Université du Burundi
Institut de Pédagogie Appliquée
Département de Mathématiques

Cours de Théorie des groupes

Mastère en Sciences I

Option: Enseignement des mathématiques

Volume horaire: 60 heures

Par

Prof. Aboubacar Nibirantiza

Année Académique:2023-2024
Bujumbura, Février 2024

Table des Matières

Préface

0.1 Contenu-matière

Dans ce syllabus, on traite la théorie générale des groupes de Lie matriciels, des algèbres de Lie, l'exponentiel matriciel ainsi que la théorie basique de représentations. On développe la théorie des groupes de Lie de manière élémentaire, avec un minimum de prérequis, en particulier, en utilisant uniquement l'algèbre linéaire, sans nécessiter aucune connaissance de la théorie des variétés.

Explicitement, on traite d'abord la théorie générale des groupes Lie matriciels (i.e., sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et leurs algèbres de Lie. On présente de nombreux exemples de groupes de Lie matriciels et on examine leurs propriétés topologiques. Après avoir discuté de l'exponentielle matricielle, on tourne vers les algèbres de Lie, examinant à la fois les algèbres de Lie abstraites et les algèbres de Lie associées aux groupes de Lie matriciels.

Ensuite, on traite la théorie élémentaire des représentations: définitions et quelques exemples fondamentaux de représentations d'algèbres de Lie.

Enfin, On étudie la formule Baker-Campbell-Hausdorff et ses conséquences. On utilise cette formule (à la place du théorème de Frobenius plus traditionnel) pour établir certains des résultats plus profonds sur la relation entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie.

0.2 Objectif général du cours

Décrire les groupes de Lie et les algèbres de Lie ainsi que décrire explicitement certaines représentations de ces groupes et algèbres de Lie.

0.3 Objectifs spécifiques

À la fin de l'ECUE, l'étudiant devra être capable de :

- décrire les groupes de Lie matriciels
- décrire les algèbres de Lie
- définir les algèbres de Lie des groupes de Lie matriciels
- décrire les représentations des groupes de Lie et celles des algèbres de Lie

0.4 Méthodologie d'enseignement

0.4.1 Présentation du cours

Les grandes lignes de chaque chapitre seront présentées sur Power-Point. Ainsi, on explique le but de chaque chapitre et son utilité comme outils mathématique. On résous quelques exercices en classe et on laisse des travaux à faire pour inciter les étudiants à travailler personnellement. On combine diverses méthodes lors de l'enseignement. Il s'agit des méthodes interactive, participative et expositive.

0.4.2 Travaux pratiques et dirigés

On initie les étudiants à faire des calculs sur les exercices laissés comme des TDs dans les notes. C'est à dire qu'on leur demande de vérifier manuellement certaines assertions données dans le texte.

0.4.3 Syllabus du cours

Les étudiants seront indiqués où ils peuvent trouver le présent syllabus (numéro d'enregistrement au répertoire des publications).

0.4.4 Mode d'évaluation

L'évaluation des acquis est constitué de:

- l'évaluation formative sous forme d'interrogations, de travaux dirigés (présentation au tableau des résultats obtenus pour les exercices laissés dans les notes). Tous ces travaux représentent 40% des notes.

- un examen oral ou écrit à la fin du semestre qui vaut 60% des notes.

Chapitre 1

Généralités sur les groupes de Lie

Les groupes sont des ensembles de symétries des objets qui sont symétriques par exemple les sphères. L'utilité de ces groupes est de caractériser les symétries d'un objet. On verra que les groupes très symétriques seront appelés de groupes de Lie. En d'autres termes, le jargon "**très symétrique**" signifie que l'objet est à la fois un groupe et une variété différentielle. Par exemple,S^1 et S^3 sont très symétrique tandis que S^2, S^4, S^5 ne le sont pas. On veut dans ce chapitre, donner une description algébrique de quelques groupes très symétriques. Ensuite, on veut décrire les groupes qui ont en plus une structure de variété différentielle. On commence par cet exemple pratique qui va nous aider à comprendre la suite.

1.1 Groupe des transformations affines de la droite des réels $\mathbb{R}$

On commence par rappeler la définition d'un groupe.

Définition 1. *Un ensemble G est un groupe si tous ses éléments h vérifient les propriétés suivantes:*

1. *la loi de composition: il existe une loi de composition "." telle que*

$$\forall h, q \in G, \quad (h.q) \in G.$$

2. *associativité: Pour tout élément q, h et k de G la propriété suivante doit être vraie:*

$$(q.h).k = q.(h.k)$$

3. *Élément neutre: Il existe $e \in G$ tel que*

$$\forall h \in G, \quad e.h = h.e = h$$

4. *Inverse: A tout élément $k \in G$, il doit correspondre un inverse (ou symétrique) par composition à gauche et à droite. Si le groupe est commutatif ces deux inverses seront égaux. Dans le cas général il doit exister deux éléments h_L et h_R de G tels que*

$$h_L.k = e \quad et \quad k.h_R = e,$$

où e est l'élément neutre. Dans le cas où ils existent, ces éléments sont également notées respectivement g_L^{-1} et g_R^{-1}.

Soit F une transformation affine de la droite des réels, i.e, une dilatation et une translation, définie par:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto X = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

On peut voir ce groupe comme un ensemble où chaque élément du groupe est un couple (a, b) avec $a \neq 0$. La loi de composition des transformations affines donne

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa', b + ab')$$

L'élément neutre est simplement la transformation identique $x \mapsto x$ et correspond à $(1, 0)$. L'inverse de (a, b) est

$$(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}).$$

En représentation matricielle, chaque élément peut être représenté par une matrice 2×2:

$$(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la loi de composition devient la multiplication matricielle. Donc le groupe affine $ax+b$ est simplement vu comme:

1. le groupe $G = \{(a, b) : a > 0, b \in \mathbb{R}\}$
2. le groupe $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$.

Il est facile de vérifier que l'ensemble G de toutes les matrices de la forme 2×2 ci-dessus formant donc l'ensemble de toutes les transformations possibles de la droite des réels $\mathbb{R}$ est un groupe. En effet, soit

$$G = \{M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}\}.$$

Vérifions ces propriétés pour l'ensemble G ci-haut.

1. Loi de composition: Pour cet ensemble de composition (interne) est la multiplication matricielle (qui n'est pas commutative). Soient M et N deux éléments quelconques de G, on a
$$M.N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$N.M = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Or $ac = ca \in \mathbb{R}^*$ puisque $a \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}^*$. Et de même, $ad+b \in \mathbb{R}$ et $cb+d \in \mathbb{R}$. Autrement dit:
$$M.N \in G \quad \text{et} \quad N.M \in G.$$
Et de plus $M.N \neq N.M$, donc la loi de composition interne est non commutative.

2. Associativité: Soient M, N et O trois éléments quelconques de G. Le produit matriciel étant associatif, on a directement:
$$(M.N).O = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} f & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$
D'où on a:
$$(M.N).O = M.(N.O).$$

3. Élément neutre: Existe-t-il un élément E de G tel que pour tout $M \in G : M.E = E.M = M$. Soit N un élément de G. Pour la composition par la droite, on a
$$M.N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
donc:
$$M.N = M \Longleftrightarrow N = \mathrm{Id},$$

où Id est la matrice identité de la dimension correspondante. Pour la composition par la gauche:

$$N.M = M \iff N = \mathrm{Id}.$$

Donc L'élément neutre existe et il vaut

$$E = \mathrm{Id}$$

4. Inverse: Soient M et N deux éléments de G, cherchons l'inverse à droite et l'inverse à gauche de M:

$$M.N = E \iff M_R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Et

$$N.M = E \iff M_L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Autrement dit on a:

$$M_R^{-1} = M_L^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Ainsi l'ensemble G considéré est bien un groupe de transformations qui transforme la droite des réels en une autre droite des réels, translatée et dilatée.

Définition 2. *Un groupe de Lie réel est une variété différentielle munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses (différentiables et sans trous)*

Le groupe G, précédemment défini, est paramétré par deux réels. La variété à laquelle il est isomorphe est donc bidimensionnelle et homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. C'est donc bien une variété différentielle sauf pour $a = 0$. De plus, de façon générale, sur les variétés homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ la notion de "lisse" se traduit par "différentiable et sans trou". Ces deux propriétés doivent alors être vérifiées pour les applications de composition (i.e, multiplication) et d'inversion du groupe pour que la variété $\mathbb{R}^2$ munie de la structure de groupe définie par G soit un groupe de Lie. Or les applications de multiplication et d'inverse de G sont différentiables et sans trou si $a > 0$ ou $a < 0$.

Un groupe de Lie a ainsi été construit: le groupe de Lie des transformations affines de la droite des réels:

$$G = \{M \in \mathrm{GL}_{2,2}(\mathbb{R}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}.$$

Ce groupe de Lie est noté $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

1.2 Groupes de Lie matriciels

Un groupe de Lie est en gros un groupe continu qui est décrit par plusieurs paramètres. Ici nous considérons un groupe de Lie matriciel qui est décrit par des groupes matriciels. C'était ça l'objectif de l'exemple dans la section précédente.

1.2.1 Définitions

Commençons par la définition formelle.

Définition 3. *Le groupe général linéaire réel (ou complexe), noté* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *(ou* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$*) est un ensemble de matrices inversibles de taille* $n \times n$ *d'entrées réelles (ou d'entrées complexes).*

Notons que nous pouvons identifier $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{n^2}$ et utiliser la notion standard de convergence dans $\mathbb{C}^{n^2}$. Explicitement, ceci signifie les définitions suivantes:

Définition 4. *Soit* A_m *une suite de matrices complexes dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*. On dit que* A_m *converges vers une matrice* A *si chaque entrée de* A_m *converge (quand* $m \to \infty$*) vers son entrée correspondant dans* A *(i.e, si* $(A_m)_{jk}$ *converge vers* A_{jk} *pour tous* $1 \leq j,k \leq n$*),*

Nous considérons maintenant les sous groupes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, c'est a dire les sous ensembles G de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tels que la matrice identité est dans G et tels que pour tous A, B dans G, les matrices AB et A^{-1} sont aussi dans G.

Définition 5. *Un groupe de Lie matriciel est un sous groupe* G *de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *satisfaisant la propriété suivante: si* A_m *est toute suite de matrices dans* G *et* A_m *converge vers une matrice* A*, alors soit* A *est dans* G *ou* A *n'est pas inversible.*

Cette condition sur G veut dire que G est un sous groupe fermée dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (Ceci ne veut pas dire nécessairement que G est un sous groupe fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$).
La définition 5 est équivalente a dire qu'un groupe de Lie matriciel est sous groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

La plus part des groupes de Lie matriciel que nous considérons possède cette propriété forte de fermeture donnée par la définition (5), i.e, G est fermée dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Un exemple d'un sous groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ qui n'est pas fermée et par conséquent qui n'est pas un groupe de Lie matriciel est l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à entrées rationnels $\mathrm{GL}(n, \mathbb{D})$. Cet ensemble est un sous groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mais n'est pas fermé. On peut montrer qu'on peut avoir une suite de matrices inversibles à entrées rationnelles convergentes vers une matrice inversible à entrées rationnelles (En fait, toute matrice inversible réelle est limite d'une suite de matrices inversibles à entrées rationnelles)

Un autre exemple d'un groupe de matrices qui n'est pas fermé dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, donc qui n'est pas un groupe de Lie matriciel est le suivant. Soit a un nombre irrationnel et soit

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Clairement, H est un sous groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. D'une part, à cause du fait que a est un irrationnel, alors $-\mathrm{Id}$ n'est pas dans H puisque pour mettre e^{it} égal à -1, nous devons prendre t comme un multiple entier impair de π, auquel cas ta ne peut pas être un multiple entier impair de π. D'autre part, en prenant $t = (2n+1)\pi$ pour un entier n bien choisi, nous pouvons rendre ta arbitrairement proche d'un multiple entier impair de π. (La vérification est laissée aux étudiants). Ainsi, nous pouvons trouver une suite de matrices dans H qui converge vers $-\mathrm{Id}$, et donc H n'est pas un groupe de Lie matriciel.

