - 2t}{3(t^2 - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{3(t+1)} = \frac{1}{2}.$$

La droite d'équation

$$y(t) = \frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{2}$$

est asymptote à la courbe. La position relative est fournie par d'équation

$$y(t) - \left(\frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(t-1)(2t+3)}{6(t+1)}.$$

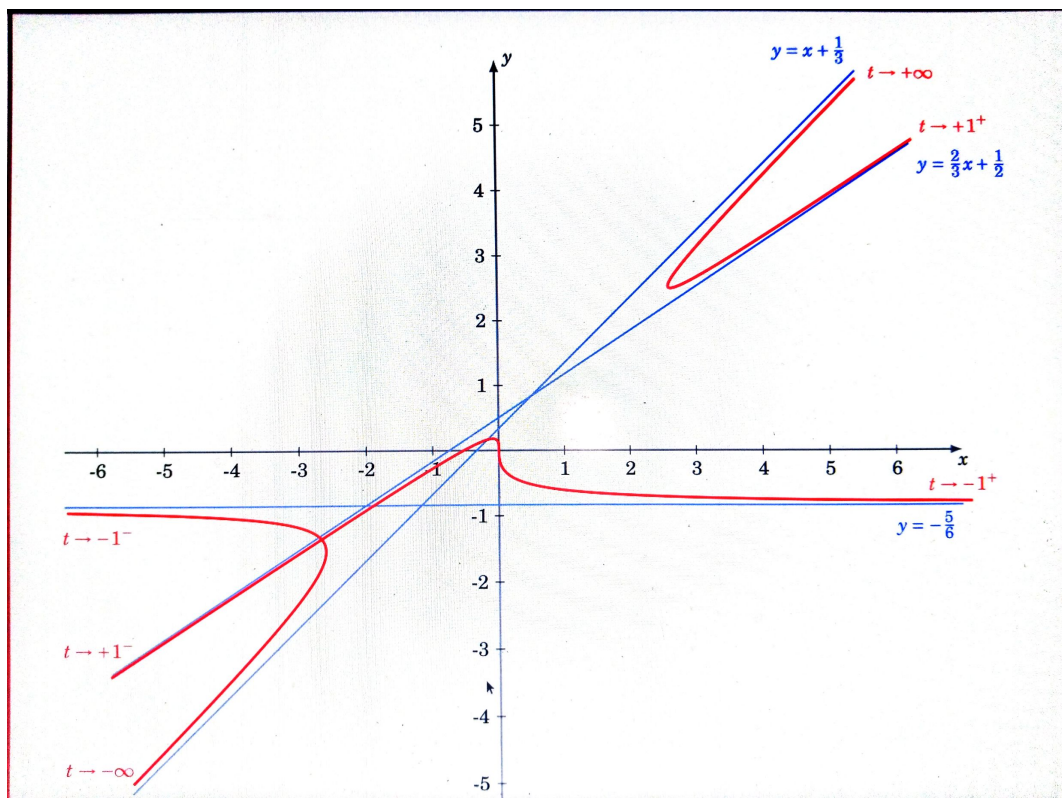
- Tableau de variations conjointes.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	+	0	-	-	-	-	0	+
$x$	$-\infty$	$-2,59\dots$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$2,59\dots$	$+\infty$
$y$	$-\infty$			$0,17\dots$	$-\infty$	$+\infty$	$2,48\dots$	$+\infty$
$y'(t)$			+	0	-	-	0	+

- Intersection avec les axes.

$x(t) = 0$  équivaut à  $t = 0$ . La courbe coupe  $(Oy)$  au point  $M(0) = (0, 0)$ .  $y(t) = 0$  équivaut à  $t = 0$  ou  $t = \frac{2}{3}$ . La courbe coupe  $(Ox)$  au point  $M(0) = (0, 0)$  et  $M(\frac{2}{3}) = (-\frac{8}{15}, 0)$ .

- Tracé de la courbe.



Le tracé fait apparaître un point double. Je vous demanderais de le chercher et de le trouver. □

**Exemple 24.** Construire une courbe

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

de la famille des courbes de Lissajous.

*Démonstration.* – Domaine d'étude.

Pour tout réel  $t$ ,  $M(t)$  existe et  $M(t + 2\pi) = M(t)$ . On obtient la courbe complète quand  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$ .

Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $M(-t) = s_O(M(t))$ , puis pour  $t \in [0, \pi]$ ,  $M(\pi - t) = s_{(O_y)}(M(t))$ . On étudie et on construit l'arc quand  $t$  décrit  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on obtient la courbe complète

par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis par symétrie centrale de centre  $O$ . Puisque, pour tout réel  $t$ ,  $M(t + \pi) = s_{(Ox)}(M(t))$ , l'axe  $(Ox)$  est également axe de symétrie de la courbe.

– Localisation.

Pour tout réel  $t$ ,  $|x(t)| \leq 1$  et  $|y(t)| \leq 1$ . Le support de la courbe est donc contenu dans le carré

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}.$$

– Variations conjointes.

D'après les propriétés usuelles de la fonction sinus, la fonction  $x$  est croissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et décroissante sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ; et de même, la fonction  $y$  croît sur  $[0, \frac{\pi}{6}]$  et décroît sur  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  (fais un tableau de signe pour y voir clair).

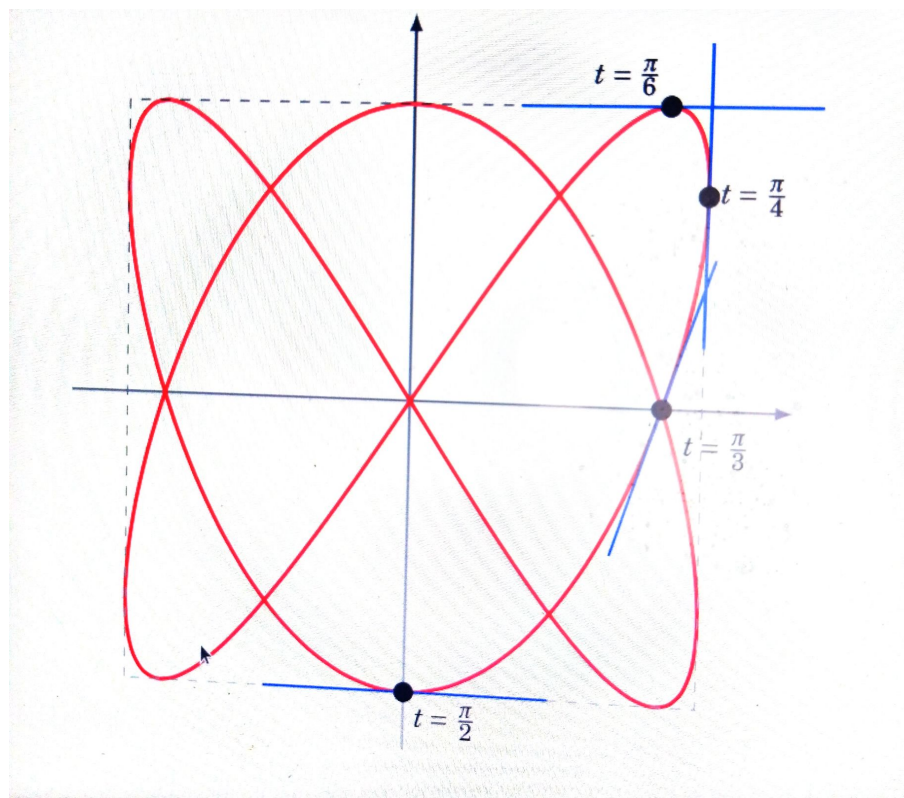
– Vecteur dérivé et tangente.

- Pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = (2 \cos(2t), 3 \cos(3t))$ . Par la suite:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{O} \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cap \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) = \emptyset.$$

Donc  $\frac{d\vec{M}}{dt}$  ne s'annule pas et la courbe est régulière. La tangente en tout point est donné par le vecteur  $(2 \cos(2t), 3 \cos(3t))$ .

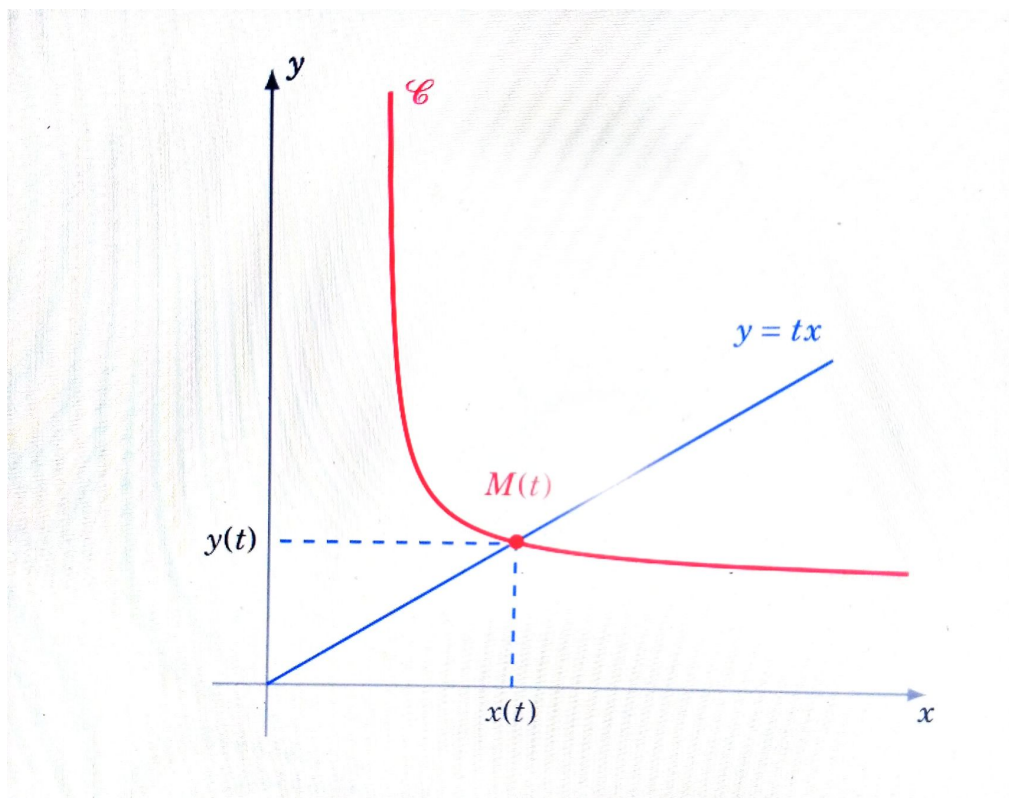
- Cette tangente est parallèle à  $(Ox)$  si et seulement si  $\cos(3t) = 0$  ou encore  $t \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$  ou enfin  $t = \frac{\pi}{6}$  et  $t = \frac{\pi}{2}$ , et cette tangente est parallèle à  $(Oy)$  si et seulement si  $\cos(2t) = 0$  ou encore  $t \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$  ou enfin  $t = \frac{\pi}{4}$ .
  - La tangente en  $M(0)$  est dirigée par le vecteur  $(2, 3)$  et a donc pour coefficient directeur  $\frac{3}{2}$ . (Il suffit de vérifier l'équation de la tangente en  $M(0)$ .)
  - Pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $M(t) \in (Ox)$  si et seulement si  $\sin(3t) = 0$  ou encore  $t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$  ou enfin  $t = 0$ . La tangente en  $M(\frac{\pi}{3})$  est dirigée par le vecteur  $(-1, -3)$  et a donc pour coefficient directeur 3. (Il suffit de vérifier l'équation de la tangente en  $M(\frac{\pi}{3})$ .)
- Tracé de la courbe.



□

### 2.8.3 Autre façon de définir une courbe

Il existe d'autres façons de définir une courbe, par exemple par une équation cartésienne du type  $f(x, y) = 0$ . Par exemple,  $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$  définit le cercle de rayon 1, centré à l'origine. Pour étudier les équations  $f(x, y) = 0$ , il nous manque un cours sur les fonctions de deux variables. Néanmoins, il est possible dès à présent de construire de telles courbes en trouvant une paramétrisation. Une idée (parmi tant d'autres), fréquemment utilisée en pratique, est de chercher l'intersection de la courbe avec toutes les droites passant par l'origine comme le montre le dessin suivant. Ceci revient en gros à prendre comme paramètre le réel  $t = \frac{y}{x}$  comme le montre le schéma suivant.



**Exemple 25.** Construire le folium de Descartes  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ,  $a$  étant un réel strictement positif donné.

*Démonstration.* Commençons par montrer que l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est réduite à l'origine :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \cap (Oy) \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ et } x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $D_t$  la droite d'équation ( $y = tx$ ). Cherchons l'intersection de cette droite  $D_t$  avec notre courbe  $\mathcal{C}$ :

$$M(x, y) \in D_t \cap \mathcal{C} \setminus (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = tx \\ x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = tx \\ (1 + t^3)x - 3at = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne encore

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ pour } t \notin \{-1\} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ pour } t \notin \{-1, 0\}$$

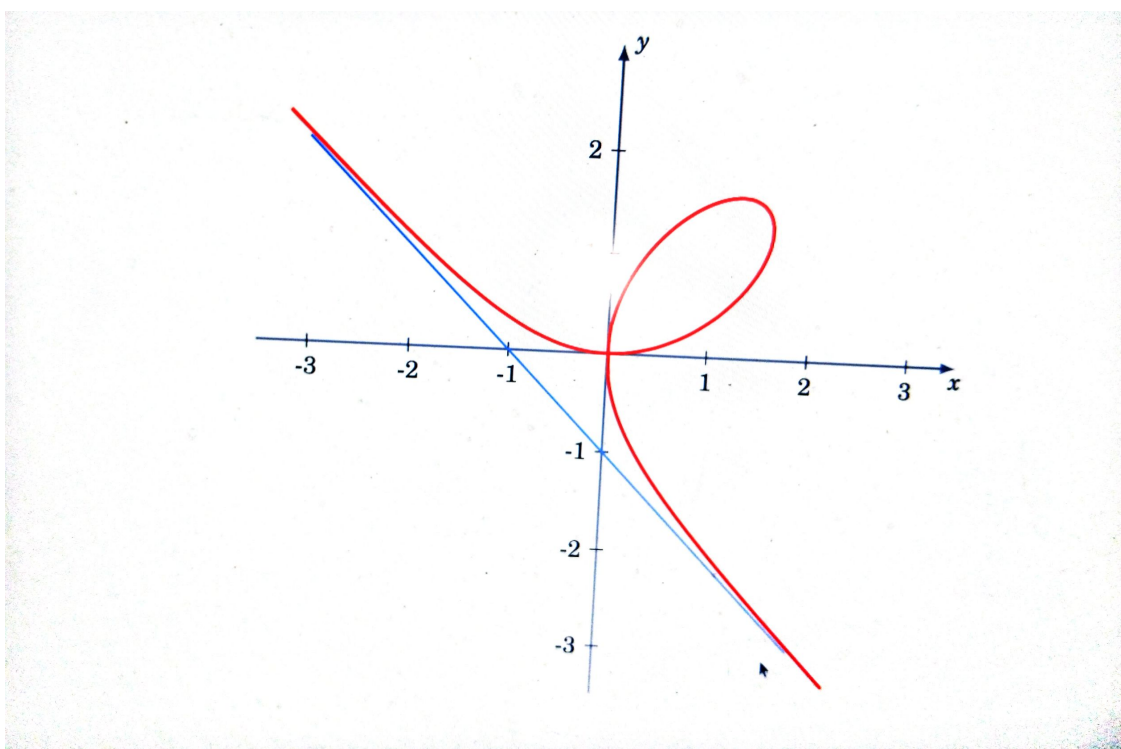
Ainsi  $\mathcal{C}$  est la réunion de  $\{O\}$  et de l'ensemble des points  $(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$  pour  $t \notin \{-1, 0\}$ . D'autre part les droites  $D_{-1}$  et  $D_0$  n'ont qu'un point commun avec  $\mathcal{C}$ , à savoir le point (l'origine)  $O$ . Comme  $t = 0$  refournit le point  $O$ , on a plus simplement:

$$\mathcal{C} = \left\{ \left( \frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right) : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$

Une paramétrisation de la courbe est donc:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ pour } t \notin \{-1, 0\}$$

Après étude, on obtient le graphe suivant :



□

**Exercice 1.** *Les étudiants peuvent s'exercer à faire ces exercices suivant les modèles plus haut.*

1. *Faire une étude complète et le tracé de la courbe définie par  $x(t) = \tan(\frac{t}{3}), y(t) = \sin(t)$ .*
2. *Faire une étude complète et le tracé de l'astroïde définie par  $x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)$ .*
3. *Faire une étude complète et le tracé de la cycloïde définie par  $x(t) = r(t-), y(t) = r(1 - \cos t)$ .*

## 2.9 Courbes en polaires

Rappelons tout d'abord la définition précise des coordonnées polaires. Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 2.9.1 Coordonnées polaires

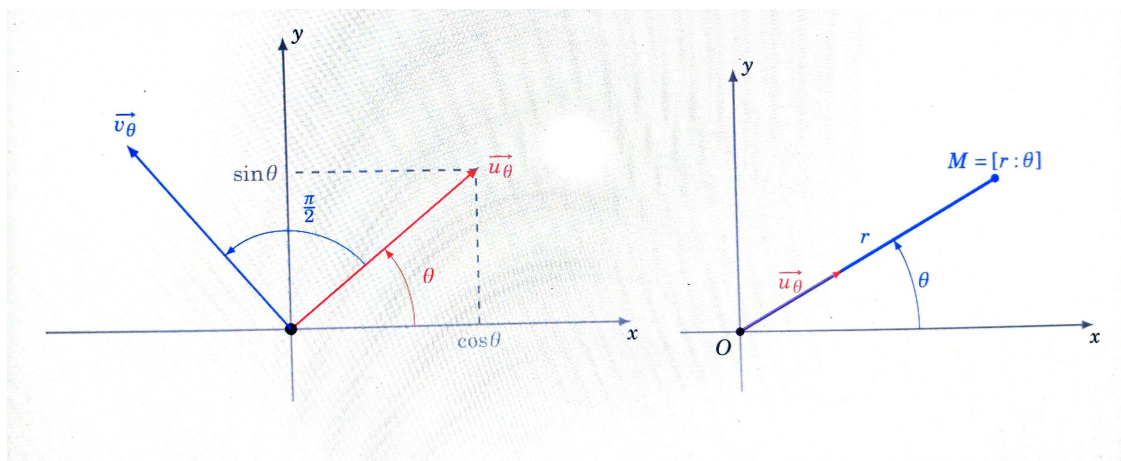
Pour un réel  $\theta$ , on pose

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{u}_{\theta + \frac{\pi}{2}},$$

car  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$  et  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ .  $M$  étant un point du plan, on dit que  $[r : \theta]$  est un couple de **coordonnées polaires** du point  $M$  si et seulement si  $\vec{OM} = r\vec{u}_\theta$ . On écrit alors

$$M = [r : \theta] \Leftrightarrow \vec{OM} = r\vec{u}_\theta \Leftrightarrow M = O + r\vec{u}_\theta.$$

On peut regarder cette situation sur les schémas suivants.



## 2.9.2 Courbes d'équations polaires

La courbe d'équation polaire  $r = f(\theta)$  est l'application suivante, où les coordonnées des points sont données en coordonnées polaires:

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto M(\theta) = [r(\theta) : \theta] = O + r(\theta)\vec{u}_\theta$$

ou encore sous forme complexe,  $\theta \mapsto r(\theta)e^{i\theta}$ .

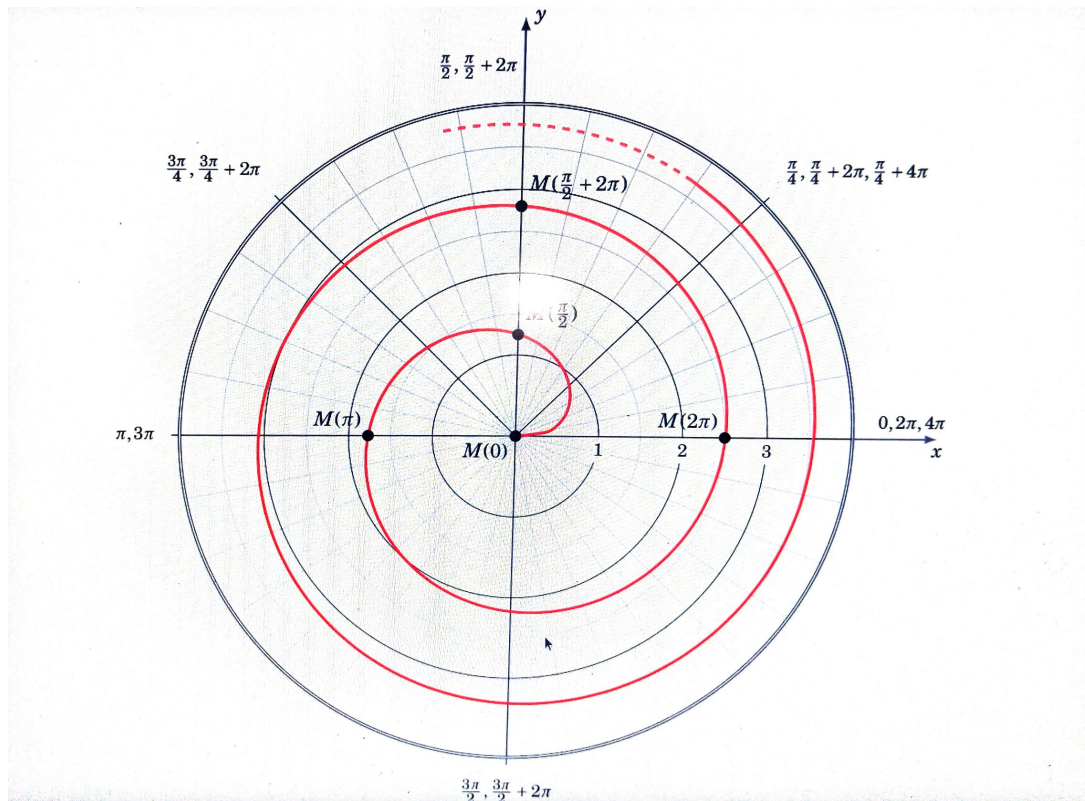
### Exemple

Voici une spirale d'équation polaire  $r = \sqrt{\theta}$ , définie pour  $\theta \in [0, +\infty[$ . Par exemple pour  $\theta = 0$ ,  $r(\theta) = 0$ , donc l'origine appartient à la courbe  $\mathcal{C}$ . Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $r(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , donc  $M(\frac{\pi}{2}) = [\sqrt{\frac{\pi}{2}} : \frac{\pi}{2}]$ , soit en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\pi}{2}\right) &= r(\theta)\vec{u}_\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (0; 1, 25\dots) \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Puis en faisant de même pour  $\pi$  et pour  $2\pi$ , on obtient  $M(\pi) = [\sqrt{\pi} : \pi] = (-1, 77\dots; 0) \in \mathcal{C}$ ,  $M(2\pi) = [\sqrt{2\pi} : 2\pi] = [2.50\dots; 0] \in \mathcal{C}, \dots$

On peut visualiser cela sur le schéma suivant.