Exercice: Il suffit de voir que l'ensemble des nombres de la forme $e^{2\pi i n a}, n \in \mathbb{Z}$ est dense dans S^1. Ainsi, on voit que la fermeture de H est le groupe

$$\overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le groupe H à l'intérieur de $\overline{H}$ est appelé ligne irrationnelle dans un tore.

1.2.2 Le groupe général linéaire

Les groupes généraux linéaires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des groupes de Lie. Ils le sont parce que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ est un sous groupe de lui même. En plus si A_m est une suite de matrices dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ et A_m converge dans A, alors par définition de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, soit A est dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ou A n'est pas inversible.

En plus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ et si A_m est une suite de matrices dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et A_m converge dans A, alors les entrées de A sont réelles. Donc, soit A est dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ou A n'est pas inversible.

1.2.3 Le groupe spécial linéaire

On définit le groupe special linéaire (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), note $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ le groupe

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{\text{matrices de taille } n \times n \quad \text{avec entrées complexes ayant le déterminant un}\}$$

Tous ces groupes sont des sous groupes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. En plus, si A_n est une suite de matrices de determinant un et si A_n converge vers A, alors A est aussi de determinant un, car le determinant est une fonction continue. Donc, les groupes $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sont des groupes de Lie matriciels.

1.2.4 Le groupe unitaire et orthogonal

Une matrice A de taille $n \times n$ est appelé unitaire si les vecteurs colonnes de A sont orthonormaux, c'est -à -dire si

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{A_{lj}} A_{lk} = \delta_{jk} \tag{1.1}$$

Si nous définissons l'adjoint A^* de A par $(A^*)_{jk} = \overline{A}^{tr}_{jk} = \overline{A_{kj}}$, alors nous pouvons écrire l'expression (1.1) comme

$$\sum_{j=1}^{n} (A^*)_{jl} A_{lk} = \delta_{jk} \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) signifie que $A^*A = I$. Donc nous voyons que A est unitaire si et seulement si $A^* = A^{-1}$. En particulier, toute matrice unitaire est inversible.
L'opération adjointe des matrices satisfait la propriété

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^{-1}A^{-1}AB = I,$$

ce qui montre que la matrice AB est unitaire. En plus, puisque $(AA^{-1})^* = I^* = I$, nous voyons que $(A^{-1})^*A^* = I$, ce qui montre que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Donc, si A est unitaire, nous avons

$$(A^{-1})^*A^{-1} = (A^*)^{-1}A^{-1} = (AA^*)^{-1} = I$$

qui montre que A^{-1} est encore unitaire. Ainsi, la collection des matrices unitaires est un sous groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Nous appelons ce groupe, **le groupe unitaire et nous**

le notons $U(n)$.

Nous pouvons aussi définir le groupe special unitaire $SU(n)$, le sous groupe de $U(n)$ constituée par les matrices unitaires de determinant un. On peut vérifier que tous ces groupes $U(n)$ et $SU(n)$ sont des sous groupes fermés dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et qu'ils sont des groupes de Lie matriciels.

Entre temps, soit $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^n$ défini par

$$\langle x, y \rangle := \sum_j \overline{x_j} y_j.$$

Ici on peut écrire $x \in \mathbb{C}^n$ comme un élément de la forme suivante

$$x = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n).$$

Nous prenons une convention de mettre en premier facteur le complexe conjugué. Nous avons donc le résultat basique relatif à l'adjointe d'une matrice relatif au produit scalaire.

Proposition 1. *Pour tous $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'adjoint A^* de A satisfait la propriété suivante*

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Démonstration. Nous calculons que

$$\begin{aligned} \langle x, Ay \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \sum_{k=1}^{n} A_{jk} y_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{A_{jk}} x_j} y_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{A^*_{kj} x_j} y_k. \end{aligned}$$

La dernière ligne est le produit scalaire de $A^* x$ et y. $\square$

Ainsi, par la proposition (1), on voit que l'expression

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle AA^* x, y \rangle = \langle A^* Ax, y \rangle$$

nous montre que si A est unitaire, alors A préserve le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$, c'est à dire

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Inversement, si A préserve le produit scalaire, nous devons avoir

$$\langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

pour tous x, y. On peut voir que cette condition n'est remplie que si $A^*A = I$ (que si A est unitaire).

Donc, une caractérisation équivalente de l'unitarité est que A est unitaire si et seulement si A préserve le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^n$.

Enfin, pour toute matrice A, nous avons que $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$. Donc, si A est unitaire, nous avons

$$\det(A^*A) = |\det(A)|^2 = \det(I) = 1.$$

Par conséquent, pour toutes les matrices unitaires A, on a $|\det(A)| = 1$.

De la même manière que le cas complexe, on dit qu'une matrice de taille $n \times n$ est orthogonale si les vecteurs colonnes de A sont orthonormaux. Comme dans le cas d'unitarité, nous pouvons donner une version équivalente de cette condition. La seule différence est que si A est réelle, alors A^* est la même que la transposée A^{tr} de A, définie par

$$(A^{tr})_{jk} = A_{kj}.$$

Donc, A est orthogonal si et seulement si $A^{tr} = A^{-1}$, et cette condition est satisfaite si et seulement si A préserve le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Puisque $\det(A^{tr}) = \det(A)$, si A est orthogonal, nous avons

$$\det(A^{tr}A) = \det(A)^2 = \det(A) = 1,$$

telle que $\det(A) = \pm 1$.

La collection de toutes les matrices orthogonales forme un sous groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, que nous appelons **le groupe orthogonal et noté par $O(n)$.** L'ensemble des matrices orthogonales de determinant un est appelé **groupe special orthogonal et noté** $SO(n)$**.** Géométriquement, les éléments de $SO(n)$ sont des rotations pendant que les éléments de $O(n)$ sont soit des rotations ou des combinaisons des rotations et des réflexions.

Considérons maintenant la forme bilinéaire $(.,.)$ sur $\mathbb{C}^n$ définie par:

$$(x,y) := \sum_j x_j y_j. \tag{1.3}$$

Cette forme n'est pas un produit scalaire parce que, par exemple elle est symétrique au lieu d'être **symétrique conjuguée**. L'ensemble de toutes les matrices complexes A de taille $n \times n$ qui préservent cette forme, c'est -à -dire $(Ax, Ay) = (x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$ est le **groupe orthogonal complexe, noté** $O(n, \mathbb{C})$ et c'est un sous groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Puisque il n'y a pas de conjugaison dans la définition de la forme $(.,.)$, nous avons

$$(x, Ay) = (A^{tr}x, y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$ dans laquelle formule nous avons A^{tr} au lieu de A^*. Nous obtenons au final que une matrice complexe A de taille $n \times n$ est dans $O(n, \mathbb{C})$ si et seulement si

$$A^{tr}A = I,$$

et que $O(n, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie matriciel et que $\det(A) = \pm 1$ pour tout $A \in O(n, \mathbb{C})$. Le groupe $SO(n, \mathbb{C})$ est défini comme étant l'ensemble de toutes les matrices $A \in O(n, \mathbb{C})$ avec $\det(A) = 1$ et c'est aussi un groupe de Lie matriciel.

1.2.5 Groupe orthogonal généralisé et le groupe de Lorentz

Soit n et k les nombres entiers positifs et $\mathbb{R}^{n+k}$. On définit une forme bilinéaire symétrique $[.,.]_{n,k}$ sur $\mathbb{R}^{n+k}$ par la formule

$$[x, y]_{n,k} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} - \ldots - x_{n+k}y_{n+k}.$$

L'ensemble des matrices réelles A de taille $(n+k) \times (n+k)$ qui préservent cette forme, c'est -à -dire $[Ax, Ay]_{n,k} = [x, y]_{n,k}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$ est le **groupe orthogonal généralisé** $O(n, k)$. C'est un sous groupe de $\mathrm{GL}(n + k, \mathbb{R})$ et c'est un groupe de Lie matriciel. Pour comprendre cela, il suffit de faire l'exercice suivant.

Exercice en TD:
Soit g une matrice diagonale de taille $(n+k) \times (n+k)$ suivante

$$g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$, on a

$$[x, y]_{n,k} = \langle x, gy \rangle.$$

Montrer qu'une matrice réelle A de taille $(n+k) \times (n+k)$ appartient à $O(n,k)$ si et seulement si

$$gA^{tr}g = A^{-1}.$$

Le groupe de Lorentz $O(3,1)$ est particulièrement intéressant en physique.

Nous définissons aussi $SO(n,k)$ le sous groupe de $O(n,k)$ constituées des éléments de déterminant un.
Si A est une matrice réelle de taille $(n+k) \times (n+k)$, soit $A^{(j)}$ le j^e vecteur colonne de A, c'est-à-dire

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{n+k,j} \end{pmatrix}$$

Notons que $A^{(j)}$ est égale à Ae_j, c'est le résultat qu'on obtient quand on applique A sur le vecteur de base e_j. Donc A sera un élément de $O(n,k)$ si et seulement si

$$[Ae_j, Ae_l] = [e_j, e_l] \quad \text{pour tous} \quad 1 \leq j, l \leq n+k.$$

Explicitement, ceci signifie que $A \in O(n,k)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$[A^{(j)}, A^{(l)}]_{n,k} = 0 \quad j \neq l;$$
$$[A^{(j)}, A^{(j)}]_{n,k} = 1 \quad 1 \leq j \leq n;$$
$$[A^{(j)}, A^{(j)}]_{n,k} = -1 \quad n+1 \leq j \leq n+k.$$

Soit g une matrice diagonale de taille $(n+k) \times (n+k)$ suivante:

$$g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}.$$

Donc A est dans $O(n,k)$ si et seulement si $A^{tr}gA = g$. En prenant le determinant sur les deux membres de cette égalité, on obtient

$$(\det(A))^2\det(g) = \det(g), \quad \text{ou} \quad (\det(A))^2 = 1.$$

Donc, pour toute matrice $A \in O(n,k), \det(A) = \pm 1$.

1.2.6 Le groupe symplectique

Considérons la forme bilinéaire antisymétrique B sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie comme suit

$$\omega(x,y) = \sum_{j=1}^{n}(x_j y_{n+j} - x_{n+j}y_j). \tag{1.4}$$

L'ensemble de toutes les matrices A qui préservent ω, c'est-à-dire, telle que

$$\omega(Ax, Ay) = \omega(x,y) \quad \text{pour tous} \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}$$

est appelé **groupe symplectique réel,** $Sp(n,\mathbb{R})$. On peut voir que c'est un sous groupe fermé de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$.

Si J est la matrice de taille $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

alors on peut montrer (**faire cela en TD**) que

$$\omega(x,y) = \langle x, Jy \rangle.$$

A partir de cette formule, il n'est pas difficile (**faire cela en TD**) de montrer qu'une matrice réelle A de taille $2n \times 2n$ appartient à $Sp(n,\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^{tr}JA = J. \tag{1.5}$$

En prenant le determinant de cette égalité, on obtient

$$\det(A)^2\det(J) = (\det(J), i.e, (\det(A))^2 = 1.$$

Ceci montre que $\det(A) = \pm 1$ pour tout $A \in Sp(n,\mathbb{R})$. En fait, $\det(A) = 1$ pour tout $A \in Sp(n,\mathbb{R})$, même si ce n'est pas évident. On peut définir la forme bilinéaire ω sur $\mathbb{C}^{2n}$ par la même formule comme dans (1.5) (sans conjugaison). Sur $\mathbb{C}^{2n}$, on a la relation

$$\omega(z,w) = (z, Jw)$$

pour laquelle $(.,.)$ est la forme bilinéaire complexe (1.3).