Une telle équation ( $r = f(\theta)$ ) ressemble à une équation cartésienne ( $y = f(x)$ ). Mais la non unicité d'un couple de coordonnées polaires en fait un objet plus compliqué. Reprenons l'exemple de la spirale d'équation polaire  $r = \sqrt{\theta}$ .

Le point de coordonnées polaires  $[\sqrt{\pi} : \pi]$  est sur la spirale, mais aussi le point  $[-\sqrt{\pi} : 2\pi]$  (car  $[-\sqrt{\pi} : 2\pi] = [\sqrt{\pi} : \pi]$ ). Ainsi, si en cartésien on peut écrire  $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y = f(x)$ , ce n'est pas le cas en polaires, où l'on a seulement  $r = f(\theta) \implies M[r : \theta] \in \mathcal{C}$ . Pour avoir une équivalence, avec  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = f(\theta)$  et  $M$  un point du plan, il faut écrire:

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \text{il existe un couple } [r : \theta] \text{ de coordonnées polaires de } M \text{ tel que } r = f(\theta).$$

On remarque donc ce qui suit:

1. Dans cette présentation, la lettre  $r$  désigne à la fois la première des deux coordonnées polaires du point  $[r : \theta]$  et aussi la fonction  $\theta \mapsto f(\theta)$ , cette confusion des notations étant résumée dans l'égalité  $r = r(\theta)$ .
2.  $r(\theta)$  n'est pas nécessairement la distance  $OM(\theta)$  car la fonction  $r$  peut tout à fait prendre des valeurs strictement négatives. La formule générale est  $OM(\theta) = |r(\theta)|$ .
3. Grâce aux relations usuelles entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires d'un point, on peut à tout moment écrire une représentation polaire sous la forme d'une représentation paramétrique classique:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases} .$$

### 2.9.3 Calcul de la vitesse en polaires

Pour pouvoir dériver un arc en coordonnées polaires, il faut d'abord savoir dériver le vecteur

$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  en tant que fonction de  $\theta$ :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\frac{d\vec{v}_\theta}{d\theta}(\theta) = \frac{d\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}}{d\theta}(\theta) = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = \vec{u}_{\theta+\pi} = -\vec{u}_\theta.$$

En résumé, ils s'obtiennent par rotation d'angle  $+\frac{\pi}{2}$ :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}(\theta) = \vec{v}_\theta \quad \frac{d\vec{v}_\theta}{d\theta}(\theta) = -\vec{u}_\theta$$

### 2.9.4 Tangente en un point distinct de l'origine

Soient  $r$  une fonction dérivable sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = r(\theta)$  ou encore de représentation polaire  $\theta \mapsto O + r(\theta)\vec{u}_\theta$ .

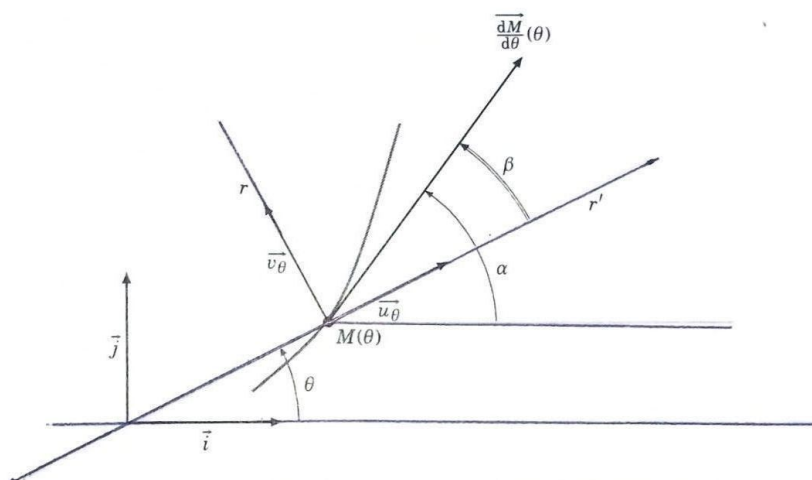
**Théorème 8.** 1. Tout point de  $\mathcal{C}$  distinct de l'origine  $O$  est un point régulier.

2. Si  $M(\theta) \neq O$ , la tangente en  $M(\theta)$  est dirigé par le vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta.$$

3. L'angle  $\beta$  entre le vecteur  $\vec{u}_\theta$  et la tangente en  $M(\theta)$  vérifie la formule  $\tan(\beta) = \frac{r}{r'}$  si  $r' \neq 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  sinon.

Le schéma suivant montre la situation.



Le repère  $(M(\theta), \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  est le repère polaire en  $M(\theta)$ . Dans ce repère, les coordonnées du vecteur  $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$  sont donc  $(r', r)$ . On note  $\beta$  l'angle  $(\vec{u}_\theta, \frac{d\vec{M}}{d\theta})$  et  $\alpha$  l'angle  $(\vec{i}, \frac{d\vec{M}}{d\theta})$  de sorte que  $\alpha = \beta + \theta$ .

*Démonstration.* - Comme  $M(\theta) = O + r(\theta)\vec{u}_\theta$ , alors par la formule de dérivation d'un produit, on a

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = \frac{dr(\theta)}{d\theta}\vec{u}_\theta + r(\theta)\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta.$$

- - Déterminons alors les éventuels points singuliers. Puisque les vecteurs  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{v}_\theta$  ne sont pas colinéaires, on a

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = \vec{0} \Leftrightarrow r(\theta) = 0 \text{ et } r'(\theta) = 0.$$

Maintenant, comme  $r(\theta) = 0 \Leftrightarrow M(\theta) = 0$ , on en déduit que tout point distinct de l'origine est un point régulier.

- Comme  $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta$  alors, dans le repère polaire  $(M(\theta), \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ , les coordonnées de  $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$  sont  $(r', r)$ . On a alors

$$\cos(\beta) = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Il faut se rappeler que  $\|\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)\| = \sqrt{r^2 + r'^2}$ .

Ces égalités définissent  $\beta$  modulo  $2\pi$ . Ensuite (puisque  $r \neq 0$ ) on a  $\frac{1}{\tan \beta} = \frac{r'}{r}$ . On préfère retenir que, si de plus  $r' \neq 0$ ,  $\tan(\beta) = \frac{r}{r'}$ . Les deux dernières égalités déterminent  $\beta$  modulo  $\pi$ , ce qui est suffisant pour construire la tangente, mais insuffisant pour construire le vecteur  $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$ . □

**Exemple 26.** Déterminer la tangente à la courbe polaire

$$r = 1 - 2 \cos \theta \quad \text{au point} \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

*Démonstration.* On calcule le vecteur dérivé, qui bien sûr dirige la tangente:

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.\vec{u}_{\frac{\pi}{2}} + 1.\vec{v}_{\frac{\pi}{2}} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Comme la tangente passe par le point  $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = [r\left(\frac{\pi}{2}\right) : \frac{\pi}{2}] = [1 : \frac{\pi}{2}] = (0, 1)$  une équation cartésienne de cette tangente s'obtient en procédant comme suit.

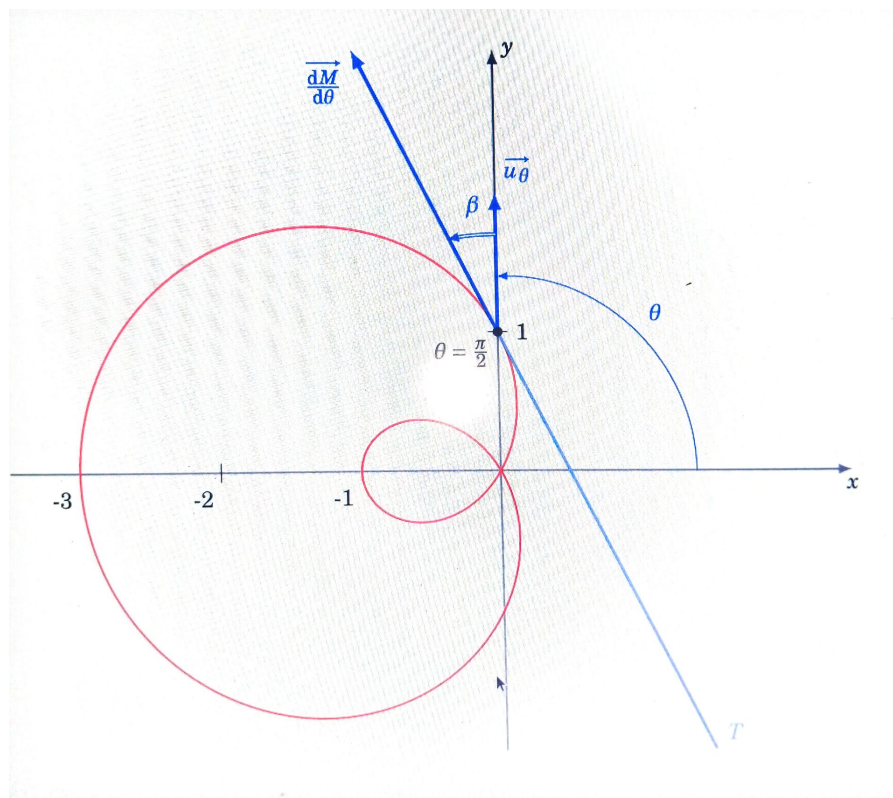
$$\begin{vmatrix} x - x(\theta_0) & x'(\theta_0) \\ y - y(\theta_0) & y'(\theta_0) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'(\theta_0)(x - x(\theta_0)) - x'(\theta_0)(y - y(\theta_0)) = 0.$$

Dans notre cas, on a  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , c'est à dire  $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)) = (0, 1)$ . On sait en plus que

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, une équation cartésienne de cette tangente est

$$2.(x - 0) + 1.(y - 1) = 0 \quad \text{ou encore} \quad y = -2x + 1.$$



□

### 2.9.5 Tangente à l'origine

Supposons maintenant que, pour un certain réel  $\theta_0$ , la courbe passe par l'origine  $O$ . On suppose comme d'habitude que l'arc est localement simple, ce qui revient à dire qu'au voisinage de  $\theta_0$ , la fonction  $r$  ne s'annule qu'en  $\theta_0$ .

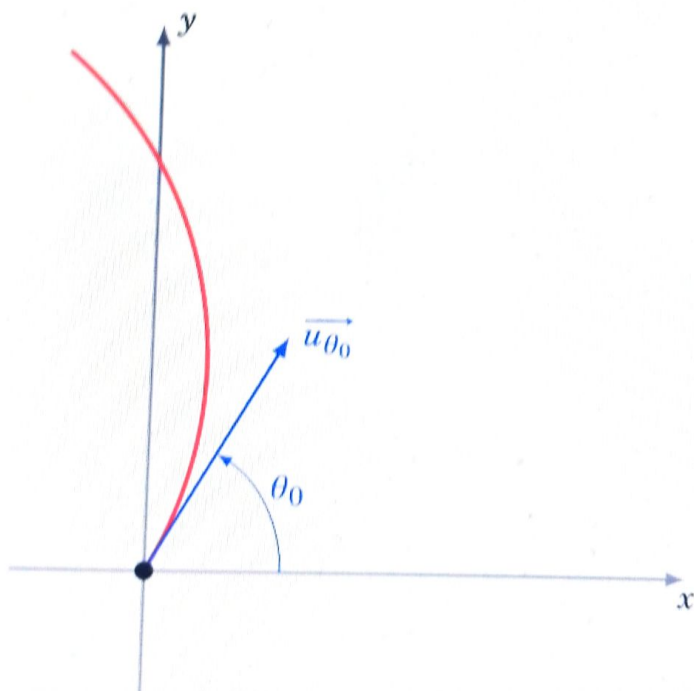
**Théorème 9.** *Si  $M(\theta_0) = 0$ , la tangente en  $M(\theta_0)$  est la droite d'angle polaire  $\theta_0$ .*

Une équation cartésienne de cette droite dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est donc

$$y = \tan(\theta_0)x, \quad \text{si } \theta_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

et

$$x = 0, \quad \text{si } \theta_0 \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$



*Démonstration.* Pour  $\theta \neq \theta_0$ , le vecteur

$$\frac{1}{r(\theta)} \overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)} = \frac{1}{r(\theta)} \overrightarrow{OM(\theta)} = \vec{u}_\theta,$$

dirige la droite  $(M(\theta_0)M(\theta))$ . Or, quand  $\theta$  tend vers  $\theta_0$ ,  $\vec{u}_\theta$  tend vers  $\vec{u}_{\theta_0}$ . Ainsi  $\vec{u}_{\theta_0}$  est un vecteur directeur de la tangente, comme on le souhaitait.  $\square$

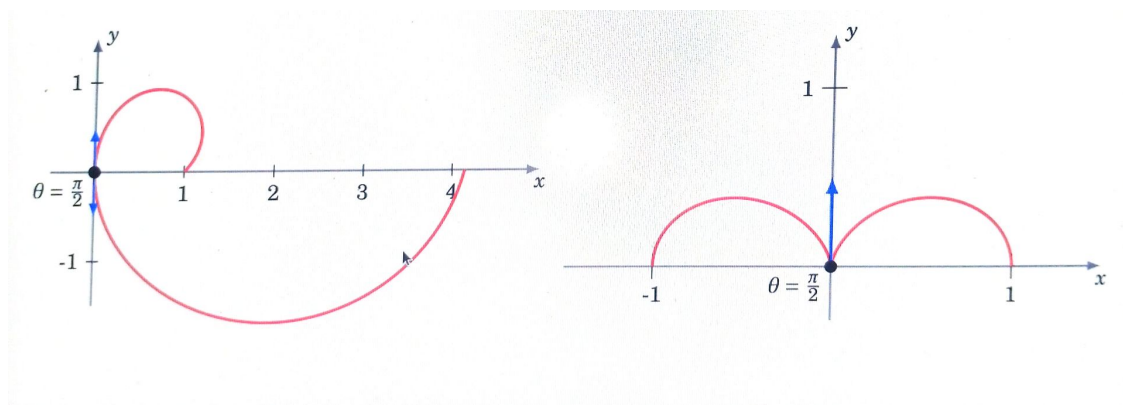
**Remarque 1.** En l'origine, on ne peut avoir qu'un point d'allure ordinaire ou un rebroussement de première espèce.

- Si  $r$  s'annule en changeant de signe, le point  $M(\theta)$  franchit l'origine en tournant dans le sens direct : *c'est un point d'allure ordinaire.* –
- Si  $r$  s'annule sans changer de signe en arrivant en  $O$ , on rebrousse chemin en traversant la tangente (puisqu'elle tourne toujours dans le même sens) : *c'est un rebroussement de première espèce.*

**Exemple 27.** Étudier le point  $M(\frac{\pi}{2})$  dans les deux cas suivants:

$$r = (\theta + 1) \cos \theta \quad \text{et} \quad r = \cos^2(\theta).$$

- Dans les deux cas,  $M(\frac{\pi}{2}) = 0$  et la tangente en  $M(\frac{\pi}{2})$  est la droite passant par  $O$  et d'angle polaire  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire l'axe des ordonnées.
- Dans le premier cas,  $r$  change de signe en franchissant  $\frac{\pi}{2}$ , de positif à négatif. Ainsi, en tournant toujours dans le même sens, on se rapproche de l'origine, on la franchit et on s'en écarte : **c'est un point d'allure ordinaire**.
- Dans le deuxième cas,  $r$  ne change pas de signe. On ne franchit pas l'origine. On rebrousse chemin tout en tournant toujours dans le même sens: **c'est un point de rebroussement de première espèce**.



## 2.10 Courbes en polaires: Exemples

### 2.10.1 Réduction du domaine d'études

On doit connaître l'effet de transformations géométriques usuelles sur les coordonnées polaires d'un point. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct,  $M$  étant le point de coordonnées polaires  $[r : \theta]$ .

- Réflexion d'axe ( $Ox$ ). On a  $s_{(Ox)} : [r : \theta] \mapsto [r : -\theta]$ .
- Réflexion d'axe ( $Oy$ ). On a  $s_{(Oy)} : [r : \theta] \mapsto [r : \pi - \theta]$ .
- Symétrie centrale de centre  $O$ . On a

$$s_O : [r : \theta] \mapsto [r : \theta + \pi] = [-r : \theta].$$

- Réflexion d'axe la droite  $D$  d'équation ( $y = x$ ). On a

$$s_D(M) : [r : \theta] \mapsto [r : \frac{\pi}{2} - \theta]$$

- Réflexion d'axe la droite  $D'$  d'équation ( $y = -x$ ). On a

$$s_{D'}(M) : [r : \theta] \mapsto [-r : \frac{\pi}{2} - \theta] = [r : -\frac{\pi}{2} - \theta].$$

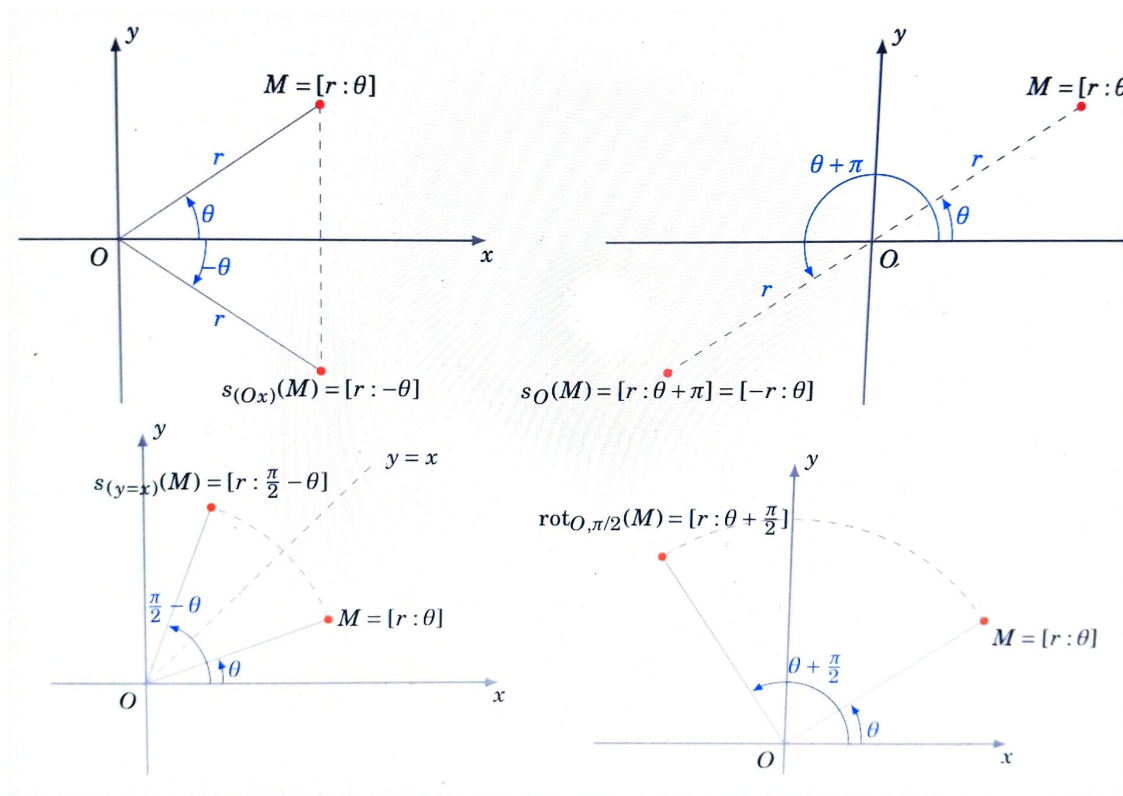
- Rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $O$ . On a

$$r_{\frac{\pi}{2}} : [r : \theta] \mapsto [r : \frac{\pi}{2} + \theta].$$

- Rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $O$ . On a

$$r_{O,\varphi} : [r : \theta] \mapsto [r : \theta + \varphi]$$

Voici quelques transformations :



**Exemple 28.** Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire

$$r = 1 + 2 \cos^2(\theta).$$

En effet, la fonction  $r$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique. Donc, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi) : \theta + 2\pi] = [r(\theta) : \theta] = M(\theta).$$

- La courbe complète est donc obtenue quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$  par exemple.
- La fonction  $r$  est paire. Donc, pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$M(-\theta) = [r(-\theta) : -\theta] = [r(\theta) : -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

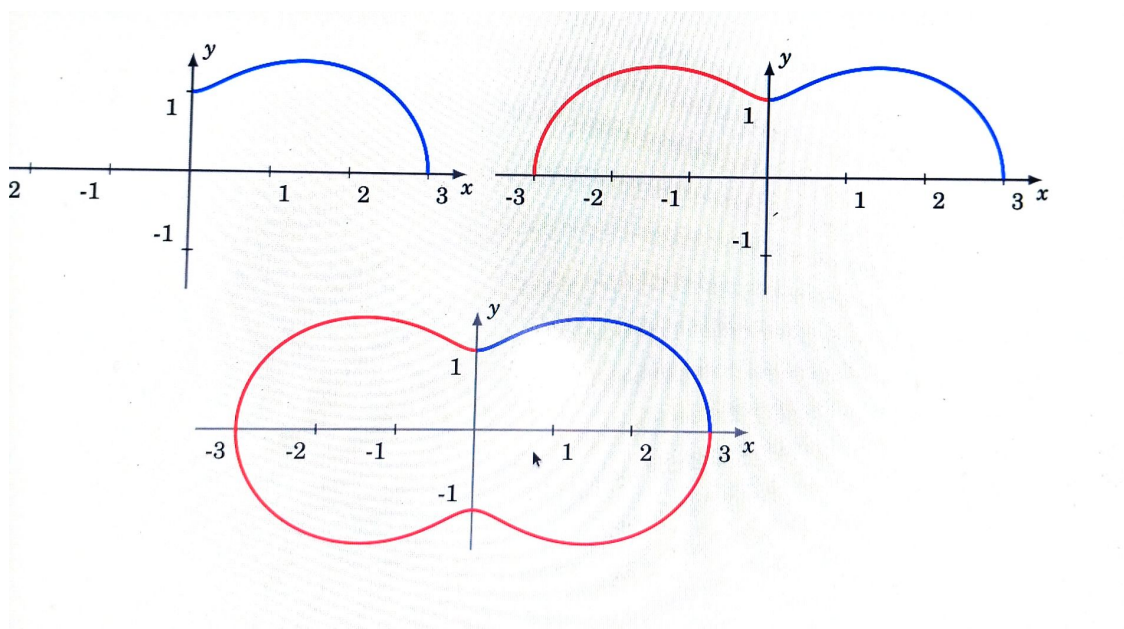
On étudie et construit la courbe sur  $[0, \pi]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

–  $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ . Donc, pour  $\theta \in [0, \pi]$ ,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta) : \pi - \theta] = [r(\theta) : \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

– On obtiendrait les tracés suivants sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , sur  $[0, \pi]$  puis  $[0, 2\pi]$ .