L'ensemble des matrices complexes $2n \times 2n$ qui préservent cette forme est un groupe symplectique complexe $Sp(n, \mathbb{C})$. Une matrice A complexe $2n \times 2n$ appartient dans $Sp(n, \mathbb{C})$ si et seulement si elle satisfait la relation (1.5).

Encore plus, nous pouvons montrer que toute matrice $A \in Sp(n, \mathbb{C})$ satisfait la condition $\det(A) = \pm 1$ et en plus on obtient le cas de $\det(A) = 1$. Enfin, nous avons **le groupe symplectique compact** $Sp(n)$ défini par

$$Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n).$$

Ceci pour dire $Sp(n)$ est un groupe des matrices de taille $2n \times 2n$ qui préservent à la fois le produit scalaire et la forme bilinéaire ω.

1.2.7 Le groupe Euclidien et le groupe de Poincaré

Le groupe Euclidien $E(n)$ est un groupe de toutes les transformations de $\mathbb{R}^n$ qui préservent la distance. C'est-à-dire, des applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tels que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}^n$ définie par $d(x, y) = |x - y|$. Il peut être exprimé comme la composition d'une translation $T_x(y) = x + y$ et d'une transformation linéaire orthogonal. Les éléments de $E(n)$ sont des $T := T_x R$ et peuvent s'écrire comme des paires $\{x, R\}$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $R \in O(n)$ et nous posons que $\{x, R\}$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par la formule:

$$\{x, R\}y = Ry + x.$$

Puisque

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\}y = R_1(R_2 y + x_2) + x_1 = R_1 R_2 y + (x_1 + R_1 x_2),$$

l'opération de produit dans $E(n)$ est le suivant

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\} = \{x_1 + R_1 x_2, R_1 R_2\}. \tag{1.6}$$

On peut montrer (**faire cela en TD**) que l'inverse d'un élément de $E(n)$ est donnée par

$$\{x, R\}^{-1} = \{-R^{-1}x, R^{-1}\}.$$

Le groupe $E(n)$ n'est pas un sous groupe de $GL(n,\mathbb{R})$, puisque les translations sont des applications non linéaires. Néanmoins, $E(n)$ est isomorphe au sous-groupe fermé de $GL(n+1,\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

avec $R \in O(n)$.

Montrer (faire cela en TD) que les matrices de la forme (1.7) **se multiplient suivant la formule** (1.6).

Nous définissons maintenant le **groupe de Poincaré** $P(n,1)$ qui est le groupe de toutes les transformations de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forme

$$T = T_x A := \{x, A\}$$

avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $A \in O(n,1)$. C'est un groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui préservent la distance de Lorentz

$$d_L(x,y) := (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2.$$

Une transformation affine est de la forme $x \mapsto Ax+b$ où A est une transformation linéaire et b une constante. Le produit (**faire cela en TD**) du groupe $P(n,1)$ est analogue au produit (1.6) du groupe Euclidien.

Le groupe de Poincaré $P(n,1)$ est isomorphe au groupe des matrices $(n+2)\times(n+2)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & x_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

avec $A \in O(n,1)$. On peut montrer (**faire cela en TD**) que l'ensemble des matrices de la forme (1.8) est un groupe de Lie matriciel.

1.2.8 Le groupe d'Heisenberg

L'ensemble H de toutes les matrices A de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

avec a, b et c des nombres réels arbitraires, est un **groupe de Lie d'Heisenberg**. Il est facile de montrer que le produit de deux matrices de la forme (1.9) est encore une matrice de la même forme et que l'identité est une matrice de la forme (1.9). Les calculs montrent que l'inverse d'une matrice A de la forme (1.9) est

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Donc, ce groupe H est un sous groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

1.2.9 Le groupe symplectique compact

Nous voulons comprendre la structure du groupe

$$Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$$

et montrer qu'il peut être compris comme étant un groupe unitaire sur les quaternions. Puisque la définition de $Sp(n)$ implique l'unitarité, il convient d'exprimer la forme bilinéaire ω sur $\mathbb{C}^{2n}$ en termes du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ plutôt qu'en termes de la forme bilinéaire $(., .)$.

Définissons l'application linéaire de conjugaison

$$J : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n} : (\alpha, \beta) \mapsto J(\alpha, \beta) = (-\bar{\beta}, \bar{\alpha}),$$

avec α et β dans $\mathbb{C}^n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{2n}$. Nous pouvons vérifier que pour tous $z, w \in \mathbb{C}^{2n}$, nous avons

$$\omega(z, w) = \langle Jz, w \rangle.$$

Rappelons que notre produit scalaire est linéaire conjuguée par rapport au premier facteur puisque J est aussi linéaire conjuguée $\langle Jz, w \rangle$ est linéaire en z. Nous pouvons (**faire cela en TD**) vérifier que

$$\omega(z, w) = \langle Jz, w \rangle = -\overline{\langle z, Jw \rangle} = -\langle Jz, w \rangle$$

pour tous $z, w \in \mathbb{C}^{2n}$ et que

$$J^2 = -I.$$

Proposition 2. *Si U appartient à $U(2n)$ alors U appartient à $Sp(n)$ si et seulement si U commute avec J.*

Démonstration. Fixons $U \in U(2n)$. Donc pour $z, w \in \mathbb{C}^{2n}$, on a d'une part

$$\omega(Uz, Uw) = \langle JUz, Uw \rangle = \langle U^* JUz, w \rangle = \langle U^{-1} JUz, w \rangle$$

et d'autre part, on a

$$\omega(z, w) = \langle Jz, w \rangle.$$

En utilisant cela, on peut montrer que U préserve ω si et seulement si

$$U^{-1} JU = J$$

qui est équivalent à écrire $JU = UJ$. □

Le résultat précédent peut être utilisé pour donner une perspective différente sur la définition de $Sp(n)$ comme suit.

L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ est une algèbre de quatre dimensions sur $\mathbb{R}$ engendrée par les éléments 1 (l'identité), i, j et k satisfaisant les relations suivantes

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k; \quad ji = -k;$$
$$jk = i; \quad kj = -i;$$
$$ki = j; \quad ik = -j.$$

Nous pouvons réaliser l'algèbre des quaternions dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ en identifiant 1 à la matrice identité I et en posant

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre $\mathbb{H}$ est donc l'espace des combinaisons linéaires réelles de I, i, j et k. Maintenant, puisque J est linéaire conjuguée, on a

$$J(iz) = -iJz$$

pour tous $z \in \mathbb{C}^{2n}$, donc $iJ = -Ji$. Donc, si on définit $K := iJ$, on obtient

$$K^2 = iJiJ = -J(i)^2J = J^2 = -I,$$

et on peut vérifier que iI, J et K satisfont les relations de commutations que i, j, k. On peut donc faire de $\mathbb{C}^{2n}$ un espace vectoriel sur l'algèbre non commutative $\mathbb{H}$ en posant

$$i.z = iz; \quad j.z = Jz; \quad k.z = iJz.$$

Maintenant, si $U \in \mathrm{Sp}(n)$ alors U commute avec i et par J par la multiplication (proposition 2) et donc $K := iJ$. Donc U est donc un quaternion linéaire. Ainsi une matrice U de taille $2n \times 2n$ appartient à $\mathrm{Sp}(n)$ si et seulement si U est un quaternion linéaire et préserve la norme. Nous pouvons donc penser que $\mathrm{Sp}(n)$ est un groupe unitaire sur les quaternions.

Le groupe symplectique compact se construit naturellement avec les groupes orthogonaux (applications préservant la norme sur $\mathbb{R}$) et les groupes unitaires (applications préservant la norme sur $\mathbb{C}$).

Toute matrice $U \in U(2n)$ possède une base orthonormale de vecteurs propres de valeurs propres ayant la valeur absolue 1. On ajoute alors la propriété additionnelle des vecteurs propres et des valeurs propres que U doit satisfaire pour être dans $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$.

1.3 Propriétés topologiques

Nous décrivons trois importantes propriétés topologiques pour les groupes de Lie matriciels qui sont satisfaites pour certains groupes de Lie et non pour d'autres.

1.3.1 Compacité

Définition 6. *Un groupe de Lie $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est compact si il est compact au sens habituel comme sous ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$.*

Dans la lumière du théorème de Borel-Heine, un groupe de Lie matriciel est compact si et seulement si il est fermé (vu comme sous ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas comme un sous ensemble de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) et est borné. Explicitement, ceci signifie que G est compact si et seulement si:

- chaque fois que $A_m \in G$ et que A_m converge, i.e, $A_m \to A$ alors A est dans G
- il existe une constante C telle que pour tout $A \in G$, on a $|A_{jk}| \leq C$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$.

Les groupes de Lie suivants sont compact: $O(n)$ et $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$ et $Sp(n)$. Chacun de ces groupes a été vu comme étant fermée dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et chacun satisfait la condition $|A_{jk}| \leq 1$ puisque dans chaque cas, chaque colonne de $A \in G$ doit être un vecteur unitaire. On peut considérer les normes matricielles suivantes pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} ||A||_\infty &= \sup_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}| \\ ||A||_1 &= \sum_i \sum_j |a_{ij}| \\ ||A||_2 &= \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

La plupart des autres groupes que nous avons considérés ne sont pas compacts. Le groupe special linéaire $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ par exemple, est non borné (en exception du cas trivial $n = 1$), car pour tout m la matrice est de determinant 1 mais n'est pas borné.

$$A_m = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & \frac{1}{m} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici on a les propriétés suivantes

- le $\det(A_m) = m.1/m.1...1 = 1$, donc $A_m \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.
- La norme euclidienne de A_m satisfait $||A_m|| \geq m$ qui tend vers ∞ quand $m \to \infty$.

Donc, $SL(n, \mathbb{R})$ n'est pas borné comme sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1.3.2 Connexité

Définition 7. *Un groupe de Lie matriciel G est dit connexe (connexe par arcs en topologie)si pour tous A et B dans G, il existe un chemin continue $A(t), a \leq t \leq b$*

contenu dans G tel que $A(a) = A$ et $A(b) = B$. Pour tout groupe de Lie matriciel G, la composante de l'identité de G, noté G_0 est un ensemble d'éléments A dans G pour lequel il existe un chemin continue $A(t), a \leq t \leq b$ contenu dans G tel que $A(a) = I$ et $A(b) = A$.

Pour montrer qu'un groupe de Lie matriciel est connexe, il suffit de montrer que chaque élément $A \in G$ est connecté à l'identité par un chemin continu complètement contenu dans G.

Un groupe de Lie matriciel G qui n'est pas connexe peut être décomposé (uniquement) comme une union de plusieurs morceaux, appelés **composantes**, de telle sorte que deux éléments de la même composante peuvent être joints par un chemin continu, mais pas deux éléments de composantes différentes.