### 2.10.2 Plan d'étude

1. **Domaine de définition et réduction du domaine d'étude** en détaillant à chaque fois les transformations géométriques permettant de reconstituer la courbe.
2. **Passages par l'origine.** On résout l'équation  $r(\theta) = 0$  et on précise les tangentes en les points correspondants.

3. **Variations** de la fonction  $r$  ainsi que le signe de la fonction  $r$ . Ce signe aura une influence sur le tracé de la courbe (voir plus bas). Ce signe permet aussi de savoir si l'origine est un point de rebroussement ou un point ordinaire.
4. **Tangentes parallèles aux axes**. Recherche éventuelle des points en lesquels la tangente est parallèle à un axe de coordonnées (pour une tangente en un point distinct de  $O$ , parallèle  $(Ox)$ , on résout  $(r \sin(\theta))' = y' = 0$ ).
5. **Étude des branches infinies**. Aucun résultat spécifique ne sera fait ici. Le plus simple est alors de se ramener à l'étude des branches infinies d'une courbe paramétrée classique:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

6. **Construction de la courbe**.

**Tracé de la courbe d'équation polaire  $r = f(\theta)$**

Si  $r$  est positif et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.  
 Si  $r$  est négatif et décroît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.  
 Si  $r$  est positif et décroît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

Si  $r$  est négatif et croît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

7. **Points multiples**. Recherche éventuelle de points multiples si le tracé de la courbe le suggère (et si les calculs sont simples).

**Exemple 29.** *Construire la cardioïde, courbe d'équation polaire*

$$r = 1 - \cos \theta.$$

– **Domaine d'étude**. La fonction  $r$  est  $2\pi$ -périodique, donc on l'étudie sur  $[-\pi, \pi]$ , mais comme  $r$  est une fonction paire, on se limite à l'intervalle  $[0, \pi]$ , la courbe étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

– **Localisation de la courbe**. Comme  $0 \leq r \leq 2$  alors la courbe est bornée, incluse dans le disque de rayon 2, centré à l'origine. Il n'y a pas de branches infinies.

– **Passage par l'origine**.  $r = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$  (toujours avec notre restriction  $\theta \in [0, \pi]$ ). La courbe passe par l'origine uniquement pour  $\theta = 0$ .

– **Variations de  $r$ .** La fonction  $r$  est croissante sur  $[0, \pi]$  avec  $r(0) = 0, r(\pi) = 2$ . Conséquence:  $r$  est positif et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.

– **Tangentes parallèles aux axes.** La représentation paramétrique de la courbe est  $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$ . La tangente est horizontale lorsque  $y'(\theta) = 0$  (et  $x'(\theta) \neq 0$ ) et verticale lorsque  $x'(\theta) = 0$  (et  $y'(\theta) \neq 0$ ). On calcule

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta = \cos \theta - \cos^2 \theta, \quad x'(\theta) = \sin \theta (2 \cos \theta - 1)$$

avec  $x'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \pi$ .

Puis:

$$y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \quad y'(\theta) = -2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1.$$

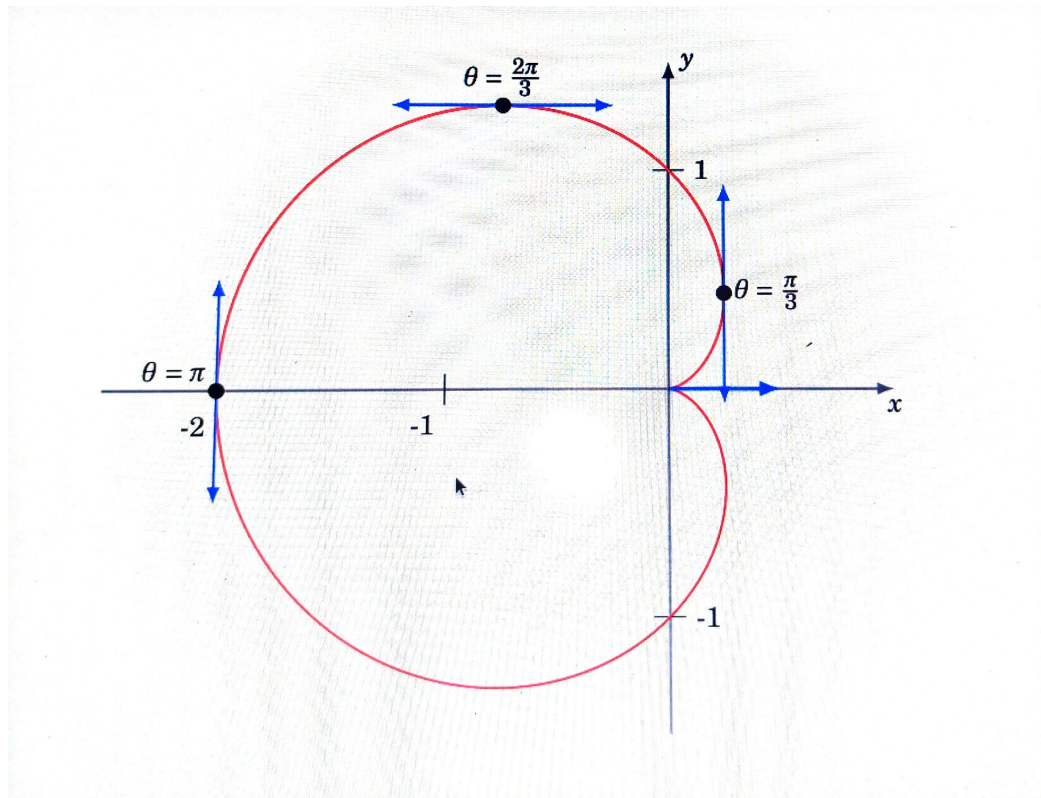
Or:

$$-2X^2 + X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad X = 1 \quad \text{donc} \quad y'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

En  $\theta = 0$  les deux dérivées s'annulent, donc on ne peut encore rien dire. En  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  la tangente est horizontale, et en  $\theta = \frac{\pi}{3}$  et  $\theta = \pi$  la tangente est verticale.

– **Comportement à l'origine.** À l'origine (pour  $\theta_0 = 0$ ), une équation de la tangente est  $y = \tan(\theta_0)x$ , donc ici d'équation  $y = 0$ . Comme  $r(\theta) \geq 0$ , il s'agit d'un point de rebroussement.

– **Graphie.** Toutes ces informations permettent de tracer cette courbe polaire.

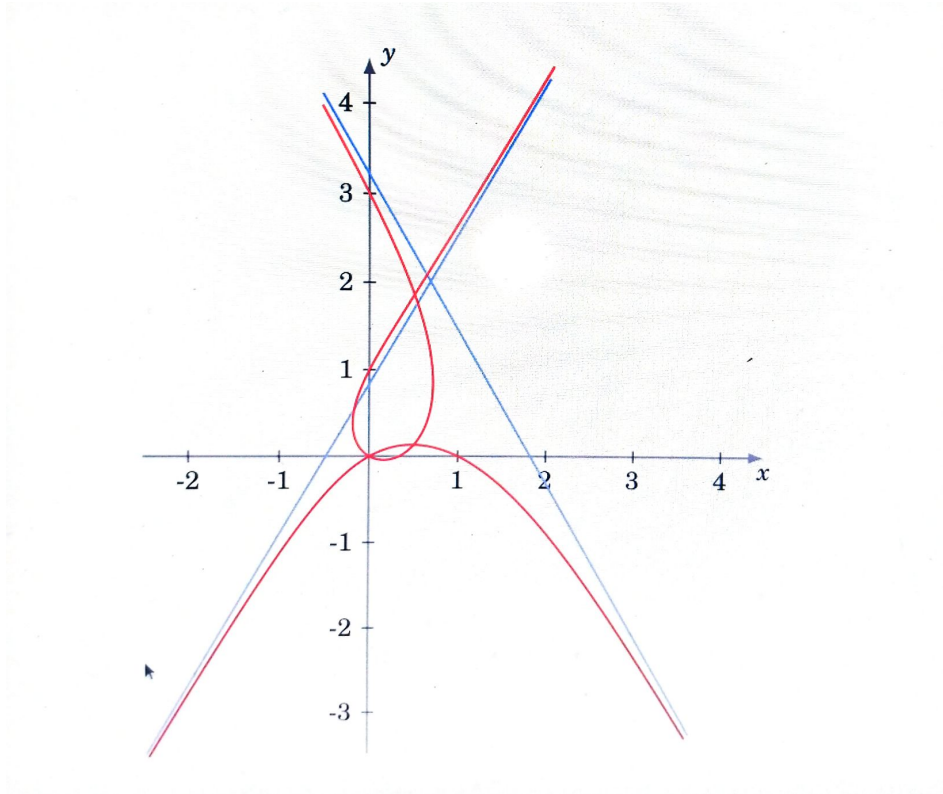


En suivant l'exemple présenté ci dessus, faites l'étude de la fonction suivante.

**Exercice 2.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Construire la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{1 + 2 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}$$

Après étude, vous obtenez le graphe suivant:



**Exercice 3.** Soit la courbe d'équation polaire  $r = \cos\theta + \sin\theta$ . Montrer que l'on peut se limiter à  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  comme domaine d'étude.

**Exercice 4.** Étudier la courbe d'équation polaire  $r = \sin(2\theta)$ .

# Chapitre 3

## Coniques

### 3.1 Ellipses, hyperboles, paraboles

Dans tout ce chapitre,  $E$  est un plan euclidien. On commence par la définition géométrique d'une conique.

#### 3.1.1 Définition monofocale

**Définition 13.** Soient  $\mathcal{D}$  une droite,  $F \notin \mathcal{D}$  un point du plan et  $e$  un réel strictement positif. L'ensemble:

$$\mathcal{C} = \{M : d(F, M) = e d(M, \mathcal{D})\}$$

est appelé

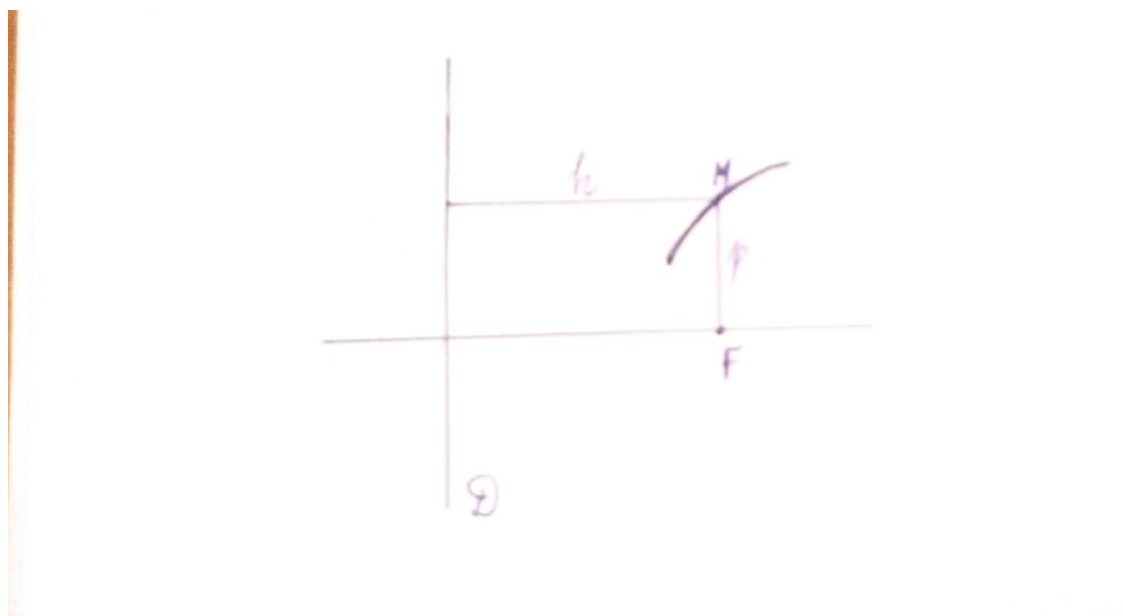
- hyperbole si  $e > 1$ ,
- ellipse si  $e < 1$ ,
- parabole si  $e = 1$ .

Le point  $F$  est appelé foyer de  $\mathcal{C}$ , la droite  $\mathcal{D}$  directrice associé au foyer  $F$  et  $e$  est une excentricité.

L'ensemble  $\mathcal{C}$  est appelé conique d'excentricité  $e$ , de foyer  $F$  et de directrice associée  $\mathcal{D}$ .

La droite contenant  $F$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$  est appelé l'axe focal.

Voici un schéma illustratif:



On remarque que

- l'axe focal est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}$
- Si  $h = d(F, \mathcal{D})$ , le réel  $p = eh$  est appelé paramètre. Il correspond à la distance de  $F$  à chacun des deux points de  $\mathcal{C}$  situés sur la droite passant par  $F$  et parallèle à  $\mathcal{D}$ .

### 3.2 Étude des paraboles

Soit  $\mathcal{P}$  la parabole de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$ . Prenons un repère orthonormé centré en  $F$  dans lequel  $\mathcal{D}$  admet pour équation  $x = -p$  avec  $p \neq 0$  (le paramètre de la parabole est alors  $|p|$ ). Pour un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , on a alors

$$d(M, F)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad d(M, \mathcal{D}) = (x + p)^2.$$

En effet, il suffit de se rappeler la formule suivante de la distance entre deux points  $A(x_1, y_1)$  et  $B(x_2, y_2)$  définie par

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

et la distance d'un point  $A(x_A, y_A)$  à une droite  $\mathcal{D} \equiv ax + by + c = 0$  est donnée par

$$d(\mathcal{D}, A) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ensuite, on doit comprendre que si le repère orthonormé est centrée en  $F$ , on aura  $F(0, 0)$ ,  $M(x, y)$  et la droite  $\mathcal{D} \equiv x + p = 0$ .

Ainsi, une équation de  $\mathcal{P}$  est donc donnée par

$$d(F, M) = d(M, \mathcal{D}) = x^2 + y^2 = (x + p)^2$$

ou encore par

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \quad \text{ou encore} \quad y^2 - 2p \left( x + \frac{p}{2} \right) = 0.$$

En prenant pour nouvelle origine le point de coordonnées  $(-\frac{p}{2}, 0)$  appelée **sommet de la parabole**, on obtient une équation réduite de  $\mathcal{P}$ :

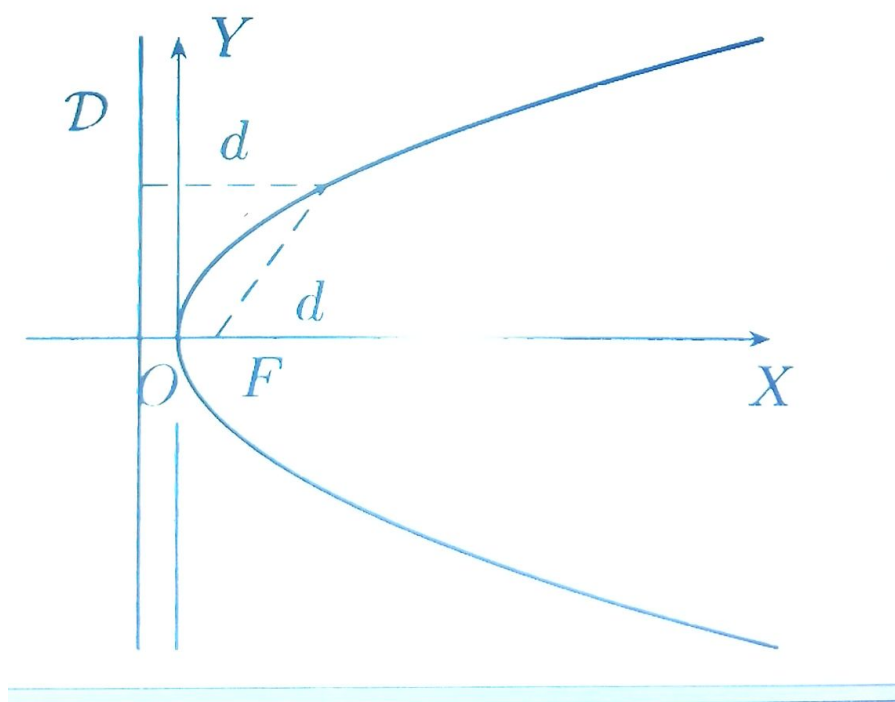
$$Y^2 = 2pX.$$

Réciproquement, si  $p \neq 0$  la courbe d'équation  $Y^2 = 2pX$  dans un repère orthonormé  $OXY$  est la parabole dont le foyer a pour coordonnées  $(-\frac{p}{2}, 0)$  et la directrice associée pour equation  $X = -\frac{p}{2}$ . L'origine du repère est le sommet de la parabole, c'est son unique point d'intersection avec l'axe focal.

La parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $Y^2 = 2pX$  peut se paramétrer par

$$(X = 2pt^2, Y = 2pt) \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme on a  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{Y}{X} = 0$ , la parabole possède deux branches paraboliques de direction asymptotique  $OX$ .



### 3.3 Étude des ellipses

Soit  $\varepsilon$  l'ellipse d'excentricité  $e < 1$ , de foyer  $F$  et de directrice associée  $\mathcal{D}$ .

Prenons un repère orthonormé centré en  $F$  dans lequel  $\mathcal{D}$  admet pour équation  $x = -h$  avec  $h > 0$ . Pour un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , on a alors

$$d(F, M) = e d(M, \mathcal{D}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2.$$

Un simple calcul montre que l'on a

$$x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2 \Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 - 2he^2x - e^2h^2 = 0$$

De même, un calcul simple montre que cette dernière equation est

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) \left( \left( x - \frac{he^2}{1 - e^2} \right)^2 - \frac{h^2 e^4}{(1 - e^2)^2} \right) + y^2 - e^2 h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( x - \frac{he^2}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 h^2}{(1 - e^2)^2}$$

Comme  $e < 1$ , en posant  $X = x - \frac{he^2}{1 - e^2}$  et  $Y = y$ , une equation de l'ellipse  $\varepsilon$  s'écrit alors

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{h^2 e^2}{(1 - e^2)^2} > 0.$$

En divisant cette dernière equation par  $\alpha = \frac{h^2 e^2}{(1 - e^2)^2}$  et en posant  $a = \frac{eh}{1 - e^2}$  et  $b = a\sqrt{1 - e^2} < a$ , on obtient ainsi une equation réduite de l'ellipse dans un repère orthonormé:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Dans ce repère, le foyer  $F$  a pour coordonnées  $(-c, 0)$  avec  $c = \frac{he^2}{1 - e^2} = ea$ .

Réciproquement, si  $0 < b < a$ , la courbe d'équation  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormé  $OXY$  est une ellipse puisqu'il suffit de prendre  $e \in ]0, 1[$  tel que  $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$  puis  $h = \frac{(1 - e^2)a}{e}$  pour obtenir l'équation

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{h^2 e^2}{(1 - e^2)^2} > 0.$$

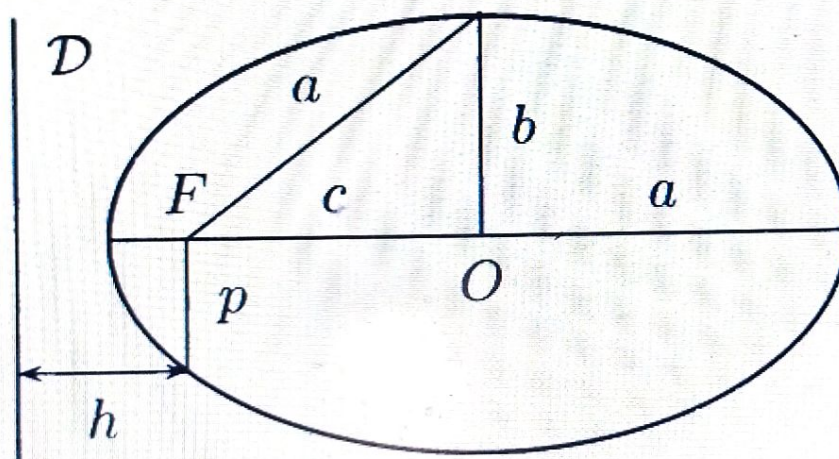
- L'axe focal  $OX$  est aussi appelée **grand axe**. Il coupe l'ellipse aux deux points de coordonnées  $(a, 0)$  et  $(-a, 0)$ . Le réel  $a$  est appelé **demi-axe focal** ou **demi-grand axe**.
- La droite  $OY$  est aussi un axe de symétrie. On l'appelle **petit axe** ou **axe non focal**. Il coupe l'ellipse aux deux points de coordonnées  $(0, b)$  et  $(0, -b)$ . Le réel  $b$  est appelé **demi-axe non focal** ou **demi-petit axe**.
- Le point  $O$  est centre de symétrie de l'ellipse. La distance  $c = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$  du foyer  $F$  au centre est appelé **distance focale**.
- Par symétrie, il existe un autre couple de foyer-directrice symétrique de  $(F, \mathcal{D})$  par rapport à  $O$ .
- L'ordonnée  $Y$  de chacun des deux points de  $\varepsilon$  d'abscisse  $c$  vérifie:

$$Y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Sachant que  $p = eh = \frac{e(1-e^2)a}{e}$ , cela donne  $p = (1 - e^2)a$ . Or  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  ce qui donne  $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} p &= (1 - e^2)a \\ &= \frac{b^2}{a^2}a = \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

Donc le paramètre de l'ellipse est  $p = \frac{b^2}{a}$ .