Proposition 3. *Si G est un groupe de Lie matriciel, la composante G_0 contenant l'identité de G est un sous groupe normal de G (on dit aussi sous groupe distingué de G).*

Démonstration. Si A et B sont des éléments de G_0, alors il existe des chemins continus $A(t)$ et $B(t)$ qui connectent I à A et I à B dans G. Donc le chemin $A(t)B(t)$ est continu et connecte I à AB dans G et $(A(t))^{-1}$ est un chemin connectant I à A^{-1} dans G. Ainsi, tous les éléments AB et A^{-1} appartiennent à G_0, prouvant que G_0 est un sous groupe de G. Supposons maintenant que A est dans G_0 et B tout élément de G. Alors il existe un chemin continu $A(t)$ qui connecte I à A dans G et le chemin $BA(t)B^{-1}$ connecte I à BAB^{-1} dans G. D'où $BAB^{-1} \in G_0$, ce qui prouve que G_0 est normal. □

Notons qu'à cause du fait que la multiplication matricielle et l'inversion matricielle sont continues sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, il s'ensuit que $A(t)$ et $B(t)$ sont continues, donc aussi les chemins $A(t)B(t)$ et $A(t)^{-1}$ sont continues.

Théorème 1. *Le groupe* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *est connexe pour tout* $n \geq 1$.

On utilise ici le théorème (qu'on ne va pas démontrer dans ce cours, mais qu'on peut trouver dans [1] annexe A, Theorem A.4) que toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

Démonstration. Dire que toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure signifie qu'on peut exprimer toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $A = CBC^{-1}$, avec

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si A est inversible, alors chaque λ_j doit être non nul. Posons que $B(t)$ soit obtenu en multipliant la partie de B au dessus de la diagonale par $(1-t)$, pour $0 \leq t \leq 1$ et posons $A(t) = CB(t)C^{-1}$. Alors $A(t)$ est un chemin continu contenu dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui prend origine en A et prend fin en CDC^{-1}, avec D une matrice diagonale dont les entrées sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nous pouvons donc définir les chemins $\lambda_j(t)$ qui connectent λ_j à 1 dans $\mathbb{C}^*$ en considérant que t va de 1 à 2, et nous pouvons définir $A(t)$ sur l'intervalle $1 \leq t \leq 2$ par

$$A(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix} C^{-1}$$

$\square$

Donc $A(t), 0 \leq t \leq 2$, est un chemin continu dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ connectant A à I.

Par contre, on peut montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ses deux composantes connexes sont les ensembles $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R})$

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(M) > 0\}$$

$$\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(M) < 0\}$$

En effet, l'application $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue. Comme $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe (car union de deux ensembles disjoints), on en déduit que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Montrons maintenant que $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe (par arcs). Soit $M \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. On définit la matrice diagonale

$$D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \det(M)).$$

Comme $MD^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, il existe $S \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tel que $M = SD$. Or $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ car l'application $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ est continue et $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) =$

$\det^{-1}(\{1\})$.
Comme $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est connexe (par arcs), il existe une application

$$\alpha : [0,1] \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$$

continue telle que $\alpha(0) = S$ et $\alpha(1) = I_n$. On définit alors $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = \alpha(t)\,(tI_n + (1-t)D)$$

L'application γ est continue et on a $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = I_n$, d'où le résultat.

La démonstration ci-dessus s'adapte à $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$. On relie toute matrice de l'ensemble $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ à $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1)$. On en déduit que $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ est connexe (par arcs), donc $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ sont des composantes connexes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Proposition 4. *Le groupe* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ *est connexe pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sauf qu'ici nous devons être sûr des chemins connectant $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ à I contenus entièrement dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Nous pouvons nous assurer en choisissant $\lambda_n(t)$ dans la deuxième partie de la preuve précédente, égale à $(\lambda_1(t)\ldots\lambda_{n-1}(t))^{-1}$. □

Proposition 5. *Les groupes* $\mathrm{U}(n)$ *et* $\mathrm{SU}(n)$ *sont connexes pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration. On sait d'abord que toute matrice unitaire possède une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres de valeur absolue un. Donc toute matrice $U \in \mathrm{U}(n)$ peut être écrite comme $U_1 D U_1^{-1}$, avec $U_1 \in \mathrm{U}(n)$ et D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}$. Il s'ensuit que toute matrice unitaire U s'écrit

$$U = U_1 \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}, \tag{1.11}$$

avec U_1 unitaire et $\theta_i \in \mathbb{R}$. Inversement, on peut montrer que toute matrice de la forme (1.11) est unitaire. Nous pouvons donc définir

$$U(t) = U_1 \begin{pmatrix} e^{i(1-t)\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i(1-t)\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

On peut voir que $U(t)$ est dans $\mathrm{U}(n)$ pour tout t et $U(t)$ connecte U à I.

Une légère modification de l'argument comme dans la preuve de la proposition précédente, montre que $\mathrm{SU}(n)$ est connexe. □

1.3.3 Simple connexité

Définition 8. *Un groupe de Lie matriciel G est dit simplement connexe si il est connexe et en plus tout boucle dans G peut être réduite continuellement en un point.*

Plus explicitement, supposons que G est connexe. Donc G est simplement connexe si pour tout chemin continu $A(t), 0 \leq t \leq 1$ contenu dans G et avec $A(0) = A(1)$, il existe une fonction continue $A(s,t), 0 \leq s, t \leq 1$, prenant les valeurs dans G et ayant les propriétés suivantes:

- $A(s, 0) = A(s, 1)$ pour tout s,
- $A(0, t) = A(t)$
- $A(1, t) = A(1, 0)$ pour tout t.

On peut penser que $A(t)$ est une boucle tandis que $A(s,t)$ est famille de boucles paramétrées par la variable s qui réduisent $A(t)$ en un point. La condition 1 dit que pour toute valeur de s, on a une boucle, la condition 2 dit que si $s = 0$ la boucle est la boucle spécifique $A(t)$ et la condition 3 dit que si $s = 1$ la boucle est un point. La condition de connexité simple est importante car pour les groupes simplement connexes, il existe une relation particulière entre le groupe et l'algèbre de Lie.

Proposition 6. *Le groupe* $\mathrm{SU}(2)$ *est simplement connexe.*

Démonstration. Il faut comprendre que la matrice de $\mathrm{SU}(2)$ sera exprimé sous la forme $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ pour une paire $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. C'est à dire la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

est un élément de $\mathrm{SU}(2)$.
En effet, pour voir cela, il suffit de prendre

$$\mathrm{SU}(2) = \{X = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(2) | X^*X = I \quad \text{et} \quad \det(X) = 1.\}$$

La condition $X^*X = I$ signifie aussi que $X^* = X^{-1}$, c'est a dire

$$\begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Cela produit, les égalités suivantes

$$\overline{\alpha} = \delta, \quad \overline{\beta} = -\gamma, \quad \overline{\gamma} = -\beta, \quad \overline{\delta} = \alpha, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ces égalités montrent que X prend la forme suivante

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Cela permet de voir que SU(2) peut être pensé (topologiquement) comme la sphere tridimensionnelle S^3 dans $\mathbb{R}^4$. Pour voir cela, on considère les nombres complexes

$$\alpha = x_1 + ix_2 \quad \text{et} \quad \beta = x_3 + ix_4.$$

On a donc

$$\mathrm{SU}(2) \to \mathbb{R}^4 : (\alpha, \beta) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Les images de cette application sont des points tels que $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$, cad $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Étant donnés α et β on obtient

$$x_1 = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}, \quad x_3 = \frac{\beta + \bar{\beta}}{2}, \quad x_4 = \frac{\beta - \bar{\beta}}{2i}.$$

La condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ donne $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ ou bien $\|X\|^2 = 1$ avec $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Cette equation définit la sphere unité S^3 dans $\mathbb{R}^4$. Il est connu que S^3 est simplement connexe. □

1.3.4 Homomorphisme et isomorphisme

Nous étudions la notion d'homomorphisme pour les groupes de Lie matriciels.

Définition 9. *Soient G et H des groupes de Lie matriciels. Une application $\Phi : G \to H$ est dite **homomorphisme de groupe de Lie** si*

- *Φ est un homomorphisme de groupe*
- *Φ est continue*

*Si en plus, Φ est bijective et l'inverse Φ^{-1} est continue alors Φ est appelé **isomorphisme de groupe de Lie***

Exemples

- L'exemple le plus simple d'homomorphisme de groupe de Lie est l'application **determinant** qui est un homomorphisme de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^*$.
- L'application
$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2) : \theta \mapsto \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Cette application est visiblement continue et le calcul (en utilisant les formules trigonométriques) montre que Φ est un homomorphisme

Exemple SU(2) **et** SO(3).
Un autre exemple très important est la relation entre les groupes de Lie SU(2) et SO(3).

Considérons l'espace vectoriel V des matrices X complexes 2×2 auto-adjointes (i.e, $X^* = X$) et de trace nulle. Les éléments de V sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

L'espace vectoriel V réel est de dimension trois muni de la base

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul direct montre que la famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une base orthonormée de V. Ayant choisi une base orthonormée, nous identifions V avec $\mathbb{R}^3$ en considérant x_1, x_2, x_3 vus comme coordonnées de $\mathbb{R}^3$. Donc, le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$ peut être calculé comme suit
$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(AB).$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'. \end{aligned}$$

Maintenant si U est un élément de SU(2) et A un élément de V, il est facile de voir que UAU^{-1} est un élément de V. Donc pour un élément $U \in \mathrm{SU}(2)$ nous pouvons définir une application
$$\Phi_U : V \to V : A \mapsto UAU^{-1}.$$

Puisque U est unitaire, alors on a

$$(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^* AU^* = UAU^{-1}$$

et cela montre que UAU^{-1} est un élément de V. Si $U \in \mathrm{SU}(2)$ et $A, B \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B) \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}((UAU^{-1})(UBU^{-1})) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{trace}(UABU^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{trace}(AB) \\
&= \langle A, B \rangle
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisée le fait que la trace est invariante sous l'opération de conjugaison. Donc l'application Φ_U est une transformation orthogonale de $V \cong \mathbb{R}^3$ et peut être pensé comme un élément de O(3).

On voit donc que $U \to \Phi_U$ est une application de SU(2) dans O(3). Il est facile de montrer que $U \to \Phi_U$ est un homomorphisme (c'est a dire, $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$) et qu'elle est continue.
Rappelons que tout élément de O(3) est de determinant det $= \pm 1$. Comme SU(2) est connexe, alors Φ_U doit être un élément de SO(3) pour tout élément $U \in \mathrm{SU}(2)$. D'où $\Phi : U \mapsto \Phi_U$ est un homomorphisme de SU(2) dans SO(3) qui est continue. Puisque $(-I)A(-I)^{-1} = A$, nous voyons que Φ_{-I} est l'identité de SO(3). L'application $\Phi : U \to \Phi_U$ ne réalise pas une correspondance biunivoque entre SU(2) et SO(3) parce que pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on a toujours $\Phi_U = \Phi_{-U}$. On voit que $\Phi : U \to \Phi_U$ est un homomorphisme de groupes de Lie matriciels SU(2) et SO(3)

Supposons par exemple que U est une matrice

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Par un calcul direct, nous obtenons,

$$U \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}$$

avec $x_1 = x_1'$ et

$$\begin{aligned}
x_2' + ix_3' &= e^{i\theta}(x_2 + ix_3) \\
&= (x_2 \cos\theta - x_3 \sin\theta) + i(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, Φ_U est une rotation d'angle θ dans le plan (x_2, x_3). Notez que même si les entrées diagonales de U sont $e^{\pm i\theta/2}$, l'application Φ_U est une rotation d'angle θ, et non $\theta/2$.

1.4 Groupes de Lie

Définition 10. *Un groupe de Lie G est une variété différentiable équipée d'une structure de groupe telle que les opérations de multiplication et d'inversion soient différentiables. Explicitement, le produit*

$$G \times G \to G$$

et l'inversion $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ sont de classe C^∞.

Exemple:

Soit

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 = \{(x, y, u) : x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad u \in S^1 \subset \mathbb{C}\},$$

équipé du produit de groupe défini par

$$(x_1, y_1, u_1).(x_2, y_2, u_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1y_2}u_1u_2).$$

Donc, G est un groupe de Lie.

Démonstration. Il est facile de montrer que cette opération est associative, que le produit de trois éléments est donné par

$$\left(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, e^{i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3)}u_1u_2u_3\right).$$

L'élément neutre dans G est $e = (0, 0, 1)$ et chaque élément (x, y, u) possède son inverse $(-x, -y, e^{ixy}u^{-1})$. Donc G est un groupe. En plus, les deux opérations de multiplication et d'inversion sont différentiables, ce qui montre que G est un groupe de Lie. □

Bien qu'il n'y ait rien sur les matrices dans la définition de G, on peut quand même se demander si G est isomorphe à un groupe de Lie matriciel. Cela s'avère faux. Il n'y a pas d'homomorphisme continu et injectif de G dans un $GL(n, \mathbb{C})$. Nous concluons donc que tous les groupes de Lie ne sont pas isomorphes à un groupe de Lie matriciel.

Néanmoins, la plupart des exemples intéressants de groupes de Lie sont des groupes de Lie matriciels.

Nous allons pouvoir (dans les chapitres à venir) voir comment nous pourrions montrer que chaque groupe de Lie matriciel est un groupe de Lie. Nous prouverons que tout groupe de Lie matriciel regroupe une sous-variété plongée dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. D'où le théorème suivant

Théorème 2. *Tout groupe de Lie matriciel est un groupe de Lie.*

Bien que ce n'est pas la preuve explicite de ce résultat, on pourrait donner une approche de preuve de ce que ça devrait être.

Démonstration. Considérons d'abord le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. L'espace de toutes les matrices réelles $n \times n$ peut être considéré comme $\mathbb{R}^{n^2}$. Puisque $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les matrices A avec $\det(A) \neq 0$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. (Autrement dit, étant donné une matrice inversible A, il existe un voisinage U de A tel que chaque matrice $B \in U$ est également inversible). Ainsi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est une variété lisse de dimension n^2. De plus, le produit matriciel AB est clairement une fonction lisse (même polynomiale) des entrées de A et B, et (à la lumière de la règle de Kramer) A^{-1} est une fonction lisse des entrées de A. Ainsi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie. $\square$

1.4.1 Exercices

1. **Les groupes orthogonaux:** Soit $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, i.e, $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Montrer qu'une matrice A préserve les produits scalaires si et seulement si les vecteurs colonnes de A sont orthonormés. Montrer que pour toute matrice réelle B de taille $n \times n$
$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^{\mathrm{tr}} y \rangle,$$
où $(B^{\mathrm{tr}})_{ij} = B_{ji}$. En utilisant le fait qu'une matrice A preserve le produit scalaire si et seulement si $A^{\mathrm{tr}} A = I$.

2. **Les groupes unitaires:** Soit $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^n$, i.e, $\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i$. Montrer que $A^* A = I$ si et seulement si
$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad ((A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}).$$

3. **Le groupe d'Heisenberg:** Déterminer le centre $Z(H)$ du groupe d'Heisenberg H. Montrer que le groupe quotient est abélien.

Chapitre 2

Algèbres de Lie et application exponentielle

L'exponentielle d'une matrice joue un rôle important dans la théorie des groupes. L'exponentielle sert dans la définition d'une algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel et il constitue le mécanisme de passage d'information à partir d'une algèbre de Lie vers un groupe de Lie.

2.1 Exponentiel d'une matrice

L'exponentielle d'une matrice joue un rôle cruciale dans la théorie des groupes de Lie.

Définition 11. *Si X est une matrice $n \times n$, on définit l'exponentiel de X, noté e^X ou* $\exp(X)$ *par une série de puissances*

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \tag{2.1}$$

dans laquelle X^0 est définie égale à la matrice identité I et X^m est le produit répétée de la matrice X avec elle même.

Proposition 7. *Pour toute matrice carrée $n \times n$ réelle ou complexe, la série* (2.1) *est convergente. L'exponentielle d'une matrice e^X est une fonction de X continue.*

La preuve utilise la notion de norme d'une matrice $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ que nous définissons en pensant $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}^{n^2}$.

Définition 12. *Pour tout $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la norme*

$$\|X\| = \left(\sum_{j,k=1} |X_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La quantité $\|X\|$ est appelée ***norme de Hilbert Schmidt*** *de X.*

On peut calculer cette norme sous la forme suivante

$$\|X\| = (\mathrm{trace}(X^* X))^{\frac{1}{2}}$$

Cette norme satisfait aux inégalités (triangulaire et Cauchy-Schwarz) suivantes:

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

$$\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut voir que si X_m est une suite de matrices alors X_m converge vers la matrice X dans le sens de la définition(4) si et seulement si

$$\|X_m - X\| \to 0$$

quand $m \to \infty$.

Démonstration. La preuve de la proposition 7. Par la propriété de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|X^m\| \leq \|X\|^m$$

et par conséquent, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{X^m}{m!} \right\| \leq \|I\| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|X\|^m}{m!} < \infty.$$

Ce qui prouve que la série (2.1) converge absolument et donc convergente.

Pour montrer la continuité, notons que puisque X^m est une fonction continue de X, les sommes partielles de (2.1) sont continues. La série (2.1) converge uniformément sur l'ensemble de la forme $\{\|X\| \leq R\}$. Donc e^X est continue sur cet ensemble et donc continue sur toute l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. □

Nous donnons ici une liste de propriétés de l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 8. *Soient X et Y des $n \times n$ matrices. On a donc*

1. $e^0 = I$
2. $(e^X)^* = e^{X^*}$.
3. e^X *est inversible et* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$ *pour tous* α *et* β *dans* $\mathbb{C}$.
5. *Si* $XY = YX$, *alors* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.
6. *Si* C *est inversible alors* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$.

Démonstration. Le point 1 est évident tandis que le point 2 suit en prenant terme à terme de l'adjoint de l'exponentielle e^X. Les points 3 et 4 sont des cas spéciaux du point 5. Pour vérifier le point 5, prenons le produit

$$e^X e^Y = (I + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots)(I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \ldots).$$

Après développement terme à terme et en groupant les termes où la puissance de X plus la puissance de Y vaut m, on obtient

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} X^k Y^{m-k} \tag{2.2}$$

Maintenant, puisque X et Y commutent, on a

$$(X+Y)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} X^k Y^{m-k},$$

et donc l'expression (2.2) devient

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (X+Y)^m = e^{X+Y}.$$

Pour le point 6, si C est inversible, on sait que

$$(CXC^{-1})^m = CX^m C^{-1}.$$

Ainsi, on peut écrire donc

$$\sum_{m=0} \frac{1}{m!}(CXC^{-1})^m = \sum_{m=0} \frac{1}{m!} CX^m C^{-1}$$

ou encore

$$\sum_{m=0} \frac{1}{m!}(CXC^{-1})^m = C \sum_{m=0} \frac{X^m}{m!} C^{-1}$$

ce qui donne

$$e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}.$$

□

Proposition 9. *Soit X une $n \times n$ matrice complexe et voir l'espace de toutes les $n \times n$ matrices comme $\mathbb{C}^{n^2}$. Donc e^{tX} est une courbe différentiable dans $\mathbb{C}^{n^2}$ et*

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX} X.$$

En particulier, on a

$$\frac{d}{dt} \left.\right|_{t=0} e^{tX} = X.$$

Démonstration. En différenciant terme à terme les puissances de e^{tX}, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tX} &= 0 + X + \frac{(tX)}{1!} X + \frac{(tX)^2}{2!} X + \frac{(tX)^3}{3!} X + \dots \\ &= \left(I + \frac{(tX)}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots \right) X \\ &= e^{tX} X \end{aligned}$$

□

2.2 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Nous considérons des méthodes pour calculer l'exponentielle d'une matrice.

2.2.1 Cas 1: X est diagonalisable

Supposons que X est une $n \times n$ matrice réelle ou complexe et que X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe une matrice complexe inversible C telle que $X = CDC^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On observe que e^D est une matrice diagonale de valeurs propres $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ et à l'aide de la proposition 8, on a

$$e^X = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Si on diagonalise explicitement, on peut calculer explicitement e^X. Notons que si X est réelle, bien que C peut être complexe et les λ_i peuvent être complexes, e^X peut être réelle, puisque chaque terme dans la série de e^X est réelle. Par exemple, prenons

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de X sont $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ associées aux valeurs propres $-ia$ et ia, respectivement. Donc, la matrice inversible

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

envoie les vecteurs de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur les vecteurs propres de X, et donc $C^{-1}XC$ est une matrice diagonale D. Donc $X = CDC^{-1}$ est telle que:

$$\begin{aligned} e^X &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons que si X est réelle (et par conséquent a) alors e^X est réelle.

2.2.2 Cas 2: X est nilpotente

Une $n \times n$ matrice X est dite nilpotente si $X^m = 0$ pour un certain entier naturel m. Bien sur si X est nilpotente, alors dire que $X^m = 0$ signifie que $X^l = 0$ pour tous les $l > m$. Dans ce cas, les termes de la série (2.1) terminent après les m premiers termes. Par exemple, on calcule e^{tX}, pour

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $X^3 = 0$. Donc

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & ta & tb + \frac{1}{2}t^2ac \\ 0 & 1 & tc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Cas 3: X est arbitraire

Une matrice arbitraire X n'est ni nilpotente ni diagonalisable. Mais il est connu (selon la forme canonique de Jordan) que toute matrice X peut être écrite sous la forme $X = S+N$ avec S diagonalisable et N nilpotente et $SN = NS$. Donc, puisque S et N commutent, alors on a

$$e^X = e^{S+N} = e^S e^N$$

et e^S et e^N peuvent être calculés en utilisant les cas précédents.

Par exemple, prenons

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les deux matrices commutent parce que la première matrice est multiple de l'identité et donc

$$e^X = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & e^a b \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

2.3 Logarithme d'une matrice

Nous voulons définir le logarithme d'une matrice qui pourrait être l'inverse de l'exponentielle d'une matrice. Nous commençons par rappeler la situation d'un logarithme pour les nombres complexes.

Lemme 1. *La fonction*

$$\log z = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(z-1)^m}{m}$$

est définie et analytique dans le cercle de rayon un pour $z = 1$. *Pour tout* z *tel que* $|z-1| < 1$*, on a*

$$e^{\log z} = z.$$

Pour tout u *avec* $|u| < \log 2$*, on a* $|e^u - 1| < 1$*,et*

$$\log e^u = u.$$

Démonstration. Le logarithme usuel pour les nombres réels positifs satisfait la relation

$$\frac{d}{dx} \log(1-x) = \frac{-1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + \ldots) \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

En intégrant terme à terme et en notant $\log 1 = 0$, on obtient

$$\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right).$$

En prenant $z = 1 - x$, (i.e, $x = 1 - z$), on obtient

$$\begin{aligned} \log z &= -\left((1-z) + \frac{(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^3}{3} + \ldots\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(z-1)^m}{m}. \end{aligned}$$

Cette série a un rayon de convergence égale à un et définit une fonction complexe holomorphe (analytique) sur l'espace $\{|z-1| < 1\}$ qui coïncide avec le logarithme usuel d'un réel z dans l'intervalle $(0, 2)$. Maintenant, $\exp(\log z) = z$ pour $z \in (0, 2)$ et puisque les deux membres sont holomorphes en z, cette expression continue va être holomorphe sur tout l'espace $\{|z - 1| < 1\}$. De l'autre coté, si $|u| < \log 2$, alors

$$|e^u - 1| = \left| u + \frac{u^2}{2!} + \dots \right| \leq |u| + \frac{|u|^2}{2!} + \dots = e^{|u|} - 1 < 1.$$

Donc, $\log(\exp(u))$ a un sens pour tout u. Puisque $\log(\exp(u)) = u$ pour tout réel u avec la condition $|u| < \log 2$, il s'ensuit par l'analyticité que $\log(\exp(u)) = u$ pour tous les nombres complexes avec $|u| < \log 2$. $\square$

Théorème 3. *La fonction*

$$\log A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A - I)^m}{m}$$

est définie et continue sur l'ensemble de toutes les matrices A complexes $n \times n$ telles que $\|A - I\| < 1$ et $\log A$ est réel si A est réelle. Pour toute matrice A avec $\|A - I\| < 1$, on a

$$e^{\log A} = A.$$

Pour toute matrice X avec $\|X\| < \log 2$, $\|X - 1\| < 1$ et

$$\log e^X = X.$$

Démonstration. Cette série a valeurs matricielle converge absolument si $\|A - I\| < 1$ sinon si $\|A - I\| > 1$ cette série converge, par exemple si $A - I$ est nilpotente. Nous montrons que $\exp(\log A) = A$ pour toute matrice A avec $\|A - I\| < 1$. Nous considérons deux cas.