L'ellipse d'équation réduite  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$  peut se paramétrer par:

$$(X = a \cos \theta, \quad Y = b \sin \theta) \quad \text{avec} \quad \theta \in ] - \pi, \pi [.$$

**Remarque 2.** Lorsque  $a = b \neq 0$ , la courbe d'équation  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$  est le cercle de centre O et de rayon a. Par convention, on dit que c'est une ellipse d'excentricité nulle bien qu'elle ne possède pas de couple de foyer/directrice.

### 3.4 Étude des hyperboles

Soit  $\mathcal{H}$  l'hyperbole d'excentricité  $e > 1$ , de foyer  $F$  et de directrice associée  $\mathcal{D}$ . De même que pour l'ellipse, une équation de  $\mathcal{H}$  dans un repère orthonormé centré en  $F$  s'obtient comme suit:

Comme  $e^2 - 1 > 0$  donc  $1 - e^2 < 0$ . L'équation

$$x^2(1 - e^2) + y^2 - 2he^2x - e^2h^2 = 0$$

devient alors

$$x^2(e^2 - 1) - y^2 + 2he^2x + e^2h^2 = 0$$

et le calcul montre que l'on a

$$\begin{aligned} x^2(e^2 - 1) - y^2 + 2he^2x + e^2h^2 = 0 &\Leftrightarrow (e^2 - 1) \left( x^2 + \frac{2he^2}{e^2 - 1}x \right) - y^2 + e^2h^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^2 - 1) \left( \left( x + \frac{he^2}{e^2 - 1} \right)^2 - \left( \frac{he^2}{e^2 - 1} \right)^2 \right) - y^2 + e^2h^2 = 0 \end{aligned}$$

En posant  $X = x + \frac{he^2}{e^2 - 1}$  et  $Y = y$ , une équation de  $\mathcal{H}$  s'écrit donc:

$$X^2 - \frac{Y^2}{e^2 - 1} = \alpha, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{h^2e^2}{(e^2 - 1)^2} > 0.$$

On obtient ainsi une équation réduite de l'hyperbole en posant  $a = \frac{eh}{e^2 - 1}$  et  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ . On obtient donc

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Dans ce repère orthonormé, le foyer  $F$  a pour coordonnées  $(c, 0)$  avec  $c = \frac{he^2}{e^2 - 1} = ea$ .

Réciproquement, si  $a \neq 0, b \neq 0$ , la courbe d'équation  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormé  $OXY$  est une hyperbole, puisqu'il suffit de prendre  $e > 1$  tel que  $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$  puis  $h = \frac{(e^2 - 1)a}{e}$  pour obtenir l'équation

$$X^2 - \frac{Y^2}{e^2 - 1} = \alpha, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{h^2e^2}{(e^2 - 1)^2} > 0.$$

- L'axe focal  $OX$  est aussi appelé axe transverse. Il coupe l'hyperbole aux deux points de coordonnées  $(a, 0)$  et  $(-a, 0)$ .

Le réel  $a$  s'appelle **demi-axe focal**.

- La droite  $OY$  est aussi un axe de symétrie. On l'appelle **axe non focal ou axe non transverse**. Il ne rencontre pas l'hyperbole. Le réel  $b$  est appelé **demi-axe non focal**.
- Le point  $O$  est centre de symétrie de l'hyperbole. La distance  $c = ea = \sqrt{a^2 + b^2}$  du foyer  $F$  au centre est appelé **distance focale**.
- Par symétrie, il existe un autre couple de foyer-directrice symétrique de  $(F, \mathcal{D})$  par rapport à  $O$ .
- L'ordonnée  $Y$  de chacun des deux points de  $\varepsilon$  d'abscisse  $c$  vérifie la formule:

$$Y^2 = b^2 \left( \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le paramètre de l'hyperbole est donc  $p = \frac{b^2}{a}$ .

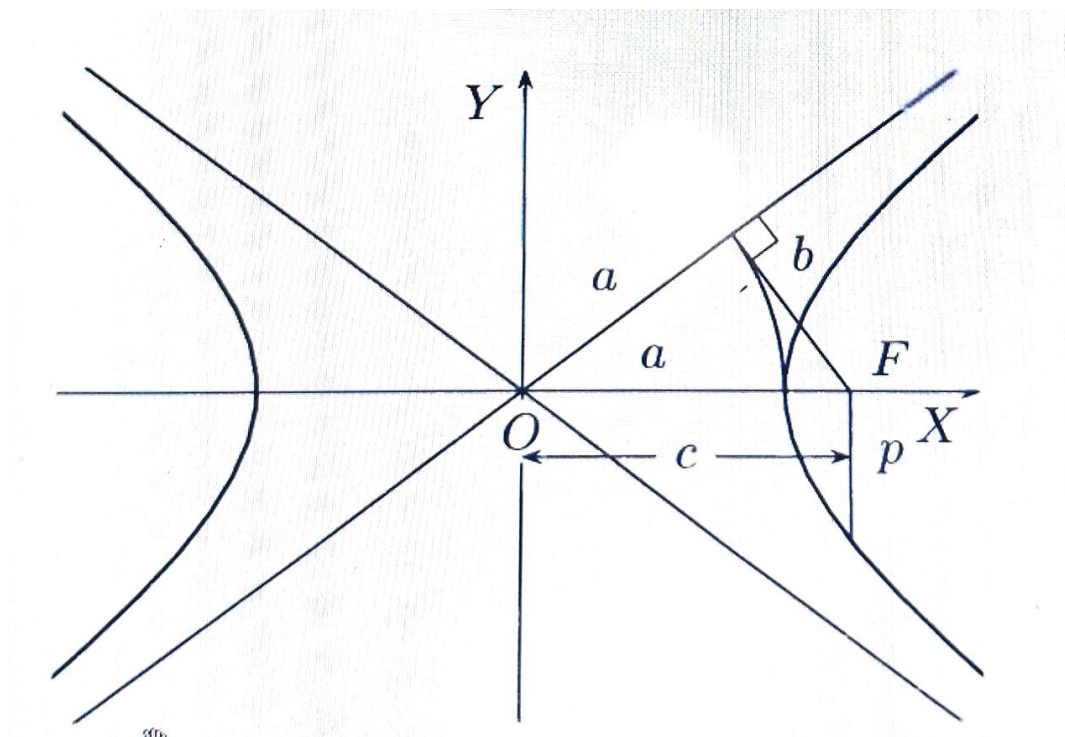
L'hyperbole d'équation réduite  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$  peut se paramétrer par

$$(X = \varepsilon a \cosh t, Y = b \sinh t)$$

avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ .

- La branche correspondant à  $\varepsilon = 1$  appartient au demi plan  $X > 0$ . La quantité  $\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = e^{-t}$  (respectivement  $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = e^t$ ) tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) et on en déduit qu'il y a, pour cette branche, deux asymptotes d'équations  $\frac{Y}{b} = \frac{X}{a}$  et  $\frac{Y}{b} = -\frac{X}{a}$ .
- La branche correspondant à  $\varepsilon = -1$ , appartient au demi-plan  $X < 0$ , et est symétrique de la précédente par rapport à  $O$ . Elle admet donc les mêmes asymptotes.

Les deux asymptotes font un angle  $\pm \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  par rapport à l'axe  $OX$ . On en déduit le schéma suivant.



Les asymptotes sont orthogonales si et seulement si  $b = a$ . On dit alors que l'hyperbole est **équilatère**. Les hyperboles équilatères sont donc les coniques excentricité  $\sqrt{2}$ .

### 3.5 Équation polaire d'une conique de foyer $O$

On utilise les coordonnées polaires dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'équation polaire d'une conique avec origine au foyer s'écrit:

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) \pm 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p > 0 \\ e \geq 0 \end{cases}$$

$p$  est appelé **paramètre** et  $e$  **excentricité** de la conique. Étant donné que la transformation  $\theta - \theta_0 \mapsto \theta_0 - \theta$  laisse invariante la conique, celle-ci présente donc toujours un axe de symétrie, ici l'axe  $\theta = \theta_0$ . Par commodité, nous prendrons l'axe  $Fx$  comme axe de symétrie de sorte que  $\theta_0 = 0$ .

### 3.6 Définition bifocale des ellipses et des hyperboles

Les ellipses et hyperboles ont un centre de symétrie. Elles possèdent donc un autre couple de foyer-directrice  $(F', \mathcal{D}')$ . L'ellipse et l'hyperbole peuvent être définies à l'aide de ses deux foyers. Soient  $F$  et  $F'$  deux points distincts du plan tels que  $\|\overrightarrow{FF'}\| = 2c$  et  $a$  un réel strictement positif.

1. Si  $a > c$ , l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$$

est l'ellipse de foyers  $F$  et  $F'$  et de demi-grand axe  $a$ .

2. Si  $a < c$ , l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$$

est l'hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$  et de demi-axe focal  $a$ .

### 3.7 Définition analytique d'une conique

#### 3.7.1 Définition

**Définition 14.** On appelle conique du plan euclidien  $E$ , toute courbe dont l'équation dans un repère orthonormé, est du type:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

#### 3.7.2 Réduction de l'équation d'une conique

Soit  $\mathcal{C}$  une conique d'équation dans un repère orthonormé

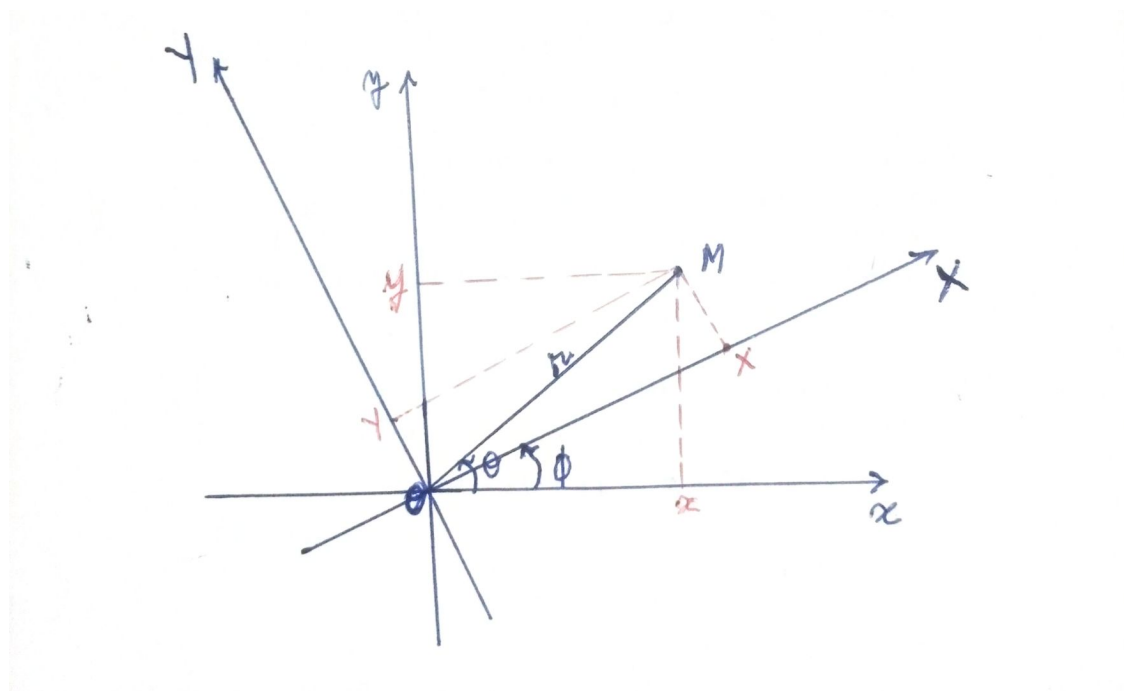
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.1)$$

On a alors le premier résultat décrit par la proposition suivante.

**Proposition 3.** Il existe un repère orthonormé dans lequel  $\mathcal{C}$  possède une équation sans terme en  $xy$ , c'est à dire de la forme:

$$a_1x^2 + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0. \quad (3.2)$$

*Démonstration.* On rappelle d'abord les formules de transformations des coordonnées  $x$  et  $y$  lors d'une rotation d'angle  $\theta$  autour de son centre  $O$ .



On voudrait trouver les expressions des nouvelles coordonnées  $X$  et  $Y$  en fonction des anciennes  $x$  et  $y$ . On sait que dans le repère  $xOy$ , on a les coordonnées polaires  $[r : \theta]$  et on obtient

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Dans le repère  $XOY$ , on a les coordonnées polaires  $[r : \theta - \phi]$  et on obtient

$$\begin{cases} X = r \cos(\theta - \phi) \\ Y = r \sin(\theta - \phi) \end{cases}$$

En développant ces dernières formules à l'aide des formules trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

on obtient alors

$$\begin{cases} X = x \cos \phi + y \sin \phi \\ Y = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système en  $x$  et  $y$  donne

$$\begin{cases} x = X \cos \phi - Y \sin \phi \\ y = X \sin \phi + Y \cos \phi \end{cases} \text{ avec } \phi \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

En injectant les formules de l'équation 3.3 dans (3.1), le coefficient du terme en  $XY$  de l'équation obtenue est

$$2 \cos \phi \sin \phi (c - a) + 2b(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = (c - a) \sin 2\phi + 2b \cos 2\phi.$$

Il suffit donc d'annuler ce coefficient pour se débarrasser du terme en  $XY$ , i.e:

$$(c - a) \sin 2\phi + 2b \cos 2\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2\phi) = -\frac{2b}{c - a}.$$

Si  $a = c$ , il suffit de prendre  $\phi = \frac{\pi}{4}$  et sinon, on prendra  $\phi = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2b}{a-c}\right)$ .

□

Partant de l'équation (3.2), on peut obtenir les équations réduites de l'ellipse, hyperbole et de la parabole en

- effectuant un changement d'échelles  $x \mapsto X$  et  $y \mapsto Y$  et en développant les carrés;
- puis en réalisant une translation d'un vecteur dans le nouveau repère obtenue après la rotation.

On peut voir cela à travers l'exercice résolu suivant.

**Exercice 5.** Pour les coniques suivants, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite pour les cas suivants.

1. l'équation  $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$
2. l'équation  $2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

*Démonstration.* 1. On élimine le terme en  $xy$  par rotation du repère. On fait une rotation d'angle  $\theta$  tel que  $\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} = \sqrt{3}$ , soit une rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . On obtient alors

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X - Y) \\ y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{3}Y) \end{cases} \quad (3.4)$$

En remplaçant les expressions (3.4) dans l'équation initiale et après simplification, on obtient une expression suivante sans le terme en  $XY$

$$\frac{3}{4}X^2 - \frac{1}{4}Y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}X - \frac{Y}{4} = 1.$$

ce qui donne encore

$$\frac{3}{4} \left( X + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( Y + \frac{1}{2} \right)^2 = 1$$

En effectuant une translation d'un vecteur de coordonnées  $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2})$ , on obtient l'équation réduite d'une hyperbole

$$\frac{X'^2}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}} - \frac{Y'^2}{\sqrt{4}} = 1.$$

On a donc une hyperbole dont le centre a pour coordonnées dans le nouveau repère  $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2})$  et dont les asymptotes sont les droites d'équation  $\frac{Y}{b} = \pm \frac{X}{a} \Leftrightarrow Y = \pm 3x$ . Les demi-axes focal et non focal sont  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $b = 2$ .

2. Dans la deuxième équation, les coefficients de  $x^2$  et  $y^2$  sont égaux. On en déduit que le changement de repère appropriée est celui obtenu par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ , soit en posant

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases} \quad (3.5)$$

En remplaçant les expressions (3.5) dans l'équation initiale et après simplification, on obtient

$$X^2 - Y^2 - 2X + 2Y = 1 \Leftrightarrow (X - 1)^2 - (Y - 1)^2 = 1.$$

En effectuant une translation d'un vecteur de coordonnées  $(1, 1)$ , on obtient l'équation réduite d'une hyperbole

$$X^2 - Y^2 = 1$$

de centre  $(1, 1)$  dans le nouveau repère (cad  $F(-c, 0) = (\sqrt{2}, 0)$  avec  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ) dans l'ancien repère. Les asymptotes sont données par

$$(Y - 1) = \pm(X - 1), \quad a = 1, \quad b = 1,$$

les foyers sont de coordonnées  $\pm(\sqrt{2}, 0)$ , les directrices sont  $X = \pm\sqrt{2}$ .

□

**Exercice 6.** *En suivant le modèle de l'exercice précédent, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite pour les cas suivants.*

1.  $x^2 - xy + y^2 = 1$

2.  $\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 - (1 + 3\sqrt{3})x - (3 - \sqrt{3})y + 13 = 0.$

**Définition 15.** *On appelle coniques propres les paraboles, hyperboles et ellipses (y compris les cercles).*

Soit une conique dont une équation dans un repère orthonormé direct est:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.6)$$

Le discriminant de l'équation est par définition

$$\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac).$$

Si l'on prend un nouveau repère orthonormé direct dans lequel les coordonnées d'un point sont  $(X, Y)$ , on obtient des formules de changement de repère du type:

$$\begin{cases} x = X \cos \theta + Y \sin \theta + \lambda \\ y = -X \sin \theta + Y \cos \theta + \mu \end{cases} \quad \text{avec } (\theta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3.$$

Ici, il s'agit d'une rotation d'angle  $\theta$  suivi d'une translation de vecteur  $\vec{v} = (\lambda, \mu)$ . L'équation (3.6) devient alors

$$a'X^2 + 2b'XY + c'Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f' = 0$$

avec

$$\begin{aligned} a' &= a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta - 2b \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \cos 2\theta - b \sin 2\theta \\ b' &= b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (c-a) \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{a-c}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta \\ c' &= a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} \cos 2\theta + b \sin 2\theta \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 b'^2 - a'c' &= \left( \frac{a-c}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta \right)^2 \\
 &- \left( \left( \frac{a+c}{2} \right)^2 - \left( \frac{a-c}{2} \cos 2\theta - b \sin 2\theta \right)^2 \right) \\
 &= b^2 - \left( \frac{a+c}{2} \right)^2 + \left( \frac{a-c}{2} \right)^2 \\
 &= b^2 - ac.
 \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation réduite des coniques propres, on a effectué un changement de repère orthonormé direct (ce qui ne change pas le discriminant) puis on a multiplié l'équation par un scalaire  $\alpha$  non nul (ce qui multiplie le discriminant par  $\alpha^2$ ). Le signe du discriminant est donc indépendant du repère orthonormé. En observant sur l'équation réduite le signe du discriminant, on en déduit que la conique propre d'équation (3.6) dans un repère orthonormé:

- est une ellipse si  $b^2 - ac < 0$ .
- est une hyperbole si  $b^2 - ac > 0$ .
- est une parabole si  $b^2 - ac = 0$ .

**Exemple 30.** La conique d'équation  $xy = \alpha^2$  dans un repère orthonormé (avec  $\alpha \neq 0$ ) est une hyperbole. Ses asymptotes  $Ox$  et  $Oy$  sont orthogonales; il s'agit donc d'une hyperbole équilatère. Le changement de repère orthonormé défini par

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

donne l'équation réduite:

$$\frac{X^2}{2\alpha^2} - \frac{Y^2}{2\alpha^2} = 1.$$

Il est facile de voir que son demi-axe focal est égal à son demi-axe non focal vaut donc  $\alpha\sqrt{2}$  et son excentricité vaut  $\sqrt{2}$ .

On remarque alors les faits suivants

- On ne voit pas sur l'équation initiale si la conique est propre. Néanmoins selon la discussion faite lors de la réduction, on les résultats suivants:

1. si  $b^2 - ac < 0$ , la conique est une ellipse, un point ou l'ensemble vide. On dit qu'elle est de type ellipse
  2. Si  $b^2 - ac > 0$ , la conique est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. On dit qu'elle est de type hyperbole
  3. Si  $b^2 - ac = 0$ , la conique est une parabole, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide. On dit qu'elle est de type parabole.
- **Il y a bien sûr une autre démonstration des résultats précédents (concernant la réduction des coniques) utilisant les valeurs propres et vecteurs propres (cela ne sera pas fait dans ce cours).**

### 3.7.3 Tangente à une conique propre

Soit une conique propre  $\mathcal{C}$ :

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.7)$$

En notant  $(x(t), y(t))$  le paramétrage de  $\mathcal{C}$  sans point singulier, on aura

$$P(x(t), y(t)) = 0.$$

En dérivant cette relation (3.7) par rapport à  $t$ , on obtient

$$(ax + by + d)x' + (bx + cy + e)y' = 0.$$

En tout point  $(x_0, y_0)$ , la conique  $\mathcal{C}$  admet une tangente orthogonale au vecteur

$$(ax_0 + by_0 + d, bx_0 + cy_0 + e)$$

et donc l'équation:

$$(ax_0 + by_0 + d)(x - x_0) + (bx_0 + cy_0 + e)(y - y_0) = 0$$

puisqu'elle passe par  $M_0$ .