Cas 1: A est diagonalisable.

Supposons que $A = CDC^{-1}$, avec D diagonale. Donc $A - I = CDC^{-1} - I = C(D - I)C^{-1}$. Il s'ensuit que $(A - I)^m$ est de la forme

$$(A - I)^m = C \begin{pmatrix} (z_1 - 1)^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (z_n - 1)^m \end{pmatrix} C^{-1}$$

avec $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des valeurs propres de A. Maintenant, si $\|A - I\| < 1$, alors on a certainement $|z_1 - 1| < 1$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(A-I)^m}{m} = C\begin{pmatrix}\log z_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \log z_n\end{pmatrix}C^{-1}$$

et par le lemme, on a

$$e^{\log A} = C\begin{pmatrix}e^{\log z_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\log z_n}\end{pmatrix}C^{-1} = A.$$

Cas 2: A n'est pas diagonalisable.

Si A n'est pas diagonalisable, nous approximons A par une suite A_m de matrices diagonalisables et nous faisons appel à la continuité des fonctions logarithme et exponentielle. Donc, $\exp(\log A) = A$ pour toute matrice A avec $\|A - I\| < 1$. Maintenant le même argument comme dans le cas complexe, montre que si $\|X\| < \log 2$ alors $\|e^X - I\| < 1$. La preuve de $\log(e^X) = X$ est similaire à celle de $\exp(\log A) = A$. □

Proposition 10. *Il existe une constante c telle que pour toute $n \times n$ matrice B avec $\|B\| < \frac{1}{2}$,*

$$\|\log(I + B) - B\| \le c\|B\|^2.$$

Démonstration. Notons que

$$\log(I+B) - B = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m} - B = B + \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m} - B = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m}$$

ou encore

$$\log(I+B) - B = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m} = B^2\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^{m-2}}{m},$$

ce qui fait

$$\|\log(I+B) - B\| \le \|B\|^2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{m-2}}{m},$$

ce qui estime la forme désirée. □

Nous pouvons réécrire la proposition dans la forme la plus générale, en notant comme suit

$$\log(I+B) = B + O\left(\|B\|^2\right)$$

où $O(\|B\|^2)$ désigne la quantité d'ordre $\|B\|^2$ (i.e, une quantité qui est bornée par un multiple constant de $\|B\|^2$ pour toutes les valeurs suffisamment petites de $\|B\|^2$).

2.4 Propriétés supplémentaires de l'exponentielle

Les propriétés que nous voulons ajouter ici sont importantes dans l'étude des algèbres de Lie.

Théorème 4. *(Lie product formula) Soient $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a*

$$e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m.$$

Démonstration. En multipliant les séries $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$, on a

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

□

Maintenant, puisque $\lim_{m\to\infty} e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = I$, alors $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$ est dans un domaine du logarithme pour toutes les valeurs de m suffisamment grandes. Par la proposition10, on écrit

$$\begin{aligned}
\log(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}) &= \log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) \\
&= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\|^2\right) \\
&= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).
\end{aligned}$$

En appliquant l'exponentiel sur le logarithme, on obtient

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = \exp\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

et donc

$$\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp\left(X+Y+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on obtient donc

$$\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp(X+Y).$$

C'est la formule du produit de Lie.

Théorème 5. *Soit X une matrice réelle ou complexe de taille $n\times n$. Donc on a*

$$\det(e^X) = e^{\mathrm{trace}(X)}.$$

Démonstration. Il existe trois cas à montrer.
Cas 1: X est diagonalisable.

Supposons qu'il existe une matrice complexe inversible C telle que

$$X = C\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}C^{-1}.$$

Donc, on a

$$e^X = C\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}C^{-1}.$$

Ainsi, la trace$(X)=\sum\lambda_i$ et $\det(e^X)=\prod e^{\lambda_i}=e^{\sum\lambda_i}$. (Ici on rappelle que $\det(CDC^{-1}) = \det(C)\det(D)\det(C^{-1}) = \det(D)$ et $\mathrm{trace}(CDC^{-1}) = \mathrm{trace}(D)$) .

Cas 2: X est nilpotente.
On se sert du théorème suivant:

Théorème 6. *Toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure où tous les éléments diagonaux sont tous nuls.*

Si X est nilpotente alors X ne possède aucune valeur propre non nulle et donc toutes les racines du polynôme caractéristique doivent être nulles. A l'aide du théorème 2.12, X peut être écrit

$$X = C \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

Dans ce cas, il est facile de voir que e^X sera une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale:

$$e^X = C \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$$

Donc si X est nilpotente, $\text{trace}(X) = 0$ et $\det(e^X) = 1$.

Cas 3: X est arbitraire.
Toute matrice peut s'écrire comme suit $X = S+N$ avec $SN = NS$ où S est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et N nilpotente. Comme S et N commutent alors $e^X = e^{S+N} = e^S e^N$. Donc par ces deux premiers résultats, on a

$$\det(e^X) = \det(e^S)\det(e^N) = e^{\text{trace}(S)} e^{\text{trace}(N)} = e^{\text{tr}(X)}.$$

□

Définition 13. *Une fonction $A : \mathbb{R} \to \text{GL}(n, \mathbb{C})$ est appelée sous groupe à un paramètre de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ si*

- *A est continue*
- *$A(0) = I$*
- *$A(t + s) = A(t)A(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.*

Théorème 7. *Si $A(.)$ est un sous groupe à un paramètre de $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$, alors il existe une unique matrice complexe X de taille $n \times n$ telle que*

$$A(t) = e^{tX}.$$

2.5 Notion d'algèbre de Lie

Commençons par la définition formelle d'une algèbre de Lie.

Définition 14. *Une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie est un espace vectoriel réelle ou complexe* $\mathfrak{g}$ *muni de l'opération* $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *et satisfaisant les propriétés suivantes:*

- $[.,.]$ *est bilinéaire,*
- $[.,.]$ *est antisymétrique,*
- *l'identité de Jacobi est satisfaite*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \text{pour tous} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Les éléments X et Y d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ commutent si $[X,Y] = 0$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est commutative si $[X,Y] = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.
L'opération $[.,.]$ est appelée crochet de Lie. La condition antisymétrique implique toujours pour une algèbre que $[X,X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.
Nous donnons le premier exemple le plus simple. **Ces exemples sont des exercices en TDs pour lesquels la vérification est laissée aux étudiants.**

Exemple 1. *Soit* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ *et posons* $[.,.] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$[x, y] = x \wedge y,$$

où $\wedge$ *est un produit vectoriel ("cross product" en anglais). Ainsi,* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie.*

Un autre exemple fondamentale est le suivant

Exemple 2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre associative et soit* $\mathfrak{g}$ *un sous espace de* $\mathcal{A}$ *telle que* $XY - YX \in \mathfrak{g}$ *pour tous* $X, Y \in \mathcal{A}$. *Donc* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie où le crochet de Lie est définie par*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Un troisième exemple est le suivant.

Exemple 3. *Soit* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *l'espace de toutes les matrices* $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{trace}(X) = 0$. *Alors* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *est une algèbre de Lie avec le crochet* $[X,Y] = XY - YX$.

Démonstration. Pour tous X et Y dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{trace}(XY - YX) = \mathrm{trace}(XY) - \mathrm{trace}(YX) = 0.$$

Ceci est vrai en particulier si X et Y sont de trace nulle. $\square$

Définition 15. *Une sous algèbre de Lie d'une algèbre de Lie réelle ou complexe $\mathfrak{g}$ est un sous espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ pour tous $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe et $\mathfrak{h}$ est un sous espace réel de $\mathfrak{g}$ qui est fermé sous le crochet, alors $\mathfrak{h}$ est appelé sous algèbre réelle de $\mathfrak{g}$.*

Une sous algèbre $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite idéal dans $\mathfrak{g}$ si $[X, H] \in \mathfrak{h}$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $H \in \mathfrak{h}$.

Le centre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble de tous les $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$.

Définition 16. *Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont des algèbres de Lie, alors l'application linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est appelée **homomorphisme d'algèbre de Lie** si*

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \textit{pour tous} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

*Si en plus, ϕ est une bijection biunivoque alors ϕ est appelé **isomorphisme d'algèbre de Lie**.*

*Un isomorphisme d'algèbre de Lie avec elle-même est dite **automorphisme d'algèbre de Lie**.*

On donne le premier exemple d'homomorphisme d'algèbre de Lie.

Définition 17. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et X est un élément de $\mathfrak{g}$, on définit une application linéaire*

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : Y \mapsto \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

L'application $X \mapsto \mathrm{ad}_X$ est une **application adjointe ou une représentation adjointe**.
L'identité de Jacobi est l'équivalent de l'assertion qui dit ad_X est une dérivation du crochet de Lie:

$$\mathrm{ad}_X([Y, Z]) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)].$$

Proposition 11. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors*

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y],$$

ce qui dit que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *est un homomorphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration. On observe que

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z]$$

tandis que

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = (\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X)(Z) = \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y(Z) - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X(Z)$$

ou encore

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

De l'identité de Jacobi qui est égale

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$$

on peut y tirer la relation,

$$-[Z,[X,Y]] = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]]$$

ou encore en utilisant l'antisymétrie sur le premier membre et sur le dernier terme du second membre, on obtient

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]. \tag{2.3}$$

Ainsi le premier membre de (2.3) est égale à $\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z)$ tandis que le second membre de (2.3) est égale à $[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z)$. D'où le résultat voulu. □

L'expression (2.3) **est équivalente à l'identité de Jacobi.**

Définition 18. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie et soit $X_1, \ldots, X_N$ une base de $\mathfrak{g}$ (vu comme espace vectoriel), Alors les constantes c_{jkl} telles que*

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{N} c_{jkl} X_l$$

sont appelées ***des constantes de structure*** *de $\mathfrak{g}$(par rapport à la base considérée).*

Les constantes de structure satisfont les deux propriétés suivantes

$$c_{jkl} + c_{kjl} = 0$$

et

$$\sum_n (c_{jkn}c_{nlm} + c_{kln}c_{njm} + c_{ljn}c_{nkm}) = 0$$

La première relation découle de l'anti-symétrie du crochet de Lie tandis que la deuxième relation découle de l'identité de Jacobi.