Cette equation qui est de la forme:

$$axx_0 + b(xy_0 + x_0y) + cyy_0 + dx + ey = \alpha$$

avec

$$\alpha = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 = -f - dx_0 - ey_0,$$

s'écrit aussi

$$axx_0 + b(xy_0 + x_0y) + cyy_0 + d(x + x_0) + e(y + y_0) + f = 0.$$

### 3.8 Exercices

1. Montrer que l'équation de la tangente à l'ellipse au point  $M(x_0, y_0)$  est donnée par

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

dont le vecteur normal est

$$\vec{n} = \left( \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right).$$

2. Même problème pour l'hyperbole, on a l'équation de la tangente

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

3. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Déterminer le lieu des points  $M$  du plan tels que

$$MI^2 = MA \times MB.$$

4. Soit  $\mathcal{C}$  la conique d'équation

$$x^2 + 2axy + y^2 + 4x - a^2 = 0.$$

- Déterminer, suivant la valeur de  $a$ , le type de  $\mathcal{C}$ .
  - Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une parabole, déterminer le paramètre, le foyer et la directrice.
  - Déterminer pour quelles valeurs de  $a$  la conique  $\mathcal{C}$  est un cercle, dont on donnera le centre et le rayon.
  - Déterminer pour quelles valeurs de  $a$  la conique est la réunion de deux droites.
5. Dans le plan muni d'un repère  $ON$ ,  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points du plan dont la somme des carrés aux trois cotés du triangle  $OAB$  est égale à  $\frac{1}{3}$ .
- Démontrer que  $\mathcal{C}$  est une ellipse dont on donnera son équation réduite
  - Montrer que l'ellipse  $\mathcal{C}$  est tangente aux droites  $(OA)$  et  $(OB)$

# Chapitre 4

## Propriétés métriques des courbes paramétrées

Dans ce chapitre, nous utilisons quelque fois la notation  $(D, f)$  pour dire une courbe paramétrée (ou arc paramétré)

### 4.1 Paramétrage admissible

**Définition 16.** Soit  $(D, f)$  un arc paramétré de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{R}_0$ . Un arc paramétré  $(D', g)$  de classe  $C^k$  est un paramétrage admissible (ou un reparamétrage) de  $(D, f)$  s'il existe une bijection  $\varphi : D \rightarrow D'$ , de classe  $C^k$  ainsi que sa réciproque, telle que  $f = g \circ \varphi$ .

Une telle application  $\varphi$  est appelée **changement de paramétrages** de classe  $C^k$ .

**Exemple 31.** L'arc paramétré défini pour  $t \in ]-\pi, \pi[$  par:  $(x = \cos t, y = \sin t)$  admet comme paramétrage admissible l'arc:

$$\left( x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, y = \frac{2u}{1 + u^2} \right) \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}.$$

Le changement de paramétrage est l'application:

$$\varphi : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \tan \frac{t}{2}.$$

En effet, ici on a  $\varphi(t) = u$ . Pour retrouver la variable  $x$ , on calcule

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi(t)) = f(\tan(t/2)) \\ &= f(u) = \frac{1 - \tan(t/2)^2}{1 + \tan(t/2)^2} = \cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi(t)) = f(\tan(t/2)) \\ &= f(u) = \frac{2 \tan(t/2)}{1 + \tan(t/2)^2} = \sin(t) \end{aligned}$$

**Contre-exemple 1.** *Les applications:*

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

et

$$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$$

définissent deux arcs paramétrés qui ont même support. Comme le point  $(-1, 0)$  admet un seul antécédent par  $f$  et deux antécédents par  $g$  (quand  $t = \pm \frac{\pi}{2}$ ), il ne peut pas exister de bijection  $\varphi$  telle que  $f = g \circ \varphi$ .

## 4.2 Longueur d'arc paramétré

Soient  $t_1 < t_2$  et  $f \in C^k([t_1, t_2], \mathbb{R}^2)$ .

**Définition 17.** *On appelle longueur de l'arc  $([t_1, t_2], f)$  le réel positif:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt.$$

**Proposition 4.** *Si  $([u_1, u_2], g)$  est un reparamétrage admissible de l'arc  $([t_1, t_2], f)$ , avec  $u_1 < u_2$ , alors:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt = \int_{u_1}^{u_2} \|g'(u)\| du.$$

*La longueur d'un arc paramétré est donc indépendante du paramétrage admissible choisi.*

*Démonstration.* Avec les hypothèses, il existe une application  $\varphi : [t_1, t_2] \rightarrow [u_1, u_2]$  bijective, de classe  $C^k$  et telle que  $f = g \circ \varphi$ . Or on sait que la différentielle  $df$  se calcule par

$$df(t) = d(g \circ \varphi) = dg.d\varphi$$

tandis que la dérivée de  $g \circ \varphi$  se calcule par

$$(g \circ \varphi)'(t) = g'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt &= \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi'(t)g'(\varphi(t))\| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |\varphi'(t)| \times \|g'(\varphi(t))\| dt \end{aligned}$$

Le changement de paramétrage  $\varphi$  étant monotone:

- si  $\varphi$  est croissante alors  $u_1 = \varphi(t_1)$  et  $u_2 = \varphi(t_2)$  ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt &= \int_{t_1}^{t_2} \|g'(\varphi(t))\|\varphi'(t) dt \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \|g'(u)\| du. \end{aligned}$$

- si  $\varphi$  est décroissante alors  $u_1 = \varphi(t_2)$  et  $u_2 = \varphi(t_1)$  ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \|g'(\varphi(t))\|\varphi'(t) dt \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \|g'(u)\| du. \end{aligned}$$

□

**Exemple 32.** Si  $A$  et  $B$  sont deux points du plan, le segment  $[AB]$  peut être paramétré par

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto tB + (1-t)A = A + t\overrightarrow{AB}.$$

Comme  $f' = \overrightarrow{AB}$ , la longueur du segment est donc

$$\int_0^1 \|\overrightarrow{AB}\| dt = \|\overrightarrow{AB}\|$$

résultat conforme à ce que l'on pouvait attendre.

## 4.3 Calcul pratique

### 4.3.1 Formules

1. Si la courbe est paramétrée par  $f(t) = (x(t), y(t))$  pour  $t_1 < t < t_2$ , alors sa longueur vaut:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

2. Si la courbe est définie par une représentation cartésienne  $(x, y = \varphi(x))$  pour  $x_1 \leq x \leq x_2$ , alors sa longueur vaut:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

3. Si la courbe a une représentation polaire  $f(\theta) = \rho(\theta) \vec{u}(\theta)$  pour  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , alors  $f'(\theta) = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$  et donc  $\|f'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ , ce qui donne la longueur de la courbe

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta.$$

### 4.3.2 Exemples

1. Si  $R > 0$ , le cercle paramétré sur  $[0, 2\pi]$  par  $t \mapsto (a + R \cos t, b + R \sin t)$  a pour longueur  $2\pi R$ .
2. Si  $a > 0$ , la longueur de l'arc paramétré par  $f(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$  avec  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , vaut:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|f'(t)\| dt &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t} dt \\ &= \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

3. Pour la cardioïde d'équation polaire  $r = a(1 + \cos \theta)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $a > 0$ , on a:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| d\theta &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a. \end{aligned}$$

4. L'ellipse, paramétré par  $f(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$  avec  $I = [0, 2\pi]$ , a pour longueur:

$$\int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt.$$

Cette quantité peut être calculée à l'aide des fonctions élémentaires.

## 4.4 Abscisse curviligne sur un arc orienté

### 4.4.1 Arc paramétré orienté

Étant donné un arc paramétré orienté régulier  $(D, f)$  de classe  $C^k$ . On a vu que les reparamétrages de cet arc sont les arcs paramétrés  $(D', g)$  de classe  $C^k$  pour lesquels il existe un changement de paramétrage  $\varphi$ , de classe  $C^k$  de  $D$  dans  $D'$ , strictement croissant ou strictement décroissant et tel que  $f = g \circ \varphi$ .

**Définition 18.** On appelle **arc paramétré orienté**, un arc  $(D, f)$  pour lequel on n'autorise que les reparamétrages  $(D, g)$  correspondant à des applications  $\varphi$  strictement croissantes.

## Tangente orienté

Si  $(D, f)$  est un arc paramétré orienté régulier et  $M(t)$  le point de paramètre  $t$  de cet arc, le vecteur non nul  $f'(t)$  est un vecteur directeur de la tangente à l'arc en  $M(t)$ . Il définit donc une orientation de cette tangente que l'on appelle alors tangente orienté en  $M(t)$ .

**Proposition 5.** L'orientation de la tangente en un point ne dépend pas du paramétrage choisi de cet arc orienté régulier.

*Démonstration.* Si  $(D', g)$  est un reparamétrage de cet arc régulier, il existe un changement de paramétrage  $\varphi$  de classe  $C^k$  de  $D$  dans  $D'$  strictement croissant et tel que  $f = g \circ \varphi$ , et l'on a:

$$\forall t \in D, f'(t) = \varphi'(t)g'(\varphi(t)).$$

Comme  $\varphi'(t) > 0$ , les vecteurs  $f'(t)$  et  $g'(\varphi(t))$  définissent la même orientation de la tangente en  $M(t)$ .

□

## Repère de Frenet

Étant donné un arc orienté régulier  $(D, f)$ , on note:

- $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$  le vecteur unitaire dirigeant la tangente orientée en  $M(t)$ .
- $\vec{N}(t)$ , le vecteur unitaire directement perpendiculaire à  $\vec{T}(t)$ , c'est à dire le vecteur tel que  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$  soit une base orthonormée directe du plan.

**Définition 19.** *Le repère orthonormée direct  $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  est appelée **repère de Frénet** de l'arc orientée  $(D, f)$  en  $M(t)$ .*

### 4.4.2 Abscisse curviligne

Soit  $(D, f)$  un arc orienté de classe  $C^k$ .

**Définition 20.** *On appelle **abscisse curviligne** de l'arc orienté  $(D, f)$ , toute application  $\sigma$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  telle que si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux éléments de  $D$  vérifiant  $t_1 < t_2$ , alors la longueur de l'arc  $([t_1, t_2], f)$  soit égale  $\sigma(t_2) - \sigma(t_1)$ .*

Soit  $\sigma$  une abscisse curviligne de  $(D, f)$ . Pour  $t_0 \in D$ , on a

- $\forall t > t_0, \sigma(t) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$
- $\forall t < t_0, \sigma(t) = \sigma(t_0) - \int_t^{t_0} \|f'(u)\| du,$  et donc

$$\forall t \in D, \sigma(t) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

On en déduit les résultats suivants

- Proposition 6.**
1. *Les abscisses curvilignes de l'arc orienté  $(D, f)$  sont les primitives de la fonction  $\|f'\|$ .*
  2. *Les abscisses curvilignes de l'arc orientée  $(D, f)$  sont égales à une constante additive près.*
  3. *Toute abscisse curviligne  $\sigma$  de l'arc orientée  $(D, f)$  est dérivable et vérifie:*

$$\forall t \in D, \frac{d\sigma}{dt}(t) = \|f'(t)\|.$$

On remarque les faits suivants.

1. Si  $t_0$  est un élément de  $D$ , il existe une et une seule abscisse curviligne  $\sigma$  telle que  $\sigma(t_0) = 0$ . Elle est appelée abscisse curviligne d'origine  $M(t_0)$  et vérifie:

$$\forall t \in D, \quad \sigma(t) = \int_{t_0}^t \|f'(v)\| dv.$$

2. Soient  $(D', g)$  un reparamétrage admissible de l'arc orienté  $(D, f)$  et  $\varphi : D \rightarrow D'$  tel que  $f = g \circ \varphi$  un changement de paramétrages de classe  $C^k$ . Si  $u_0 = \varphi(t_0)$  et  $u = \varphi(t)$  alors

$$\begin{aligned} \sigma_f(t) &= \int_{t_0}^t \|f'(v)\| dv \\ &= \int_{t_0}^t \varphi'(v) \|g'(\varphi(v))\| dv \quad \text{car } \varphi' > 0 \\ &= \int_{t_0}^t \|g'(\varphi(v))\| \varphi'(v) dv \\ &= \int_{u_0}^u \|g'(\omega)\| d\omega \quad \text{où } \omega = \varphi(v), \quad d\omega = \varphi'(v) dv \\ &= \sigma_g(u), \end{aligned}$$

ce que l'on peut exprimer en disant que l'abscisse curviligne est indépendante du paramétrage admissible de l'arc orientée  $(D, f)$ .

3. Un calcul similaire montre que si l'on change l'orientation d'une courbe, les nouvelles abscisses curvilignes sont les opposées des anciennes.

## Calcul pratique de l'abscisse curviligne

- En représentation cartésienne  $f(x) = (x, y(x))$ , on a:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \|f'(x)\| = \sqrt{1 + y'^2}.$$

- Si l'arc est paramétré en cartésiennes par  $f(t) = (x(t), y(t))$ , alors:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \|f'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

- Si l'arc est paramétré en polaires par  $f(\theta) = \rho(\theta) \vec{u}(\theta)$ , alors

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \|f'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

**Exemples 1.** Soit  $a > 0$ .

1. Pour  $x(t) = a \cos^3 t$  et  $y(t) = a \sin^3 t$  avec  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a\sqrt{6 \cos^2 t \sin^2 t} = \frac{3a}{2} |\sin 2t| = \frac{3a}{2} \sin 2t$$

et donc

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sigma(t) = -\frac{3a}{2} \cos 2t + k.$$

2. Pour la cardioïde d'équation polaire  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on a:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = a\sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|.$$

En prenant le point  $M(0)$  comme origine des abscisses curvilignes, on a:

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \sigma(\theta) = \int_0^\theta 2a \cos \frac{t}{2} dt = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \sigma(\theta) = \sigma(\pi) + \int_\pi^\theta 2a \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 8a - 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

On remarque que l'utilisation de  $[-\pi, \pi]$  comme domaine de variations de  $\theta$  aurait évité de valeur absolue et donné:

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \sigma(\theta) = \int_0^\theta 2a \cos \frac{t}{2} dt = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

## 4.5 Paramétrage par abscisse curviligne

On considère un arc orienté régulier  $(D, f)$ . Si  $\sigma$  est une abscisse curviligne de l'arc régulier  $(D, f)$  de classe  $C^k$ , alors on peut montrer que l'application  $\sigma$  est un changement de paramétrages de classe  $C^k$  strictement croissant de l'intervalle  $D$  sur l'intervalle  $D' = \sigma(D)$ .

**Proposition 7.** Avec les notations de la proposition précédente, si l'on pose:

$$g : D' \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto f(\sigma^{-1}(s))$$

alors l'arc  $(D', g)$  est un reparamétrage de l'arc orienté  $(D, f)$ . Ce paramétrage est dit normal (ou naturel), c'est à dire qu'elle vérifie:

$$\forall s \in D', \quad \|g'(s)\| = 1.$$

Le paramétrage  $(D', g)$  est appelé paramétrage de l'arc  $(D, f)$  par abscisse curviligne.

*Démonstration.* – Par définition, on a la relation  $f = g \circ \sigma$ , le changement de paramétrage  $\sigma$  étant strictement croissant de  $D$  dans  $D'$ , ce qui montre que  $(D', g)$  est un reparamétrage de l'arc orienté  $(D, f)$ .

– En dérivant la relation  $f = g \circ \sigma$ , on obtient

$$\forall t \in D, f'(t) = \sigma'(t)g'(\sigma(t)),$$

et donc

$$\forall t \in D, \|g'(\sigma(t))\| = \frac{\|f'(t)\|}{\sigma'(t)} = 1 \quad \text{car } \sigma'(t) = \|f'(t)\|, \quad \sigma'(t) > 0,$$

c'est à dire

$$\forall s \in D', \|g'(s)\| = 1.$$

□

## 4.6 Courbure d'un arc orienté régulier

Dans cette section, on considère un arc orienté de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ , dont  $(D', g)$  est un paramétrage par l'abscisse curviligne.

### 4.6.1 Courbure, rayon de courbure

En dérivant la formule  $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ , on obtient

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 2 \langle \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \rangle = 0.$$

Le vecteur  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  est donc orthogonal à  $\vec{T}$ , et par conséquent colinéaire à  $\vec{N}$ . On peut donc donner la définition suivante:

**Définition 21.** Si  $M(s)$  est un point de paramètre  $s$  de l'arc  $(D', g)$ , il existe un unique réel, noté  $\gamma(s)$  et appelé **courbure** de l'arc au point  $M(s)$ , tel que:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\vec{N}(s).$$

**Définition 22.** Le point  $M(s)$  de paramètre  $s$  de l'arc  $(D', g)$  est **birégulier** si  $\gamma(s) \neq 0$ . On appelle alors **rayon de courbure** au point  $M(s)$  noté,  $\mathcal{R}(s)$ , le réel  $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$ .

Une courbe est birégulière si tous ses points sont biréguliers.

On peut encore énoncer la définition d'un centre de courbure.

**Définition 23.** On appelle **centre de courbure** en un point birégulier  $M(s)$ , le point  $C(s)$  tel que

$$\overrightarrow{M(s)C(s)} = \mathcal{R}(s)\vec{N}(s).$$

Le lieu des centres de courbure d'une courbe  $\Gamma$  birégulière est appelé **développée** de  $\Gamma$ .

## 4.6.2 Formules de Frénet

On considère  $\alpha$  une fonction de classe  $C^{k-1}$  sur  $D'$  vérifiant

$$\vec{T} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2.$$

C'est à dire  $(\widehat{Ox, \vec{T}}) = \alpha$  et donc  $(\widehat{Ox, \vec{N}}) = \alpha + \frac{\pi}{2}$ . On a alors les résultats suivants:

**Proposition 8.** En tout point d'un arc régulier, on a:

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}.$$

*Démonstration.* On doit comprendre que:

– En dérivant la relation  $\vec{T} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$ , on obtient:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}(-\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_2) = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}.$$

Par définition 21 de la courbure, on adonc  $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ .

– En dérivant la relation  $\vec{N} = -\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_2$ , on obtient:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}(-\cos \alpha \vec{e}_1 - \sin \alpha \vec{e}_2) = -\frac{d\alpha}{ds} \vec{T}$$

et donc  $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}$ .

□

On remarque ce qui suit:

1. En supposant l'arc  $(D', g)$  birégulier, on a  $\frac{d\alpha}{ds} = \gamma \neq 0$  et l'application  $\alpha$  est donc une bijection strictement monotone de  $D'$  sur  $\alpha(D')$ , de classe  $C^{k-1}$  ainsi que sa réciproque. On peut donc inverser l'application  $\alpha$  et définir  $s$  comme fonction dérivable de  $\alpha$ , ce qui permet d'écrire:

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

2. Si  $C$  est le centre de courbure au point  $M(x, y)$ , on a:

$$\overrightarrow{MC} = \mathcal{R}\vec{N} = \frac{ds}{d\alpha}\vec{N} \quad \text{avec} \quad \vec{N} = -\frac{dy}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dx}{ds}\vec{e}_2.$$

Donc les coordonnées  $(X, Y)$  de  $C$  sont telles que

$$\begin{cases} X - x = -\frac{dy}{ds}\mathcal{R} \\ Y - y = \frac{dx}{ds}\mathcal{R} \end{cases} \iff \begin{cases} X - x = -\frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\alpha} \\ Y - y = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} X - x = -\frac{dy}{d\alpha} \\ Y - y = \frac{dx}{d\alpha} \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} X = x - \frac{dy}{d\alpha} \\ Y = y + \frac{dx}{d\alpha} \end{cases}$$

### 4.6.3 Interprétation cinématique

Dans l'étude d'un mouvement  $t \mapsto M(t)$ , le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$  représente la vitesse du point et le vecteur  $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$  son accélération. On peut exprimer ces deux vecteurs dans la base de Frenet  $(\vec{T}, \vec{N})$ :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T}$$

où  $v$  représente la vitesse scalaire du point.

Pour l'accélération, il suffit de dériver cette dernière égalité, ce qui donne:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + v\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \\ &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N} \quad \text{car } \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{ds}{dt}\gamma\overrightarrow{N} = v\frac{1}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N} = \frac{v}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N}.\end{aligned}$$

Dans cette formule, le terme  $\frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}$  représente l'**accélération tangentielle** et indique les variations de la norme du vecteur vitesse. Le deuxième terme est l'**accélération centripète** qui indique les variations de la direction du vecteur vitesse.

## 4.7 Calculs pratiques en coordonnées cartésiennes

Dans la pratique, une courbe est donnée par un paramétrage qui n'est pas nécessairement normal. Nous allons voir comment calculer alors le repère de Frenet et la courbure.

Soit  $(D, f)$  un arc orienté dont on note  $s$  une abscisse curviligne.

### 4.7.1 Abscisse curviligne et repère de Frenet

En normant le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (x', y')$ , on obtient:

- $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  car on sait que  $\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\| = \|\frac{ds}{dt}\overrightarrow{T}\| = \|\frac{ds}{dt}\|$  et  $\|\overrightarrow{T}\| = 1$ .
- $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a^2 + b^2 = 1$ .
- $\overrightarrow{N} = -b\overrightarrow{e}_1 + a\overrightarrow{e}_2$  qui est le vecteur unitaire tel que  $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$  soit une base orthonormée directe.

Par intégration, on peut trouver une expression de  $s$  en fonction de  $t$ .

### 4.7.2 Détermination de l'angle $\alpha$

$$\cos \alpha = a = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = b = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

### 4.7.3 Courbure

- Si l'on peut déterminer une expression de  $\alpha$  en fonction de  $t$ , on a :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (4.1)$$

- S'il n'existe pas d'expression simple de  $\alpha$  en fonction de  $t$ , il est préférable de dériver, lorsqu'elle a un sens, l'égalité :

$$\tan \alpha = \frac{y'}{x'}$$

ce qui permet d'obtenir  $\frac{d\alpha}{dt}$  pour utiliser la formule (4.1).

- On peut aussi utiliser les relations :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma \frac{ds}{dt} \vec{N} \quad \text{ou} \quad \left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}, \vec{N} \right\rangle = \gamma \frac{ds}{dt},$$

la deuxième permettant, lors du calcul de  $\frac{d\vec{T}}{dt}$ , de ne pas calculer les termes qui sont colinéaires à  $\vec{T}$ .

- On peut également écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{OM}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \vec{T} \\ \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \gamma \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{N} \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Det} \left( \frac{d\vec{OM}}{dt}, \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right) = \gamma \left( \frac{ds}{dt} \right)^3$$

ce qui donne :

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{car} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

### 4.7.4 Exemples

1. Pour l'astroïde paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in D = ]0, \frac{\pi}{2}[$$

on a :

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t \quad \text{et} \quad y' = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Ce qui donne :

- $\frac{ds}{dt} = 3a \sin t \cos t > 0$ , l'arc est donc régulier,
- Puisque  $\vec{T} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{OM}}{dt}$  ( ce qui donne aussi  $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$  ), on obtient :

$$\vec{T} = -\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{N} = -\sin t \vec{e}_1 - \cos t \vec{e}_2,$$

on peut donc prendre  $\alpha = \pi$  ( on fait de même pour  $\vec{N}$  ).

- $\gamma = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{3a \sin t \cos t}$  et  $\mathcal{R} = -3a \sin t \cos t$ .

2. Pour l'ellipse paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in [0, 2\pi],$$

on a :

- $\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} > 0$  et l'arc régulier car  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ .
- $\vec{T} = -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \vec{e}_1 + \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \vec{e}_2$  car  $\vec{T} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{OM}}{dt}$  et  $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$ .
- $\vec{N} = -\frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \vec{e}_1 - \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \vec{e}_2$ .

- En dérivant l'expression de  $\vec{T}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) (-a \sin t \vec{e}_1 + b \cos t \vec{e}_2) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-a \cos t \vec{e}_1 - b \sin t \vec{e}_2) \end{aligned}$$

et donc :

$$\left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t).$$

Or

$$\left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}, \vec{N} \right\rangle = \left\langle \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt}$$

ce qui donne :

$$\mathcal{R} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

- Le centre de courbure en  $M$  est défini par:

$$\overrightarrow{MC} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \overrightarrow{N}$$

et donc

$$C(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right).$$

Par la suite la développée d'une ellipse est à une affinité près, une astéroïde.

3. Les formules qui donnent le vecteur normal et la courbure en fonction des dérivées de  $x$  et  $y$  permettent d'exprimer les coordonnées du centre de courbure:

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \quad \text{et} \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}$$

Ces expressions permettent un tracé informatique de la développée, par exemple le cas d'une ellipse.

## 4.8 Calcul pratique en coordonnées polaires

Pour une courbe définie en coordonnées polaires par  $r = \rho(\theta)$ , au lieu d'appliquer les résultats précédents, il est beaucoup plus judicieux de faire les calculs à l'aide du repère mobile  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

En dérivant l'égalité  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$ , on obtient  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$ .

### 4.8.1 Abscisse curviligne et repère de Frenet

En normant le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$ , on obtient:

- $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$
- $\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = a \vec{u} + b \vec{v}$ , avec  $a^2 + b^2 = 1$ ,
- $\vec{N} = -b \vec{u} + a \vec{v}$ .

### 4.8.2 Détermination de l'angle $\alpha$

On a  $\alpha = \theta + V[2\pi]$  où  $V$  est une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{T})$ .

### 4.8.3 Courbure en $M(\theta)$

- Si l'on peut déterminer une expression de  $V$  en fonction de  $\theta$ , on a

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\theta + V)}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}. \quad (4.2)$$

- S'il n'existe pas d'expression simple de  $\alpha$  en fonction de  $\theta$  on peut dériver:

$$\cotan V = \frac{\rho'}{\rho}$$

ce qui donne  $\frac{dV}{d\theta}$  et permet d'utiliser la formule (4.2)

- On peut également utiliser la formule:

$$\text{Det} \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} \right) = \gamma \left( \frac{ds}{d\theta} \right)^3$$

qui donne, en calculant le produit mixte dans la base orthonormée  $(\vec{u}, \vec{v})$ :

$$\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

puisque

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = (\rho'' - \rho)\vec{u} + 2\rho'\vec{v}.$$

### 4.8.4 Exemples

1. Pour la cardioïde définie par  $\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on sait que  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v} = \frac{ds}{d\theta}\vec{T}$  et on a:

$$\rho'\vec{u} + \rho\vec{v} = -a \sin \theta \vec{u} + a(1 + \cos \theta)\vec{v} = 2a \cos \frac{\theta}{2} \left( -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v} \right),$$

ce qui donne

- $\frac{ds}{d\theta} = 2a \cos \frac{\theta}{2}$ ,
- $\vec{T} = -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}$  et  $\vec{N} = -\cos \frac{\theta}{2} \vec{u} - \sin \frac{\theta}{2} \vec{v}$
- $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$  et donc  $\alpha = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$  car  $\alpha = \theta + V[2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \theta + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)[2\pi] = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ .

$$- \gamma = \frac{d\alpha}{d\theta} \times \frac{d\theta}{ds} = \frac{3}{4a \cos \frac{\theta}{2}} \text{ et } \mathcal{R} = \frac{4a}{3} \cos \frac{\theta}{2}.$$

2. Pour la courbe définie par  $\rho(\theta) = ae^{m\theta}$  avec  $m \neq 0$  on a :

$$- \frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{m^2 + 1}e^{m\theta}$$

$$- \vec{T} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \vec{u}(\theta) + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \vec{v}(\theta)$$

- L'angle  $V$  est donc constant et par suite  $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$ .

$$- \gamma = \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a\sqrt{m^2+1}e^{m\theta}} \text{ et } \mathcal{R} = a\sqrt{m^2+1}e^{m\theta}.$$

- Le centre de courbure en  $M$  est défini par :

$$\vec{MC} = ae^{m\theta} \sqrt{m^2+1} \vec{N} = -ae^{m\theta} \vec{u} + mae^{m\theta} \vec{v},$$

ce qui donne :

$$\vec{OC} = mae^{m\theta} \vec{v} = mae^{m\theta} \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}).$$

## 4.9 Exercices corrigés

Certaines solutions des exercices proposés ici sont à compléter par des calculs pour savoir d'où viennent ces résultats.

1. Sans calculer complètement, démontrer que la longueur des deux courbes suivantes sont égales ( $a > 0$ ):

a) L'ellipse d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = 4a^2$

b) Le treffle à quatre feuilles d'équation polaire

$$\rho(\theta) = a \cos 2\theta \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

### Solution

a) On commence à paramétrer l'ellipse. On a en effet,

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 = 1.$$

On pose donc  $\cos t = \frac{x}{2a}$  et  $\sin t = \frac{y}{2a}$ . L'ellipse est donc paramétré par  $t \mapsto (2a \cos t, 2a \sin t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ . Sa longueur est donc égale à

$$l_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 t + 4a^2 \cos^2 t} dt.$$

b) On applique la formule du cours: sachant que  $\rho'(\theta) = -2a \sin 2\theta$ , on trouve:

$$l_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2(2\theta) + a^2 \cos^2(2\theta)} d\theta.$$

Pour prouver que les deux intégrales sont égales, on fait un changement de variables  $t = 2\theta$  dans  $l_2$  et on trouve

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt \\ &= l_1 \end{aligned}$$

2. Paramétrer le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ .

**Solution**

L'équation de ce cercle est  $x^2 + y^2 = R^2$ . On a donc

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1.$$

En posant  $\cos t = \frac{x}{R}$  et  $\sin t = \frac{y}{R}$ , on voit que le cercle est paramétré par la fonction

$$g : t \mapsto (R \cos t, R \sin t).$$

3. Déterminer le paramétrage normale (naturel) du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ .

**Solution**

Sachant le premier paramétrage défini par la fonction  $g$ , on cherche ensuite le paramétrage  $t \mapsto f(t)$  du cercle tel que  $\|f'(t)\| = 1$  pour tout réel  $t$ . Or l'abscisse curviligne est une primitive de l'expression  $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = R$  d'après la fonction  $g : t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$ . Soit donc  $s = \varphi(t) = Rt$ . On en déduit la réciproque de  $\varphi$  qui est  $\varphi^{-1}(s) = \frac{s}{R}$  et le paramétrage normal (naturel) est donné par  $f = g \circ \varphi^{-1}$  soit donc

$$f(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right).$$

Ou bien pour le rendre normal (naturel), on calcule

$$s(t) = \int_0^t \|f'(u)\| du = \int_0^t R du = Rt.$$

Donc,  $s(t) = Rt$ , ce qui donne  $t = \frac{s}{R}$ . On obtient

$$f : s \mapsto f(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right).$$

On dit donc que le paramétrage  $([0, 2\pi], f)$  est un paramétrage de l'arc  $([0, 2\pi], g)$  par l'abscisse curviligne.

4. Calculer la longueur de la boucle de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

### Solution

Il n'est pas nécessaire d'étudier toute la courbe, mais plutôt déterminer son point double pour déterminer les bornes d'intégration. Ainsi on cherche donc  $s \neq t$  tels que  $x(s) = x(t)$  et  $y(s) = y(t)$ . On résout le système suivant

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 3s^2 - 1 \\ 3t^2 - t = 3s^2 - s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On obtient donc un point double obtenu pour les valeurs du paramètre valant  $-\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{3}$ . La longueur de la boucle est donc

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{9t^2 + 1} dt = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{U.L}$$

5. La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant homogène, tenu a ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour equation  $y = \cosh(x)$ . Déterminer la longueur d'un arc de chaînette. Préciser le repère de Frenet et la courbure en un point.

### Solution

Posons  $f(t) = (t, \cosh(t))$  un paramétrage de la courbe. On a  $f'(t) = (1, \sinh(t))$ .  $f''(t) = (0, \cosh(t))$  de sorte que

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t.$$

Ainsi, la longueur de l'arc de chaînette comprise entre les points  $x_1$  et  $x_2$  est

$$\int_{x_1}^{x_2} \cosh(t) dt = \sinh(x_2) - \sinh(x_1).$$

Le repère de Frenet en un point  $M(t)$  est donnée par

$$\vec{T}(t) = \left( \frac{1}{\cosh(t)}, \tanh(t) \right) \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \left( -\tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right).$$

La courbure vaut donc:

$$\gamma(t) = \frac{\cosht}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

# Chapitre 5

## Introduction aux surfaces régulières

Dans ce qui suit, on se place dans un espace affine euclidien  $E$  de dimension 3.

### 5.1 Définitions

On se donne un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et une fonction

$$P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (5.1)$$

de classe  $C^k$ . On impose à la fonction  $P$  d'être injective (on exclut les points multiples) et aux vecteurs  $D_u P := \frac{\partial P}{\partial u}$  et  $D_v P := \frac{\partial P}{\partial v}$  d'être linéairement indépendants pour tout couple de paramètres  $(u, v) \in \Omega$ .

**Définition 24.** *On appelle paramétrage de classe  $C^k$  la donnée du couple  $(\Omega, P)$  remplissant les conditions ci-dessus ou simplement la donnée de la fonction définie par (5.1).*

**Définition 25.** *On appelle portion régulière de surface l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $P$ , c'est à dire  $\{P(u, v) : (u, v) \in \Omega\}$ .*

Une portion régulière de surface peut être paramétrée par plusieurs fonctions. Plus précisément, on dit que  $(\Omega, P)$  et  $(\Omega', P)$  sont équivalents s'il existe un changement de variables régulier d'ordre  $k$  entre  $\Omega$  et  $\Omega'$  tel que

$$P'(u', v') = P(u(u', v'), v(u', v')).$$

## 5.2 Exemples

1. Soit  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  et la fonction  $P$  définie par

$$P(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = \sin u \cos v \\ y(u, v) = \sin u \sin v \\ z(u, v) = \cos v \end{cases}$$

En effet, on a

$$D_u P(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, 0)$$

$$D_v P(u, v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, -\sin v)$$

$$D_u P \wedge D_v P = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos v).$$

Il est facile de vérifier que

$$D_u P \wedge D_v P \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in \Omega.$$

Autrement dit les composantes de  $D_u P \wedge D_v P$  ne s'annulent pas simultanément.

2. Soit  $\Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$  et la fonction  $P$  définie par

$$P(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sin u \cos v \end{cases}$$

Un paramétrage de ce type est appelé **paramétrage par des coordonnées**.

**Définition 26.** On appelle **surface** une réunion des portions régulières de surface telle que l'intersection de deux quelconques d'entre elles soit une sous-portion régulière de surface de chacune d'entre elles qu'on peut alors rapporter indifféremment aux paramètres de l'une ou l'autre.

Dans le cas d'un paramétrage par des coordonnées  $P(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , la relation  $z = f(u, v)$  est une équation cartésienne de la portion régulière de surface. Dans le cas d'un paramétrage  $P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  si on élimine les paramètres  $u$  et  $v$ , on obtient une relation  $F(x, y, z) = 0$  à laquelle satisfont les points de la portion régulière de surface.

Il faut cependant noter que l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une relation  $F(x, y, z) = 0$  n'est en général pas une portion régulière de surface mais plutôt une surface (voir en analyse, le théorème des fonctions implicites).

### 5.3 Tangente et normale

On commence par exploiter ce résultat avant de définir une tangente.

**Proposition 9.** *Soit  $(\Omega, P)$  un paramétrage d'une portion régulière de surface  $\Sigma$ . Si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  dans un ouvert  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  telle que  $(u(t), v(t)) \in \Omega$  pour tout  $t \in ]a, b[$ , alors  $P(u(t), v(t))$  est une courbe sur  $\Sigma$  à condition que  $D_t u$  et  $D_t v$  ne s'annulent pas simultanément.*

*Démonstration.* La direction de la tangente sur cette courbe au point  $P(u(t), v(t))$  s'obtient en dérivant  $P(u(t), v(t))$  par rapport à  $t$ . On obtient un vecteur

$$(D_t u)_t [D_u P]_{(u(t), v(t))} + (D_t v)_t [D_v P]_{(u(t), v(t))}.$$

Ce vecteur est toujours non nul car vu nos hypothèses,  $D_u P$  et  $D_v P$  sont linéairement indépendants et donc  $D_t u$  et  $D_t v$  ne s'annulent pas simultanément. Ainsi, si  $(u_0, v_0) \in \Omega$  et si  $P(u_0, v_0)$  est un point de  $\Sigma$ , alors les vecteurs tangents au point  $P(u_0, v_0)$  des courbes situées sur  $\Sigma$  et passant par  $P(u_0, v_0)$  sont combinaisons linéaires de  $[D_u P]_{(u_0, v_0)}$  et  $[D_v P]_{(u_0, v_0)}$   $\square$

**Définition 27.** *On appelle plan tangent à  $\Sigma$  au point  $P(u_0, v_0)$ , le plan noté  $T_{P(u_0, v_0)}\Sigma$  et défini par*

$$T_{P(u_0, v_0)}\Sigma = P(u_0, v_0) + \langle [D_u P]_{(u_0, v_0)}, [D_v P]_{(u_0, v_0)} \rangle.$$

*Il contient des vecteurs tangents en  $P(u_0, v_0)$  aux courbes situées sur  $\Sigma$ .*

On peut également définir une normale unitaire au plan tangent.

**Définition 28.** *Associé au paramétrage  $(\Omega, P)$ , le vecteur unitaire normal au plan tangent (ou à  $\Sigma$  au point  $P(u_0, v_0)$ ) est donné par*

$$N_{(u_0, v_0)} = \frac{[D_u P]_{(u_0, v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0, v_0)}}{\|[D_u P]_{(u_0, v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0, v_0)}\|}.$$

Un autre paramétrage équivalent pourrait donner un vecteur unitaire normal  $-N_{(u_0, v_0)}$ . Choisir l'un de ces deux vecteurs normaux revient à orienter la portion régulière de surface.

**Définition 29.** *Une surface orientable est une surface dont la normale unitaire  $N$  choisie dépend continûment de  $P \in \Sigma$ .*

## 5.4 Exemples de surfaces

### 5.4.1 Surface coniques

Un cône est l'union des droites passant par un point fixe  $Q$  et s'appuyant sur une courbe  $\Gamma$  de paramétrage  $(\Omega, P)$  ne contenant pas  $Q$ . On obtient le paramétrage

$$R(u, \lambda) = (1 - \lambda)Q + \lambda P(u)$$

avec  $u \in \Omega$  et  $\lambda \in ]0, +\infty[$  ou  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ou  $]0, 1[$  ou encore  $] - 1, 0[ \cup ]0, 1[$ .

Les droites  $(QP(u))$  sont des génératrices. Pour assurer à  $R$  d'être injectif, il faut que  $\overrightarrow{QP(u)}$  et  $\overrightarrow{QP(u')}$  soient linéairement indépendants pour tous  $u, u' \in \Omega, u \neq u'$ .

Les dérivées partielles sont

$$D_u R = \lambda D_u P \quad \text{et} \quad D_\lambda R = -Q + P(u) = \overrightarrow{QP(u)}.$$

Ainsi pour avoir une portion régulière de surface, il faut que  $D_u R$  et  $D_\lambda R$  ou simplement  $\overrightarrow{QP(u)}$  et  $D_u R$  soient linéairement indépendants pour tout  $t \in \Omega$ .

**Exemple 33.** *Le paramétrage  $(1 - \lambda, \lambda \sin u, \lambda u)$ , avec  $u \in ] - 2\pi, 2\pi[$  et  $\lambda \in ] - 1, 1[ \setminus \{0\}$  définit une surface conique.*

### 5.4.2 Surface de révolution

Une surface de révolution s'obtient par rotation d'une courbe  $\Gamma$  autour d'un axe  $\mathcal{D}$  située dans le plan de la courbe. Supposons que la courbe se situe dans le plan  $O+\rangle e_1, e_2\langle$  et que  $\mathcal{D}$  coïncide avec  $O+\rangle e_3\langle$ . Dans ce cas, un point de  $\Gamma$  est de la forme

$$P(u) = (f(u), 0, g(u)), \quad u \in \Omega$$

et en effectuant la rotation, on obtient

$$Q(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in \Omega, v \in ]0, 2\pi[.$$

On trouve alors

$$D_u Q = ([D_u f]_u \cos v, [D_u f]_u \sin v, [D_u g]_u)$$

$$D_v Q = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0).$$

D'où les calculs donnent

$$D_u Q \wedge D_v Q = (f(u)[D_u g]_u \cos v, -f(u)[D_u g]_u \sin v, f(u)[D_u f]_u)$$

et

$$\|D_u Q \wedge D_v Q\| = f^2 ((D_u f)^2 + (D_u g)^2).$$

Puisque  $\Gamma$  est une courbe, alors  $((D_u f)^2 + (D_u g)^2)$  n'est jamais nul et donc, on a une portion régulière de surface si  $f(u) \neq 0$  pour tout  $u \in \Omega$ , c'est à dire si  $\Gamma$  n'intersecte pas l'axe de rotation.

**Exemple 34.** *Le paramétrage  $((2+\cos u) \cos v, (2+\cos u) \sin v, u)$ , pour  $u, v \in ]0, 2\pi[$  définit une surface de révolution. Il s'agit d'une surface obtenue en faisant une rotation de la courbe  $(f(u), 0, g(u))$  autour de l'axe  $e_3$ .*

## 5.5 Quadriques

**Définition 30.** *On appelle **quadrique** de  $E$  toute surface  $Q$  possédant dans un repère orthonormée une équation du type*

$$\underbrace{a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2a_4 xy + 2a_5 yz + 2a_6 xz}_{q} + \underbrace{b_1 x + b_2 y + b_3 z}_{l} + c = 0 \quad (5.2)$$

où les nombres  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  ne sont pas nuls.

Le premier membre de l'équation (5.2) est un polynôme du second degré donnée par la somme d'une forme quadratique, d'une forme linéaire et d'une constante.

On écrit vectoriellement cette équation sous la forme:

$$q(\overrightarrow{om}) + l(\overrightarrow{om}) + j = 0 \quad (5.3)$$

où  $q$  est la forme quadratique de matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}$$

dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $l$  la forme linéaire de matrice  $B = (b_1 \ b_2 \ b_3)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Matriciellement, on l'écrit l'équation (5.2) comme

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0 \quad (5.4)$$

Si on considère un autre repère orthonormé, on peut montrer que l'équation d'une quadrique prend toujours la forme (5.2) et (5.3)

## 5.6 Équation réduite d'une quadrique

Soit  $Q$  une quadrique possédant l'équation vectorielle (5.2). On peut rendre l'équation (5.2) plus lisible en éliminant certains termes croisés.

**Proposition 10.** *Il existe un repère orthonormé dans lequel  $Q$  possède une equation sans termes croisés de la forme:*

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad (5.5)$$

*Démonstration.* La preuve découle principalement d'un résultat d'algèbre. Une matrice réelle symétrique  $A$  est diagonalisable par une matrice orthogonale  $M$ . Nous pouvons de plus imposer que  $\det(M) = 1$ . Ainsi, on a

$$A = M \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M^{-1} \Rightarrow M^{-1} A M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ . Ainsi

l'équation (5.2) se réécrit

$$(x \ y \ z) M \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0. \quad (5.6)$$

Posons  $M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et puisque  $M^{-1} M = I$ , on a  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  ou encore posons  $(x \ y \ z) M = (x' \ y' \ z')$ .

L'équation (5.6) devient

$$(x' \ y' \ z') \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c = 0. \quad (5.7)$$

avec  $B' = (b'_1 \ b'_2 \ b'_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3)M = BM$ . En développant l'équation (5.7), nous obtenons une equation qui n'a plus de termes en  $xy, xz$  et  $yz$  qui est de la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + c = 0$$

ou bien

$$a'_1 x'^2 + a'_2 y'^2 + a'_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + c = 0.$$

En renommant les coefficients  $a_1, a_2, a_3$  et les variables  $x, y, z$ , on obtient la forme indiquée

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0.$$

□

Nous savons déjà qu'une matrice orthogonale  $M$  telle que  $\det(M) = 1$  représente une rotation de l'espace affine de dimension trois. Nous venons donc de montrer qu'une rotation bien choisie dont l'axe passe par l'origine permet d'éliminer les termes en  $xy, xz$  et  $yz$  dans l'équation (5.2).

**Proposition 11.** *Après une rotation bien choisie, c'est à dire ayant obtenu l'équation (5.5), des translations convenables*

$$x' = x + \frac{b_1}{2a_1}, \quad y' = y + \frac{b_2}{2a_2}, \quad z' = z + \frac{b_3}{2a_3}$$

permettent d'obtenir une equation de la forme:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + c = 0 \quad (5.8)$$

qui permettent d'obtenir les equations d'une **ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, cone, un point, paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique.**

*Démonstration.* Si dans l'équation (5.5),  $a_1 \neq 0$ , en posant  $x' = x + \frac{b_1}{2a_1}$  qui correspond à une translation, on obtient une equation de la forme:

$$a_1 x'^2 + a_2 y'^2 + a_3 z'^2 + b_2 y' + b_3 z' + c' = 0, \quad \text{avec} \quad c' = c - \frac{b_1^2}{4a_1}.$$

Cela signifie que lorsque  $a_1 \neq 0$ , par une translation convenable, on peut supposer que  $b_1 = 0$ . On procède de manière semblable avec  $a_2$  et  $a_3$ .