5

2.6 Algèbre de Lie simple, résoluble et nilpotente

Ces notions décrivent à quel point une algèbre de Lie est éloigné d'une algèbre de Lie abélienne, mais dans des directions opposées:

- Nilpotence: l'algèbre de Lie est très proche de l'abèlien.
- Résolubilité: l'algèbre est modérément proche de l'abélien
- Simplicité: l'algèbre est irréductible et non décomposable. C'est à dire absence totale de sous-structures.

On va alors décrire chaque notion.

Définition 19. *Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on définit une suite de sous algèbres de Lie $\mathfrak{g}_j$ dans $\mathfrak{g}$ comme suit:*
on pose $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ et alors on définit $\mathfrak{g}_{j+1}$ comme étant l'espace des combinaisons linéaires des commutateurs de la forme $[X, Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}_j$. Ces algèbres sont appelées des séries centrales descendante de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite ***nilpotente*** *si $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ pour un certain j. On a donc*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k], \quad \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

Ici les crochets successifs deviennent rapidement centraux puis nuls. L'algèbre de Lie est presque abélienne.

De façon équivalente, $\mathfrak{g}_j$ est l'espace engendrée par les commutateurs d'ordre j suivants:

$$[X_1, [X_2, [X_3, \dots [X_j, X_{j+1}] \dots]]].$$

Notons que chaque commutateur d'ordre j est aussi le commutateur d'ordre $(j-1)$ en posant $\tilde{X}_j = [X_j, X_{j+1}]$. Donc, $\mathfrak{g}_{j-1} \subset \mathfrak{g}_j$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}_j$, on a $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}$, ce qui montre que $\mathfrak{g}_j$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 12. *Si $\mathfrak{g} \subset \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est l'espace des 3×3 matrices triangulaires supérieures avec des zéros sur la diagonale, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sous le commutateur $[X,Y] = XY - YX$. C'est une algèbre de Lie nilpotente.*

Démonstration. Considérons la base suivante:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul directe montre que l'on a

$$[X,Y] = Z; \quad [X,Z] = [Y,Z] = 0.$$

En particulier, le crochet de Lie de deux éléments de $\mathfrak{g}$ est encore dans $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est engendré par Z et $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] = 0$, ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. □

Définition 20. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors le commutateur idéal dans $\mathfrak{g}$, notée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est l'espace des combinaisons linéaires des commutateurs, i.e, l'espace des éléments Z dans $\mathfrak{g}$ qui peuvent s'exprimer comme*

$$Z = c_1[X_1, Y_1] + \ldots + c_m[X_m, Y_m]$$

pour les constantes c_j et les vecteurs X_j et Y_j dans $\mathfrak{g}$.

Pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, le commutateur $[X,Y]$ est dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Ceci est vrai en particulier si X est dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, ce qui montre que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$.

Définition 21. *Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on définit une suite de sous algèbres de Lie $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(2)}, \ldots$ dans $\mathfrak{g}$ telle que*

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}; \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}]; \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \ldots, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$$

*Ces sous algèbres sont appelées des séries dérivées de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie est dite **résoluble** si $\mathfrak{g}^{(j)} = \{0\}$ pour un certain j.*

On a l'intuition d'éliminer les non-commutativités par étapes. On peut voir que chaque algèbre dérivée $\mathfrak{g}^{(j)}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}^{(j-1)}$ et non nécessairement dans $\mathfrak{g}$.

Il est clair que $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}^{(j)}$ pour tout j, d'où, si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est aussi résoluble.

Exemple 4. *On considère une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ ayant les crochets non nuls suivants*

$$[e_1, e_3] = ae_1 + be_2, \quad [e_2, e_3] = ce_1 + de_2$$

avec

$$ad - bc \neq 0, \quad a^2 + d^2 + 2bc \neq 0.$$

Calculer l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. $\mathfrak{g}$ est-elle résoluble? $\mathfrak{g}$ est-elle abélienne?

Démonstration. Un élément X de $\mathfrak{g}$ s'écrit $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Le crochet de Lie $[X, Y]$ fournit un élément $Z = \alpha' e_1 + \beta' e_2$ selon les hypothèses du problème. Donc l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal engendrée par les vecteurs e_1 et e_2. On écrit donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \rangle e_1, e_2 \langle$. Ainsi, on voit facilement que

$$[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0.$$

Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble mais non abélienne (**Vérifier tous ces résultats en TD**). □

Proposition 13. *Si $\mathfrak{g} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est l'espace des matrices 2×2 de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sous le commutateur $[X, Y] = XY - YX$. C'est une algèbre de Lie résoluble mais elle n'est pas nilpotente.

Démonstration. Le calcul direct montre que l'on obtient

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

avec $h = ae + bf - bd - ce$, ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. En plus, le commutateur idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est de dimension un et par conséquent commutative. Donc $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$, ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est résoluble.
Considérons ensuite, les éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2.4), on voit que $[H, X] = 2X$ et que

$$[H, [H, [H, \dots [H, X] \dots]]]$$

est un multiple non nul de X, ce qui montre que $\mathfrak{g}_j \neq \{0\}$ pour tout j.

$\square$

Définition 22. *Une algèbre de Lie est dite simple si:*

- *elle n'est pas abélienne,*
- *elle ne possède aucun idéal non trivial.*

Donc on peut rien isoler ni simplifier. Raison pour laquelle, on peut encore la définir comme suit.

Définition 23. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **irréductible** si et seulement si les seuls idéaux dans $\mathfrak{g}$ sont $\mathfrak{g}$ et $\{0\}$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **simple** si elle est irréductible et* $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$.

Notons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 1 est nécessairement commutative puisque $[aX, bX] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tous a et b dans un corps $\mathbb{K}$. Si $\mathfrak{g}$ est commutative, alors tout sous espace de $\mathfrak{g}$ est un idéal. Donc une algèbre de Lie commutative est irréductible si elle est de dimension 1. Une définition équivalente d'une algèbre de Lie simple est que:"Une algèbre de Lie est simple si elle est irréductible et non commutative".

Proposition 14. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est simple.*

Démonstration. On utilise la base suivante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul des commutations donnent

$$[X, Y] = H; \quad [H, X] = 2X; \quad [H, Y] = -2Y.$$

Supposons que $\mathfrak{h}$ est un idéal dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et que $\mathfrak{h}$ contient un élément $Z = aX + bH + cY$, où a, b et c ne sont pas tous nuls. Nous montrons que, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Supposons premièrement que $c \neq 0$. Alors l'élément

$$[X, [X, Z]] = [X, (-2bX + cH)] = -2cX$$

est un multiple non nul de X. Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal, on conclut que $X \in \mathfrak{h}$. Mais $[X, Y]$ est un multiple non nul de H et $[Y, [Y, X]]$ est un multiple non nul de Y, ce qui montre que Y et H appartiennent aussi à $\mathfrak{h}$. De là on conclut que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
Supposons ensuite que $c = 0$ mais $b \neq 0$. Alors $[X, Z]$ est un multiple non nul de X et nous pouvons appliquer le même argument du paragraphe précédent pour montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Enfin, si $c = 0$ et $b = 0$ mais $a \neq 0$, alors Z lui-même est un multiple non nul de X et nous concluons encore que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. □

Bref, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est

- simple
- Ni résoluble ni nilpotente
- Génère toute son algèbre par crochets.

On a les implications suivantes

$$\text{Nilpotente} \Longrightarrow \text{Résoluble} \Longrightarrow \text{Non simple}$$
$$\text{et Simple} \Longrightarrow \text{Ni résoluble, ni nilpotente.}$$
Aucune réciproque n'est vraie.

2.7 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel

Les algèbres de Lie constituent un outils important pour étudier les groupes de Lie matriciels. D'un coté, les algèbres de Lie sont simples que les groupes de Lie matriciels car les algèbres de Lie sont des espaces vectoriels. Nous comprenons plus les algèbres de Lie en faisant de l'algèbre linéaire. D'un autre coté, une algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel contient beaucoup d'information du groupe. Donc plusieurs questions en rapport avec les groupes de Lie matriciels peuvent être résolues en considérant des problèmes semblables et faciles (à résoudre) sur les algèbres de Lie.

Définition 24. *Soit G un groupe de Lie matriciel. Alors l'algèbre de Lie de G, notée $\mathfrak{g}$ est l'ensemble de toutes les matrices X telles que e^{tX} soit dans G pour tous les nombres réels t.*

Convention des physiciens
Les physiciens considèrent l'application $X \mapsto e^{iX}$ au lieu de $X \mapsto e^{X}$. Un physicien peut donc penser qu'une algèbre de Lie de G est l'ensemble de toutes les matrices X telles

que $e^{itX} \in G$.

Notons que même si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, nous n'exigeons pas e^{tX} soit dans G pour tout nombre complexe mais seulement pour tout réel t.

Proposition 15. *Soit G un groupe de Lie matriciel et X un élément de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Donc e^X est un élément de la composante de l'identité G_0 de G.*

Démonstration. Par définition d'une algèbre de Lie, e^{tX} est dans G pour tout réel t. Cependant, on prend que t varie de 0 à 1, on voit que e^{tX} est un chemin continu qui connecte l'identité I à e^X. □

Théorème 8. *Soit G un groupe de Lie matriciel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{g}$, alors les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ *pour tout* $A \in G$.
2. $sX \in \mathfrak{g}$ *pour tous les nombres réels* s.
3. $X + Y \in \mathfrak{g}$.
4. $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Pour le point 1, on observe par la proposition 8 que

$$e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1} \in G$$

pour tout t, ce qui montre que $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$. Pour le point 2, on voit que $e^{t(sX)} = e^{(st)X}$, qui doit être dans G pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $X \in \mathfrak{g}$. Pour le point 3, nous utilisons la formule du produit de Lie qui dit que

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}}\right)^m.$$

Donc, $\left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}}\right)^m$ est dans G pour tout m. Puisque G est fermé, la limite (qui est inversible) doit être également dans G. Ceci montre que $X + Y$ est aussi dans $\mathfrak{g}$. Enfin, pour le point 4, on utilise la loi du produit et la proposition9 pour calculer

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)|_{t=0} = (XY)e^0 + (e^0Y)(-X) \quad (2.5)$$

$$= XY - YX. \quad (2.6)$$

Maintenant, par le point 1, $e^{tX}Ye^{-tX}$ est dans $\mathfrak{g}$ pour tout t. En plus par le point 2 et 3, $\mathfrak{g}$ est un sous espace réel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui montre $\mathfrak{g}$ est un sous espace (topologiquement) fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Donc l'élément

$$XY - YX = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hX}Ye^{-hX} - Y}{h}$$

appartient à $\mathfrak{g}$. □

Définition 25. *Un groupe de Lie matriciel G est dit complexe si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous espace complexe de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire si $iX \in \mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*

Les exemples des groupes de Lie complexes sont $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ comme nous allons le voir dans la section qui va suivre.