- Si  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont tous non nuls dans (5.5), alors on se ramène par une translation à une équation de la forme

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + c = 0.$$

- \* Si en plus  $c \neq 0$  et suivant les signes de  $a_1, a_2, a_3$  cette équation correspond aux équations suivantes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \quad \text{ellipsoïde} \quad (5.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \quad \text{hyperboloïde à une nappe} \quad (5.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \quad \text{hyperboloïde à deux nappes} \quad (5.11)$$

- \* Si  $c = 0$  alors on trouve les équations suivantes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 : \quad \text{cône} \quad (5.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 : \quad \text{un point} \quad (5.13)$$

- Si exactement un des trois coefficients  $a_1, a_2$  ou  $a_3$  est nul dans (5.5) (supposons  $a_3 = 0$ ), l'équation se réduit à

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z + c = 0.$$

Si  $b_3 \neq 0$ , alors en faisant une translation et un changement d'échelle  $z = \frac{z'-c}{b_3}$ , on trouve une équation du type (en renommant  $z'$  par  $z$ )

$$a_1x^2 + a_2y^2 + z = 0$$

qui correspond aux équations suivantes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z : \quad \text{paraboloïde elliptique} \quad (5.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z : \quad \text{paraboloïde hyperbolique} \quad (5.15)$$

□

## 5.7 Quadriques propres

**Définition 31.** On appelle **quadrique propre** toute quadrique possédant dans un repère orthonormé une équation de l'un des types (5.9), (5.10), (5.11), (5.14) ou (5.15).

Nous notons qu'en jouant sur la nullité des coefficients  $c, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ , on obtient les autres types d'équations des quadriques telles que les **cylindres (elliptique, parabolique, hyperbolique)**, **deux plans parallèles**, **deux plans sécants**, **un plan et une droite**

## 5.8 Quadriques propres à centres

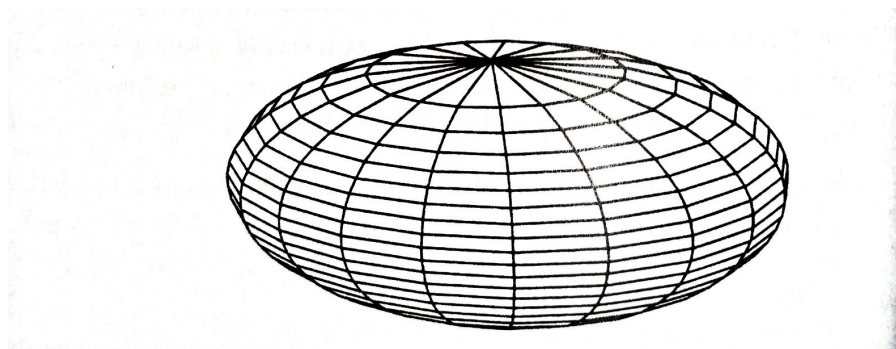
**Définition 32.** On appelle **quadrique propre à centre** toute surface possédant dans un repère orthonormé  $(o, i, j, k)$  une équation du type

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon'$$

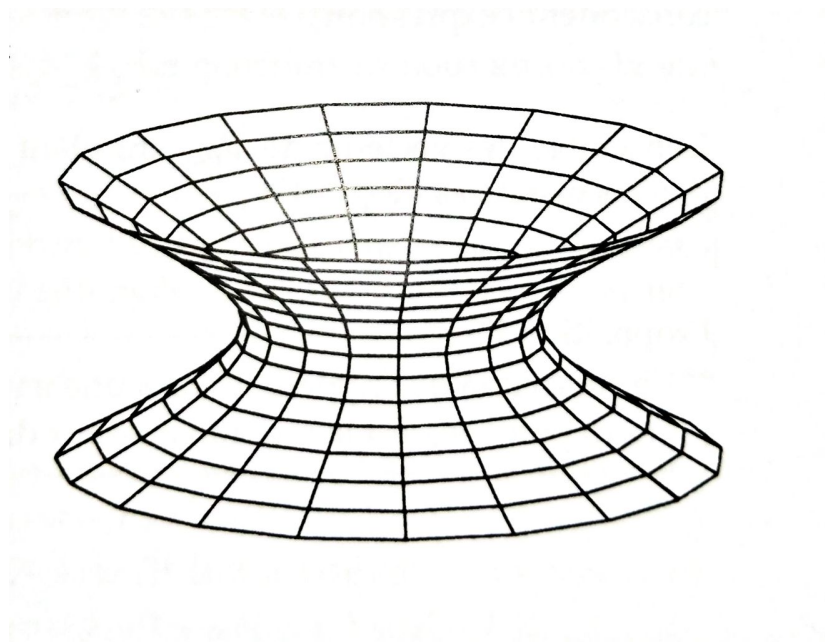
avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et  $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ .

Ces surfaces sont exactement:

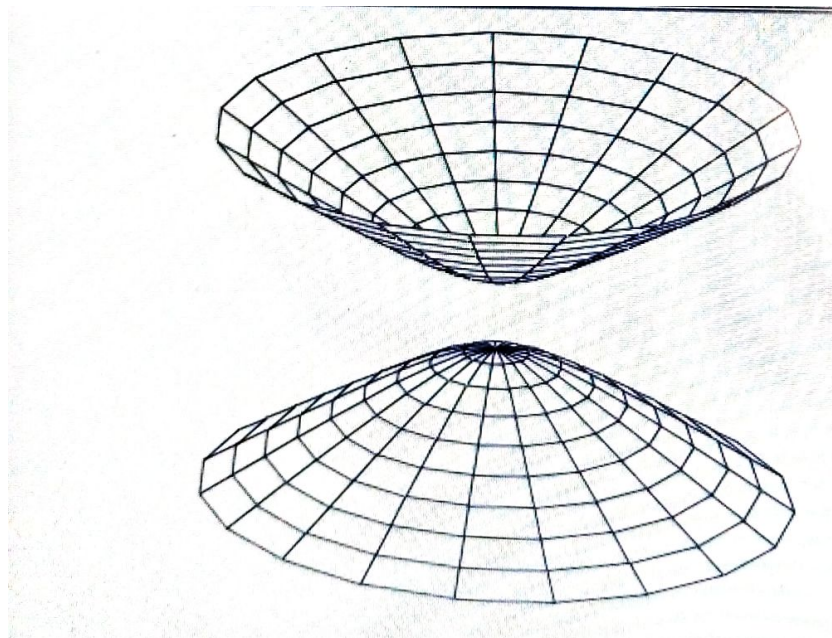
- Ellipsoïde pour  $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, 1)$



- Hyperboloïde à une nappe pour  $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, 1)$



- et hyperboloïde à deux nappes pour  $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, -1)$



Ce sont les seules quadriques propres possédant un centre de symétrie. Pour déterminer son centre, on annule les dérivées partielles et on résout le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

avec  $F(x, y, z) = 0$  traduisant l'équation d'une surface. La forme quadratique principale est de matrice

$$\text{diag}(a^{-2}, b^{-2}, c^{-2})$$

**Définition 33.** On appelle alors:

- **directions principales** d'une quadrique toute droite passant par  $O$  et dirigée par un vecteur propre
- **demi-axes** d'une quadrique les nombres réels strictement positifs  $a, b, c$ ,

## 5.9 Réduction des équations des quadriques: Calcul pratique

L'équation (5.2) définit une quadrique. Ce type d'équation correspond à des surfaces qui peuvent être très différentes. Pour obtenir plus d'informations, on essaie d'obtenir une équation réduite de la quadrique (de même que l'on cherche l'équation réduite d'une conique). Pour cela, on procède en deux temps:

- on considère d'abord la forme quadratique  $q$ :

$$q(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5yz + 2a_6xz$$

Il existe une base orthonormée de l'espace, constituée de vecteurs orthogonaux pour  $q$ . En pratique, on calcule les valeurs propres de la matrice  $M$  de la forme quadratique. Ainsi, on a

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c = 0$$

avec  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $(x' \ y' \ z') = (x \ y \ z) M$ .

Dans ces nouvelles coordonnées, on a:

$$q(X, Y, Z) = a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2.$$

(C'est-à-dire qu'on a éliminé les doubles produits).

- on fait un changement d'origine pour éliminer ou bien les termes linéaires (en  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ) dans les coordonnées où il y a un terme carré, ou bien en éliminant les termes constants.

Ce faisant, on obtient 17 types d'équations réduites. L'ellipsoïde, les deux hyperboloïdes et les deux paraboloides sont appelées **quadriques propres**.

## 5.10 Exemples

1. Déterminer la nature de la quadrique suivante ainsi que son expression réduite.

$$4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 4yz = 0$$

**Solution:**

On note  $(O, i, j, k)$  la base canonique. Soit

$$f(x, y, z) = 4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 4yz.$$

Ce polynôme est une forme quadratique de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont  $\lambda_1 = 4$  et  $\lambda_{2,3} = \frac{-13 \pm \sqrt{41}}{2}$  qui sont des valeurs propres négatives. On note par conséquent ces valeurs propres négatives  $-a^2$  et  $-b^2$  respectivement. Dans un repère  $(O, (u, v, w))$  où  $(u, v, w)$  est une base orthonormée de vecteurs propres associées aux valeurs propres  $4, -a^2$  et  $-b^2$ , la quadrique a pour équation

$$4x^2 - a^2y^2 - b^2z^2 = 0 \iff \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{a})^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{b})^2} = 0.$$

Cette quadrique est donc un cône.

2. Déterminer la nature de la quadrique suivante ainsi que son expression réduite.

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 6yz + 2zx + 2x + 4y - 6z = 0$$

**Solution:**

Soit

$$f(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 6yz + 2zx + 2x + 4y - 6z$$

La partie quadratique de l'équation est

$$q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 6yz + 2zx$$

de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3. La quadrique associée a donc un centre noté  $\Omega$  de coordonnées  $(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$  (On résout l'équation (5.16)). L'image du centre par  $f$  vaut  $-6$ . Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont 3, 6 et  $-2$ . La matrice  $P$  de passage de la base canonique  $(i, j, k)$  vers la base  $(u, v, w)$  des vecteurs propres est telle que les colonnes sont les colonnes des vecteurs propres. Ainsi, on a

$$u = P(i), \quad v = P(j), \quad w = P(k).$$

Par conséquent, l'équation de la quadrique dans un repère  $(\Omega, u, v, w)$  où  $u, v, w$  sont des vecteurs propres associées aux valeurs propres 3, 6 et  $-2$  est

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 - 6 = 0,$$

soit

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 6 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1)^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$$

La quadrique cherchée est donc un hyperboloïde à une nappe.

3. Déterminer la nature de la quadrique suivante ainsi que son expression réduite.

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz - 1 = 0$$

**Solution:**

Soit

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz - 1 = 0$$

La résolution de l'équation (5.16) montre que  $(0, 0, 0)$  est un centre de symétrie de la quadrique:

$$f(x, y, z) = 0 \iff f(-x, -y, -z) = 0.$$

La forme quadratique de l'équation a pour matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $-(X^2 - 1)^2(X - 10)$ . La matrice  $P$  de passage de la base canonique  $(i, j, k)$  vers la base  $(u, v, w)$  des vecteurs propres est telle que les colonnes sont les colonnes des vecteurs propres. Ainsi, on a

$$u = P(i), \quad v = P(j), \quad w = P(k).$$

Par conséquent dans un repère  $(O, (u, v, w))$  où  $(u, v, w)$  est une base orthonormée de vecteurs propres, la quadrique a pour équation

$$x^2 + y^2 + 10z^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(1)^2} + \frac{y^2}{(1)^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{10}})^2} = 1.$$

Donc la forme quadratique principale est de matrice

$$\text{diag}(1, 1, (\frac{1}{\sqrt{10}})^2).$$

Ceci montre que la quadrique est une ellipsoïde.

## 5.11 Première et deuxième forme fondamentale

On va montrer dans cette section que chaque surface dans  $\mathbb{R}^3$  est déterminée de manière unique par deux quantités qui sont localement invariantes appelées **première et seconde forme fondamentale**

### 5.11.1 Première forme fondamentale

La connaissance de la première forme fondamentale permet de traiter les questions métriques sur la surface sans faire recours à l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ . Concrètement, elle permet de faire sur la surface régulière des mesures des longueurs des courbes, des angles des vecteurs tangents, des aires des régions sans faire recours à l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$  qui contient la surface.

Soit  $P(u, v)$  une fonction de classe  $C^k$  à valeurs dans un espace affine de dimension trois,  $k \geq 1$ .

**Définition 34.** On appelle différentielle de  $P$ , notée  $dP$ , une application bijective du vecteur  $(du, dv)$  dans le plan  $uv$  qui associe le vecteur

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv.$$

dans le plan.

Pour simplifier les notations, on notera  $D_u P = \frac{\partial P}{\partial u}$  et  $D_v P = \frac{\partial P}{\partial v}$  et donc on écrira la différentielle de  $P$  comme suit:

$$dP = D_u P du + D_v P dv.$$

Calculons maintenant la quantité  $I(du, dv)$ :

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= \langle dP, dP \rangle = \|dP\|^2 \\ &= \langle D_u P du + D_v P dv, D_u P du + D_v P dv \rangle \\ &= \langle D_u P, D_u P \rangle du^2 + 2\langle D_u P, D_v P \rangle dudv + \langle D_v P, D_v P \rangle dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

avec  $E = \langle D_u P, D_u P \rangle$ ,  $F = \langle D_u P, D_v P \rangle$  et  $G = \langle D_v P, D_v P \rangle$

**Définition 35.** La quantité  $I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  s'appelle première forme fondamentale de la surface  $P(u, v)$  et  $E, F, G$  s'appellent les coefficients de la première forme fondamentale.

**Proposition 12.** La forme  $I(du, dv)$  ne dépend pas de paramétrage choisi.

*Démonstration.* Il suffit comprendre ici que la forme  $I(du, dv)$  ne dépend pas de la coordonnée  $(u, v)$  choisie. En effet, soient deux paramétrages équivalents  $P(u, v)$  et  $Q(x, y)$ . Cela signifie que l'on a

$$P(u, v) = Q(x(u, v), y(u, v))$$

au point  $K$  commun à ces deux paramétrages. On a donc:

$$\begin{aligned} I^*(dx, dy) &= \langle dQ, dQ \rangle = \|dQ\|^2 \\ &= \langle D_x Q dx + D_y Q dy, D_x Q dx + D_y Q dy \rangle \end{aligned}$$

Sachant que  $D_x Q dx = D_x Q (D_u x du + D_v x dv)$  et  $D_y Q dy = D_y Q (D_u y du + D_v y dv)$  et en remplaçant ces expressions dans la deuxième ligne, on obtient alors

$$\begin{aligned} I^*(dx, dy) &= \|(D_x Q D_u x + D_y Q D_u y) du + (D_x Q D_v x + D_y Q D_v y) dv\|^2 \\ &= \|D_u P du + D_v P dv\|^2 \\ &= I(du, dv) \end{aligned}$$

à cause du fait que  $dP = D_u P du + D_v P dv = dQ$ . □

**Proposition 13.** *Les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariants par la transformation admissible (le changement de paramètres modifie aussi les coefficients).*

*Démonstration.* La preuve consiste à montrer que les triplets

$$(E(u, v), F(u, v), G(u, v)) \neq (E^*(x, y), F^*(x, y), G^*(x, y))$$

Cela signifie qu'à travers les calculs, on voit que les coefficients  $E, F, G$  sont des combinaisons des coefficients de  $E^*, F^*, G^*$ . En effet,

$$E(u, v) = \|D_u P\|^2 = \|D_x Q D_u x + D_y Q D_u y\|^2$$

Le calcul détaillé (à faire en DAD) donne

$$E(u, v) = E^*(x, y) D_u^2 x + 2F^*(x, y) D_u x D_u y + G^*(x, y) D_u^2 y$$

$F(u, v) = \langle D_u P, D_v P \rangle = E^*(x, y) D_u x D_v y + F^*(x, y) (D_u x D_v y + D_v x D_u y) + G^*(x, y) D_u y D_v y$   
et

$$G(u, v) = \langle D_v P, D_v P \rangle = E^*(x, y) D_v^2 x + 2F^*(x, y) D_v x D_v y + G^*(x, y) D_v^2 y.$$

□

Pour des raisons pratiques, on donne ce lemme pour lequel on peut trouver sa démonstration en géométrie I

**Lemme 1.** *Soient les vecteurs  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ . On a*

$$\langle (a \wedge b), (c \wedge d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle.$$

**Théorème 10.** *La forme quadratique  $I(du, dv)$  est une forme définie positive*

*Démonstration.* On peut présenter la forme  $I(du, dv)$  par une matrice carrée de taille deux:

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Edu + Fdv \\ Fdu + Gdv \end{pmatrix} \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

Alors la forme quadratique  $I(du, dv)$  est définie positive par la matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  et pour qu'elle soit définie positive, il faut et il suffit que  $E > 0$  et  $EG - F^2 > 0$ . En effet, on a bien:

$$E = \|D_u P\|^2 > 0$$

et en utilisant le lemme 1

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \langle D_u P, D_u P \rangle \langle D_v P, D_v P \rangle - \langle D_u P, D_v P \rangle \langle D_u P, D_v P \rangle \\ &= \langle D_u P, D_u P \rangle \langle D_v P, D_v P \rangle - (\langle D_u P, D_v P \rangle)^2 \\ &= \|D_u P \wedge D_v P\|^2 > 0 \end{aligned}$$

□

**Exemple 35.** Soit la surface définie par

$$P(u, v) = (u + v)e_1 + (u - v)e_2 + uve_3$$

On peut montrer que les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = 2 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 2 + u^2$$

et que

$$I(du, dv) = (2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (2 + u^2)dv^2.$$

En faisant un changement de paramètres  $x(u, v) = u + v$  et  $y(u, v) = u - v$ , on a

$$Q(x, y) = xe_1 + ye_2 + \frac{1}{4}(x^2 - y^2)e_3.$$

Cette transformation paramétrique est admissible (paramétrage admissible), c'est à dire

$$\text{Jacobien} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

On trouve donc

$$D_x Q = e_1 + \frac{x}{2}e_3 \quad \text{et} \quad D_y Q = e_2 - \frac{y}{2}e_3.$$

On aura donc

$$E^* = 1 + \frac{x^2}{4}, \quad F^* = -\frac{xy}{4}, \quad G^* = 1 + \frac{y^2}{4}.$$

Par conséquent, aux points  $(u, v) = (1, 1)$  et  $(x, y) = (2, 0)$ , on obtient

$$P(1, 1) = 2e_1 + e_3 = Q(2, 0)$$

et en ce point de  $\Sigma$ , on a

$$E = 3, \quad F = 1, \quad G = 3$$

tandis que

$$E^* = 2, \quad F^* = 0, \quad G^* = 1.$$

Donc les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariants par rapport à la transformation paramétrique admissible (paramétrage admissible).

### Propriétés de $I(du, dv)$

Il y a trois quantités que l'on peut calculer à l'aide des coefficients de la première forme fondamentale.

#### a) Longueur d'un arc sur une surface

Soit  $(P(u, v))$  et  $\gamma(t) = P(u(t), v(t))$  une courbe sur la surface de  $P$ . On peut calculer la longueur

$$\|\overline{\gamma(a)\gamma(b)}\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (5.17)$$

$$= \int_a^b \|D_t P(u(t), v(t))\| dt \quad (5.18)$$

$$= \int_a^b \left( \left\langle \left( D_u P \frac{du}{dt} + D_v P \frac{dv}{dt} \right), \left( D_u P \frac{du}{dt} + D_v P \frac{dv}{dt} \right) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (5.19)$$

$$= \int_a^b \left( E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \right) + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (5.20)$$

$$= \int_a^b \sqrt{I \left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)} dt \quad (5.21)$$

**Exemple 1**

Considérons sur la sphere unité

$$P(\theta, \phi) = ((\cos \theta \sin \phi)e_1 + (\sin \theta \sin \phi)e_2 + \cos \phi e_3),$$

la courbe  $\gamma(t) = P(\theta(t), \phi(t))$  avec  $\theta(t) = \ln(\cotan(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}))$  et  $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ , avec  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

Cette courbe commence de l'équateur et remonte jusqu'au pole nord en spirale. Les calculs montrent que l'on obtient

$$D_\theta P = (-\sin \theta \sin \phi)e_1 + (\cos \theta \sin \phi)e_2$$

et

$$D_\phi P = (-\cos \theta \cos \phi)e_1 + (\sin \theta \cos \phi)e_2 - \sin \phi e_3$$

Ainsi, on obtient:

$$E = \sin^2 \phi, \quad F = 0, \quad G = 1$$

et

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - t)} \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dt} = -1.$$

Ce qui donne

$$I = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)} + 1 = 2.$$

Finalement la longueur de cette courbe sera

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{I\left(\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt}\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**b) Angle entre les vecteurs  $D_u P$  et  $D_v P$** 

L'angle  $(\widehat{D_u P, D_v P})$  entre les vecteurs  $D_u P$  et  $D_v P$  se calcule avec la formule

$$\cos(\widehat{D_u P, D_v P}) = \frac{\langle D_u P, D_v P \rangle}{\|D_u P\| \|D_v P\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

**Corollaire 3.** Les vecteurs  $D_u P$  et  $D_v P$  sont orthogonaux si et seulement si  $F = 0$ .

**Exemple 2**

En reprenant l'exemple 1, dans lequel  $E = \sin^2 \theta$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$ , on a donc

$$\cos(\widehat{D_u P, D_v P}) = 0$$

alors les vecteurs  $D_u P$  et  $D_v P$  sont orthogonaux.

**c) Calcul de l'aire d'une surface**

**Définition 36.** L'aire d'une surface  $A$  est donnée par la formule

$$A = \int \int \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

**Exemple 3**

Soit  $S$  la surface d'un tore que nous écrivons par le paramétrage:

$$P(\theta, \phi) = (b + a \sin \phi) \cos \theta e_1 + (b + a \sin \theta) \sin \theta e_2 + a \cos \phi e_3, \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

On calcule que

$$D_\theta P = -(b + a \sin \phi) \sin \theta e_1 + (b + a \sin \phi) \cos \theta e_2$$

$$D_\phi P = (a \cos \phi) e_1 + (a \cos \phi \sin \theta) e_2 - (a \sin \phi) e_3$$

Ainsi on trouve

$$E = ((b + a) \sin \phi)^2, \quad F = 0, \quad G = a^2.$$

L'aire de cette surface est:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{a(b+a) \sin \phi} d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(b+a) \sin \phi d\phi \\ &= 2\pi [b\phi - a \cos \phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

### 5.11.2 Seconde forme fondamentale

Étant donnée une paramétrisation

$$P : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto P(u, v) = q$$

d'une surface régulière  $S$ , on peut correspondre un vecteur normal unitaire

$$\vec{N}(q) = \frac{D_u P \wedge D_v P}{\|D_u P \wedge D_v P\|}(q).$$

Donc on obtient une fonction différentiable  $N : P(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui à  $q \in P(U)$  associe un vecteur normal unitaire  $N(q)$ .

En général, si  $V \subset S$  est un ouvert dans  $S$  et  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application différentiable qui à  $q \in P(U)$  associe un vecteur normal unitaire  $N(q)$ , on dit que  $N$  est un champ différentiable de vecteurs normaux unitaires sur  $S$ .

Il est à noter que ce n'est pas sur toutes les surfaces qu'on peut définir une telle application. On donne alors la définition suivante.

**Définition 37.** *Une surface régulière  $S$  est dite orientable si elle admet un champ différentiable de vecteurs normaux unitaires sur toute la surface. Le choix d'un tel champ de vecteurs  $N$  est appelé orientation de  $S$ .*

Une orientation  $N$  sur  $S$  induit une orientation sur chaque plan tangent  $T_p S$ ,  $p \in S$  comme suit. Définir une base positive  $\{v, w\} \in T_p S$  signifie que le produit scalaire

$$\langle v \wedge w, N \rangle \quad \text{doit être positive .}$$

Donc l'ensemble de toutes les bases positives de  $T_p S$  est une orientation de  $T_p S$ .

**Exemple 36.** *Pour un plan  $P \equiv ax + by + cz + d = 0$ , on peut chercher le vecteur normal à ce plan.*

*En effet, on sait qu'un vecteur normal à ce plan est orthogonal aux vecteurs tangents. On commence à paramétrer ce plan par  $P(u, v) = (u, v, \frac{-au-bv-d}{c})$ . Le calcul des vecteurs tangents  $D_u P$  et  $D_v P$  donne*

$$D_u P = (1, 0, -\frac{a}{c}), \quad D_v P = (0, 1, -\frac{b}{c}).$$

*Le vecteur normal  $N$  est donc  $N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$  et ce vecteur est constant car  $dN \equiv 0$ .*

**Exemple 37.** *Considérons la sphere unité*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  est une courbe paramétrée dans  $S^2$ , alors l'équation

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$$

montre que le vecteur  $(x, y, z)$  est normal à la surface  $S$  au point  $(x, y, z)$ . Donc les vecteurs  $\vec{N} = (x, y, z)$  et  $N = (-x, -y, -z)$  sont des champs de vecteurs unitaires normaux dans  $S^2$ .

**Exemple 38.** *Soit le paraboloidé hyperbolique définie par  $z = y^2 - x^2$ . En effet, on paramètre le paraboloidé hyperbolique par*

$$P(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$$

et on calcule d'abord les vecteurs tangents

$$D_u P = (1, 0, -2u), \quad D_v P = (0, 1, 2v)$$

et le vecteur normal  $N(u, v)$  devient alors

$$N(u, v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \right).$$

Étant donné que  $N$  est différentiable, on peut calculer sa différentielle. Notons  $d\vec{N} = D_u \vec{N} du + D_v \vec{N} dv$  la différentielle de  $\vec{N}$ .

Comme on a

$$\|\vec{N}\|^2 = \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$$

alors il s'ensuit que

$$0 = d(1) = d(\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle).$$

Donc  $\vec{N}$  est orthogonale à  $d\vec{N}$ . On a

$$d(\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle) = 2(d\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle)$$

au point  $p$  et dans ce point le vecteur  $d\vec{N}$  est dans le plan tangent  $T_p S$ .

Nous considérons maintenant la quantité  $\text{II}(du, dv)$ : Les fonctions  $P$  et  $N$  sont vectorielles, on devrait les noter par  $\vec{P}$  et  $\vec{N}$ . Dans la suite, pour faciliter les notations nous allons noter simplement  $P$  et  $N$ .

$$\begin{aligned}\text{II}(du, dv) &= -\langle dP, dN \rangle \\ &= -\langle (D_u P du + D_v P dv), D_u N du + D_v N dv \rangle\end{aligned}$$

Le développement du second membre nous donne

$$\text{II}(du, dv) = -\langle D_u P, D_u N \rangle (du)^2 - (\langle D_u P, D_v N \rangle + \langle D_v P, D_u N \rangle) dudv - \langle D_v P, D_v N \rangle (dv)^2$$

En posant

$$L = -\langle D_u P, D_u N \rangle, \quad M = -\langle D_u P, D_v N \rangle \quad \text{ou} \quad \langle D_v P, D_u N \rangle, \quad N' = \langle D_v P, D_v N \rangle,$$

alors on a

$$\text{II}(du, dv) = L(du)^2 + 2Mdudv + N'(dv)^2.$$

**Définition 38.** L'expression  $\text{II}(du, dv)$  s'appelle la seconde forme fondamentale associée à  $P(u, v)$ .

Les coefficients  $L, M, N'$  sont appelés des coefficients de la seconde forme fondamentale.

**Proposition 14.** La seconde forme fondamentale est une forme quadratique indépendante du paramétrage admissible choisi.

*Démonstration.* On peut montrer que (**faire le dâd**) si on prend un autre paramétrage équivalent  $Q(x, y)$ , c'est à dire tel que  $P(u, v) = Q(x(u, v), y(u, v))$  alors on obtient

$$\begin{aligned}L &= -\langle D_u P, D_u N \rangle = L^* D_u^2 x + 2M^* D_u x D_u y + N^* D_u^2 y, \\ -\langle D_u P, D_v N \rangle &= L^* D_u x D_v y + M^* (D_u x D_v y + D_v x D_u y) + N^* D_u y D_v y, \\ N' &= \langle D_v P, D_v N \rangle = L^* D_v^2 x + 2M^* D_v x D_v y + N^* D_v^2 y.\end{aligned}$$

Ce qui donne d'après un simple calcul:

$$LN' - M^2 = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2 (L^* N^* - (M^*)^2)$$

Comme  $D_u P$  et  $D_v P$  sont orthogonaux à  $N$  en tout point  $(u, v)$ , on a:

$$0 = D_u(\langle D_u P, N \rangle) = \langle D_{uu} P, N \rangle + \langle D_u P, D_u N \rangle$$

$$0 = D_v(\langle D_u P, N \rangle) = \langle D_{uv} P, N \rangle + \langle D_u P, D_v N \rangle$$

$$0 = D_u(\langle D_v P, N \rangle) = \langle D_{vu} P, N \rangle + \langle D_v P, D_u N \rangle$$

$$0 = D_v(\langle D_v P, N \rangle) = \langle D_{vv} P, N \rangle + \langle D_v P, D_v N \rangle$$

Ce qui donne:

$$L = \langle D_{uu} P, N \rangle, \quad M = \langle D_{uv} P, N \rangle, \quad N' = \langle D_{vv} P, N \rangle$$

Et par conséquent,

$$\text{II}(du, dv) = L(du)^2 + 2Mdudv + N'(dv)^2$$

□

On peut tirer de cette preuve que

$$\text{II}(du, dv) = \langle d^2 P, N \rangle$$

$$\text{avec } d^2 P = D_{uu} P(du)^2 + 2D_{uv} P dudv + D_{vv} P(dv)^2.$$

### 5.11.3 Courbure normale à une surface régulière

Considérons les notations suivantes: on note  $\alpha(s)$  pour désigner un paramétrage d'une courbe  $C$  tracée sur une surface  $S$ ,  $N$  un vecteur normale à la surface  $S$  et  $n$  un vecteur normal à la courbe  $C$  sur  $S$ .

On rappelle que  $\alpha'(s) = T(s)$  et  $\alpha''(s) = \frac{dT}{ds} = kn$  avec  $k$  la courbure de  $C$  en un point  $p$ .

**Définition 39.** Soit  $C$  une courbe régulière sur une surface régulière  $S$  passant par un point  $p \in S$ ,  $k$  la courbure de  $C$  en  $p$  et  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ . On appelle courbure normale de  $C \subset S$  en  $p$ , le nombre

$$k_n = k \cos \theta = k \langle n, N \rangle. \quad (5.22)$$

En d'autres termes,  $k_n$  est la longueur de la projection du vecteur  $\alpha'' = kn$  sur la normale à la surface  $S$  au point  $p$ , avec un signe fourni par l'orientation  $N$  de  $S$  en  $p$ .

Pour donner une interprétation de la seconde forme fondamentale  $\text{II}(du, dv)$ , on considère une courbe  $C \subset S$  paramétrée par  $\alpha(s)$  où  $s$  est une longueur d'arc de  $C$  et  $\alpha(0) = p$ . Si on fait la restriction  $N(s)$  de la normale  $N$  à la courbe  $\alpha(s)$  alors on a  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Par conséquent, on a

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle' = 0 \iff \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

et donc

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle. \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \text{II}_p(du, dv)(\alpha'(0)) &= \langle dN_p(\alpha'(0)), dP \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \quad \text{d'après (5.23)} \\ &= \langle N, kn \rangle(p) \\ &= k \cos \theta(p) \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

En d'autres termes, la valeur de la seconde forme fondamentale  $\text{II}_p$  pour un vecteur unitaire  $T \in T_p S$  est égale à la courbure normale de la courbe régulière passant par  $p$  et tangent à  $T$ .

## 5.12 Exercices corrigés

1. Soit  $\Phi = \{(x, y, xy) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Trouver
  - la première forme fondamentale
  - le vecteur normal à  $\Phi$ .
  - la seconde forme fondamentale de  $\Phi$

**Solution:**

- La surface  $\Phi$  est décrite comme le graphe d'une fonction

$$\Phi(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + xye_3.$$

On se sert de la formule du cours et il est facile de trouver

$$\text{I}(dx, dy) = (1 + y^2)dx^2 + xydx dy + (1 + x^2)dy^2$$

et que l'on peut l'écrire à l'aide d'une matrice symétrique:

$$\begin{pmatrix} 1 + y^2 & xy \\ xy & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

-Le vecteur normale  $N(x_0, y_0, z_0)$  à  $\Phi$  en un point  $(x_0, y_0, z_0)$  est orthogonal aux vecteurs tangents

$$(D_x \Phi)_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (D_y \Phi)_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Il est donc colinéaire à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit maintenant de normaliser. On obtient

$$N(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}} \begin{pmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Il est facile de voir (**faire le dad**) que l'on obtient matriciellement

$$\Pi(dx, dy) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $\Phi = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [-1, 1]^2\} \subset \mathbb{R}^3$  avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable non identiquement nulle telle que  $f(x, y) = 0$  si  $x = \pm 1$  ou  $y = \pm 1$ . Démontrer que l'aire  $S(\Phi)$  de  $\Phi$  est plus grande que 4.

**Solution:**

L'aire de  $\Phi$  est donnée par

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{(\det I(dx, dy))} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Or

$$D_x \Phi = 1e_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e_3, \quad D_y \Phi = 1e_2 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} e_3.$$

Ainsi

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2.$$

Donc, on a

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{EG - F^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Or  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} \geq 1$ . Donc l'aire de  $\Phi$  est plus grande que

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1} dx dy = 4.$$

### 5.13 Exercices non corrigés

- Déterminer la nature des surfaces suivantes
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + x + 1 = 0$
  - $xy + xz + yz + 1 = 0$
- On considère deux nombres réels  $0 < r < R$  et le tore de révolution définie par  $f : [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétré par

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}.$$

Calculer l'aire de cette surface.

### 5.14 Directions et courbures principales

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension deux (ou  $n \geq 2$ ) muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On dit qu'une application linéaire  $A : V \rightarrow V$  est auto-adjointe si

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle, \quad \text{pour tous } v, w \in V.$$

Notons que si  $\{e_1, e_2\}$  est une base orthonormée pour  $V$  et  $(\alpha_{ij})$  est la matrice de  $A$  relative à cette base, alors

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \alpha_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle Ae_j, e_i \rangle = \alpha_{ji}.$$

Ce qui dit que la matrice  $(\alpha_{ij})$  est symétrique.

A cette application linéaire auto-adjointe on associe une application

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad B(v, w) = \langle Av, w \rangle.$$

**Proposition 15.** *L'application  $B$  est bilinéaire (linéaire à la fois en  $v$  et en  $w$ )*

En effet, la preuve consiste à montrer que l'on a

$$B(\lambda v + \mu w, m) = \lambda B(v, m) + \mu B(w, m), \quad B(v, \lambda w + \mu m) = \lambda B(v, w) + \mu B(v, m).$$

Le fait que  $A$  est auto-adjoint implique que  $B(v, w) = B(w, v)$ , ce qui dit que  $B$  est une forme bilinéaire symétrique dans  $V$ .

Inversement, si  $B$  est une forme bilinéaire symétrique dans  $V$ , on peut définir une application linéaire  $A : V \rightarrow V$  par  $\langle Av, w \rangle = B(v, w)$  et la symétrie de  $B$  implique que  $A$  est auto-adjoint. De l'autre côté, à toute forme bilinéaire symétrique  $B$  dans  $V$ , il correspond une forme quadratique  $Q$  dans  $Q$  donnée par

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in V$$

et la connaissance de  $Q$  détermine  $B$  complètement puisque

$$B(u, v) = \frac{1}{2} [Q(u + v) - Q(u) - Q(v)].$$

Ainsi, une correspondance biunivoque est établie entre les formes quadratiques dans  $V$  et les applications linéaires auto-adjointes de  $V$ .

On veut ensuite prouver qu'à une application linéaire auto-adjointe  $A : V \rightarrow V$ , il existe une base orthonormée pour  $V$  telle que la matrice de  $A$  relative à cette base est une matrice orthogonale.

En plus, les éléments de la diagonale sont des maximums et minimums de la forme quadratique correspondante de  $V$  restreinte au cercle unité.

**Lemme 2.** Si la fonction  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  restreinte au cercle unité  $x^2 + y^2 = 1$  possède un maximum au point  $(1, 0)$  alors  $b = 0$ .

*Démonstration.* On paramètre le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  par  $x = \cos t$  et  $y = \sin t$  avec  $t \in ]0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon[$ . Donc  $Q$  restreinte au cercle unité devient une fonction de  $t$ :

$$Q(t) = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t.$$

Puisque  $Q$  possède son maximum au point  $(1, 0)$ , (quand  $Q'(t) = 0$ ), on a:

$$\begin{cases} Q'(t) = Q'(t) = -2a \sin t \cos t - 2b \sin^2 t + 2b \cos^2 t + 2c \sin t \cos t \\ Q'(0) = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} = 2b = 0 \implies b = 0 \end{cases}$$

□

**Proposition 16.** Étant donnée une forme quadratique  $Q$  dans  $V$ , il existe une base orthonormée  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  telle que si  $v \in V$  est donné par  $v = xe_1 + ye_2$  alors

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont le maximum et le minimum respectivement de  $Q$  sur le cercle unité  $|v| = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda_1$  le maximum de  $Q$  sur le cercle unité  $|v| = 1$  et soit  $e_1$  le vecteur unité avec  $Q(e_1) = \lambda_1$ . Un tel vecteur  $e_1$  existe par continuité de  $Q$  sur l'espace compact  $|v| = 1$ . Soit  $e_2$  un vecteur unité qui est orthogonal à  $e_1$  et  $\lambda_2 = Q(e_2)$ . On peut montrer que la base  $\{e_1, e_2\}$  satisfait les conditions de la proposition.

Donc on a

$$\begin{aligned} Q(v) = B(v, v) &= B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\ &= B(xe_1, xe_1) + B(xe_1, ye_2) + B(ye_2, ye_2) + B(ye_2, xe_1) \\ &= x^2 B(e_1, e_1) + xy B(e_1, e_2) + y^2 B(e_2, e_2) + yx B(e_2, e_1) \\ &= x^2 Q(e_1) + 2bxy + y^2 Q(e_2) \\ &= \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2 \end{aligned}$$

où  $B(e_1, e_2) = b$ . Par le lemme 2, on a  $b = 0$ . Il reste à montrer que  $\lambda_2$  est le minimum de  $Q$  dans le cercle  $|v| = 1$ .

Pour  $v = xe_1 + ye_2$  avec  $x^2 + y^2 = 1$ , on a

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2$$

puisque  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ . Ce qui montre que  $\lambda_2$  est le minimum de  $Q$  dans le cercle  $|v| = 1$ .  $\square$

**Théorème 11.** Soit  $A : V \rightarrow V$  une application linéaire auto-adjointe. Alors il existe une base orthonormée  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  telle que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2$ . Dans la base  $\{e_1, e_2\}$ , la matrice de  $A$  est diagonale et les éléments  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  sur la diagonale sont le maximum et le minimum, respectivement de la forme quadratique  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sur le cercle unité de  $V$ .

*Démonstration.* La preuve peut être consultée dans [1] page 216.  $\square$

Retournons à notre application linéaire  $dN_p$ . Le théorème ci-dessus montre que pour tout point  $p \in S$ , il existe une base orthonormée  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  telle que

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1, \quad dN_p(e_2) = -k_2 e_2.$$

En plus  $k_1$  et  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) sont le maximum et le minimum de la seconde forme fondamentale  $\Pi(\text{du}, \text{dv})$  restreinte au cercle unité de  $T_p S$ . Ainsi ces valeurs sont des valeurs extrêmes de la courbure normale au point  $p$ .

**Définition 40.** Les valeurs  $k_1$  et  $k_2$  sont des courbure normale maximale et minimale respectivement et sont appelées courbures principales au point  $p$ . Les directions correspondantes, C-à-d les directions données par les vecteurs propres  $e_1$  et  $e_2$  sont appelées directions principales au point  $p$ .

**Définition 41.** La valeur  $K = k_1 k_2$  est appelée courbure de Gauss de  $S$  au point  $p$  alors que la valeur  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  est appelée courbure moyenne de  $S$  au point  $p$ .

On va alors faire quelques exemples.

## 5.15 Exemples

1. Soit

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

Calculer les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  ainsi que la courbure de Gauss.

En effet, le calcul simple montre

$$D_u P = (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u), \quad D_v P = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

et que

$$D_u P \wedge D_v P = (-2u(1+u^2+v^2), 2v(1+u^2+v^2), (1-(u^2+v^2))(1+u^2+v^2))$$

Comme  $D_u P \perp D_v P$  alors  $\sin(\widehat{D_u P, D_v P}) = 1$ .

Donc

$$\|D_u P \wedge D_v P\| = \|D_u P\| \|D_v P\| \sin(\widehat{D_u P, D_v P}) = (1+u^2+v^2)^2.$$

Ainsi, on obtient  $N(u, v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$ .

On calcule en plus

$$D_{uu}P = (-2u, 2v, 2), \quad D_{uv}P = (2v, 2u, 0), \quad D_{vv}P = (2u, -2v, -2).$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont alors

$$L = \langle D_{uu}P, N \rangle, \quad M = \langle D_{uv}P, N \rangle, \quad N' = \langle D_{vv}P, N \rangle$$

et on trouve que la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base  $\{D_u P, D_v P\}$  est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La base  $\left\{ \frac{D_u P}{\|D_u P\|}, \frac{D_v P}{\|D_v P\|} \right\}$  est orthonormée et dans cette base, la seconde forme fondamentale est

$$\frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les deux courbures principales sont

$$k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \quad \text{et} \quad k_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

et la courbure de Gauss vaut  $K = -\frac{4}{(1+u^2+v^2)^4}$ .

2. On prend deux nombres réels  $0 < r < R$ . On considère le tore de révolution  $f : [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétré par

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

Calculer en tout point  $m$  de la surface la seconde forme fondamentale  $\text{II}(du, dv)$  ainsi que les courbures et les directions principales.

En effet, on a

$$D_u f(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \quad D_v f(u, v) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ -(R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que pour tout  $(u, v) \in [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[$ , on a  $\langle D_u f, D_v f \rangle = 0$ , donc que  $D_u f \perp D_v f$ . On calcule que

$$N(u, v) = \frac{D_u f, D_v f}{\|D_u f \wedge D_v f\|} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

Donc

$$L(u, v) = \langle D_u^2 f, N \rangle = r, \quad N'(u, v) = \langle D_v^2 f, N \rangle = (R + r \cos u) \cos u$$

et  $M(u, v) = \langle D_u^2 v f, N \rangle = 0$ . Comme  $M(u, v) = 0$ , cela montre que la seconde forme fondamentale  $\text{II}(du, dv)$  est diagonale dans la base  $\{D_u f, D_v f\}$ . Or cette base est orthogonale car  $\langle D_u f, D_v f \rangle = 0$ . La base

$$\left\{ \frac{D_u f}{\|D_u f\|}, \frac{D_v f}{\|D_v f\|} \right\}$$

est orthonormée.

Les deux directions principales sont donc

$$e_1 = \frac{D_u f}{\|D_u f\|} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos u \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{D_v f}{\|D_v f\|} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

car  $\|D_u f\|^2 = r^2$  et  $\|D_v f\|^2 = (R + r \cos u)^2$ . La matrice de la seconde forme fondamentale dans cette base O.N s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(R+r \cos u) \cos u}{(R+r \cos u)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R+r \cos u} \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales sont donc  $k_1 = \frac{1}{r}$  et  $k_2 = \frac{\cos u}{R+r \cos u}$ .

# Bibliographie

- [1] Manfredo. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey. 1976.
- [2] Claude. Deschamps et André Warusfel. *Cours, Série E. Ramis, Mathématiques 2eme année. Cours et Exercices corrigés.* Dunod, Paris, 2001.
- [3] Claude. Deschamps et André Warusfel. *J'intègre, Série E. Ramis, Mathématiques Tout-en-Un, 1ere année. Cours et Exercices corrigés, 2eme Edition.* Dunod, Paris, 2003.
- [4] Francois. Liret et Dominique Martinais. *Mathématiques pour le DEUG. Algèbre et Géométrie, 2eme Année. Cours et Exercices avec solutions.* Dunod, Paris, 1999.
- [5] F.M. Hall. *Abstract Algebra, Volume 2.* Cambridge University Press, 1969.