Proposition 16. *Si G est commutatif alors son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est commutative.*

Démonstration. Pour toutes deux matrices X et Y dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, le commutateur de X et Y peut être calculé

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}e^{tX}e^{sY}e^{-tX}\ |_{s=0}\right)|_{t=0}. \tag{2.7}$$

Si G est commutatif et si X et Y appartiennent à $\mathfrak{g}$ alors e^{tX} commute avec e^{sY} et l'expression entre parenthèses dans le membre de droite de (2.7) est indépendante de t, ce qui fait que $[X,Y] = 0$. □

2.8 Exemples d'algèbres de Lie de certains groupes de Lie matriciels

Proposition 17. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ de toutes les matrices $n \times n$ dont les entrées sont complexes. De façon similaire, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est égale à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ est constituée de toutes les $n \times n$ matrices complexes dont la trace est nulle et l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est constituée de toutes les $n \times n$ matrices réelles dont la trace est nulle.*

Démonstration. Si $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors e^{tX} est inversible, donc X appartient à l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(n,\mathbb{C})$. Si $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ alors e^{tX} est inversible et est réel. Donc X est un élément de l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(n,\mathbb{R})$. Inversement, si e^{tX} est réel pour tout réel t, alors $X = \frac{d(e^{tX})}{dt}\mid_{t=0}$ doit être également un réel. Si $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est de trace nulle, alors par le théorème5, $\det(e^{tX}) = e^{t\,\mathrm{traceX}} = e^0 = 1$, ce qui montre que X est un élément de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Inversement, si $\det(e^{tX}) = e^{t\,\mathrm{trace}(X)} = 1$ pour tout réel t, alors

$$\mathrm{trace}(X) = \frac{d}{dt}e^{t\,\mathrm{trace}(X)}\mid_{t=0} = 0.$$

Enfin, si X est réelle et de trace nulle, alors e^{tX} est un réel et de determinant un pour tout réel t, ce qui montre que X est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Inversement, si e^{tX} est un réel et de determinant un pour tout réel t, alors les arguments précédents montrent que X doit être réelle et de trace nulle.

Faisons $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ explicitement. En effet,

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(X) = 1\}$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $e^{tX} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.
Donc

$$\det(e^{tX}) = e^{\mathrm{trace}(tX)} = 1$$

Ceci est équivalent à dire que l'on a

$$\mathrm{tr}(tX) = log(1) \Leftrightarrow t\,\mathrm{tr}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(X) = 0$$

car t ne doit pas nécessairement être égal à 0.
Ainsi

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{trace}(X) = 0\}.$$

En particulier, pour $n = 2$, on obtient que

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

Une base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est constituée de matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et les commutations sont les suivantes

$$[X_1, X_2] = 2X_2, \quad [X_1, X_3] = -2X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1$$

Les constantes de structures sont $2, -2, 1$. La dimension de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est 3. □

Proposition 18. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{u}(n)$ *de* $\mathrm{U}(n)$ *est constituée de toutes les matrices complexes satisfaisant* $X^* = -X$ *et l'algèbre de Lie* $\mathfrak{su}(n)$ *de* $\mathrm{SU}(n)$ *est constituée de toutes les matrices complexes satisfaisant* $X^* = -X$ *et* $\mathrm{trace}(X) = 0$*. L'algèbre de Lie* $\mathfrak{o}(n)$ *du groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n)$ *est constituée de toutes les matrices réelles* X *satisfaisant* $X^{tr} = -X$ *et l'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}(n)$ *de* $\mathrm{SO}(n)$ *est la même que celle de* $\mathrm{O}(n)$*.*

Démonstration. Une matrice X est unitaire si et seulement si $U^* = U^{-1}$.On cherche les matrices X telle que e^{tX} soit unitaire. Donc, e^{tX} est unitaire si et seulement si

$$(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}. \tag{2.8}$$

Or par le 2eme point de la proposition 8, on sait $(e^{tX})^* = e^{tX^*}$, et donc (2.8) devient

$$e^{tX^*} = e^{-tX}. \tag{2.9}$$

La condition (2.9) est remplie pour tous les réels t si et seulement si $X^* = -X$. Donc, l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ de $\mathrm{U}(n)$ est constituée des matrices X telles que $X^* = -X$. Comme dans la preuve de la proposition précédente, si on ajoute la condition determinant un au niveau du groupe, cela signifie qu'on ajoute la condition trace nulle au niveau de l'algèbre de Lie. En d'autres termes, la matrice obtenue X doit être telle $\det(e^{tX}) = 1$. Cela signifie que l'on a

$$\det(e^{tX}) = 1 \Leftrightarrow e^{\mathrm{trace}(tX)} = 1 \Leftrightarrow e^{t\,\mathrm{trace}(X)} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{trace}(X) = 0.$$

Un argument similaire sur $\mathbb{R}$ montre qu'une matrice réelle X appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $\mathrm{O}(n)$ si et seulement si $X^{tr} = -X$. Puisque une telle matrice est de trace nulle (car toutes les entrées sur la diagonale de X sont nulles) alors on voit que tout élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n)$ est également un élément de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(n)$.

On peut le montrer explicitement ici. On sait que le groupe de Lie matriciel

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : M^{tr} M = \mathrm{Id} \right\}.$$

Son algèbre de Lie est l'ensemble des matrices $X \in \mathrm{O}(n)$ telles que $e^{tX} \in \mathrm{O}(n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci s'exprime par

$$(e^{tX})^{tr} e^{tX} = e^{tX^{tr}} e^{tX} = \mathrm{Id}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} e^{tX^{tr}}e^{tX} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX^{tr})^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX)^k}{k!}\right) \\ &= \left(\mathrm{Id}+tX^{tr}+\frac{t^2(X^{tr})^2}{2!}+\mathcal{O}(X^3)\right)\left(\mathrm{Id}+tX+\frac{t^2(X)^2}{2!}+\mathcal{O}(X^3)\right) \\ &= \mathrm{Id}+t\left(X^{tr}+X\right)+\frac{t^2}{2}\left((X^{tr})^2+X^2\right)+\mathcal{O}(X^3) \end{aligned}$$

Les développements limités à l'ordre 1 en t s'écrivent donc

$$e^{tX^{tr}}e^{tX} = \mathrm{Id}+t\left(X^{tr}+X\right). \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$e^{tX^{tr}}e^{tX} = e^{t(X^{tr}+X)}$$

et son développement donne

$$e^{t(X^{tr}+X)} = \mathrm{Id}+t(X^{tr}+X)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(X^{tr}+X)^k.$$

A l'ordre 1, on a

$$e^{t(X^{tr}+X)} = \mathrm{Id}+t(X^{tr}+X). \tag{2.11}$$

Les equations (2.10) et (2.11) étant les mêmes et égales à Id, on a donc

$$\mathrm{Id}+t(X^{tr}+X) = \mathrm{Id}$$

Ce qui donne

$$t(X^{tr}+X)=0 \Leftrightarrow X^{tr}+X=0.$$

Ainsi l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{o}(n)=\left\{X\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : X^{tr}+X=0\right\}.$$

□

Proposition 19. *Si* $g=\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_k\end{pmatrix}$ *alors l'algèbre de Lie de* $\mathrm{O}(n,k)$ *est constituée de toutes les matrices réelles* X *telles que*

$$gX^{tr}g=-X.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n,k)$ *de* $\mathrm{SO}(n,k)$ *est la même que celle de* $\mathrm{O}(n,k)$.
Si $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, *alors l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ *de* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ *est constituée de toutes les matrices réelles* X *telles que*

$$X^{tr}JX = J.$$

L'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ *est constituée de toutes les matrices complexes* X *satisfaisant la même condition.*
L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(n)$ *de* $\mathrm{Sp}(n)$ *est constituée de toutes les matrices complexes* X *telles que* $X^{tr}JX = J$ *et* $X^* = -X$.

La preuve est similaire aux preuves précédentes. On note que l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(n,k)$ est la même que celle de $\mathrm{O}(n,k)$.

Proposition 20. *L'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg* H *est l'espace de toutes les matrices de la forme*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si X est strictement triangulaire supérieure, il est facile de vérifier que X^m est strictement triangulaire supérieure pour tous les nombres entiers positifs m. Donc pour X de la forme (2.12), on aura $e^{tX} = I + B$ avec B strictement triangulaire supérieure, ce qui montre que $e^{tX} \in H$. Inversement, si e^{tX} appartient dans H pour tous les réels t, alors toutes les entrées de la matrice e^{tX} sur ou en dessous de la diagonale sont indépendantes de t. Donc $X = \frac{de^{tX}}{dt} \mid_{t=0}$ sera de la forme (2.12). □

2.9 Isomorphisme entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$

Les éléments suivants forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont aux relations de commutations suivantes

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2.$$

Les éléments suivants forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont aux relations de commutation suivantes

$$[F_1, F_2] = F_3, \quad [F_2, F_3] = F_1, \quad [F_3, F_1] = F_2.$$

Puisque les éléments E_1, E_2 et E_3 satisfont les mêmes relations de commutation que F_1, F_2 et F_3 alors les deux algèbres de Lie sont isomorphes.

2.10 Homomorphisme de groupe de Lie et d'algèbre de Lie

Le théorème qui suit nous montre qu'un homomorphisme entre les groupes de Lie provient naturellement de l'homomorphisme d'algèbre de Lie correspondant. Par conséquent, l'isomorphisme de groupe de Lie induit l'isomorphisme d'algèbre de Lie.

Théorème 9. *Soient G et H des groupes de Lie matriciels avec leurs algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement. On suppose que $\Phi : G \to H$ est un homomorphisme de groupe de Lie. Alors il existe une unique application linéaire réelle $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)} \tag{2.13}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. L'application ϕ possède des propriétés suivantes

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$, *pour tout $X \in \mathfrak{g}, A \in G$.*
2. $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ *pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.*
3. $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX}) \mid_{t=0}$ *pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration. Puisque Φ est un homomorphisme de groupe qui est continue, alors $\Phi(e^{tX})$ sera un sous groupe à un paramètre de H, pour lequel $X \in \mathfrak{g}$. Ainsi, par le théorème 7, il existe une unique matrice Z telle que

$$\Phi(e^{tX}) = e^{tZ} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

On définit $\phi(X) = Z$ et on vérifie que ϕ possède des propriétés valables.
Premièrement, en posant $t = 1$ dans l'équation (2.14), on voit que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.
Ensuite, si $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ pour tout t, alors $\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$, ce qui montre que $\phi(sX) = s\phi(X)$. En utilisant le théorème 4 et la continuité de Φ, on peut calculer que

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= \Phi\left(\lim_{m\to\infty}(e^{tX/m}e^{tY/m})^m\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\Phi(e^{tX/m})\Phi(e^{tY/m})\right)^m . \end{aligned}$$

Donc,

$$e^{t\phi(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{t\phi(X)/m}e^{t\phi(Y)/m}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}.$$

En différenciant ce résultat à $t = 0$, on obtient $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$.
On a obtenu donc une application linéaire réelle ϕ qui satisfait la relation (2.13). Si il existe une autre application ϕ' linéaire réelle satisfaisant cette propriété, on aurait

$$e^{t\phi(X)} = e^{t\phi'(X)} = \Phi(e^{tX}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En différenciant à $t = 0$, on obtient $\phi(X) = \phi'(X)$.

On vérifie maintenant les propriétés restantes que ϕ doit satisfaire. Pour toute matrice $A \in G$, on a

$$e^{t\phi(AXA^{-1})} = e^{\phi(tAXA^{-1})} = \Phi(e^{tAXA^{-1}}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{t\phi(AXA^{-1})} &= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1}) \\ &= \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1}. \end{aligned}$$

La différentielle de ce résultat à $t = 0$ donne le point 1 du théorème. De même, pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \phi([X,Y]) &= \phi\left(\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\mid_{t=0}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\phi\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\mid_{t=0}, \end{aligned}$$

dans ce cas, on a utilisé le fait que la dérivation commute avec la transformation linéaire ϕ. Donc,

$$\begin{aligned}\phi([X,Y]) &= \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\phi(Y)\Phi(e^{-tX})\mid_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\mid_{t=0}\\ &= [\phi(X),\phi(Y)],\end{aligned}$$

ce qui établit le point 1 du théorème.

Enfin, puisque $\Phi(e^{tX}) = e^{\phi(tX)} = e^{t\phi(X)}$, on peut calculer $\phi(X)$ pour obtenir le point 3. □

2.11 Exemple

Soit $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) : U \mapsto \Phi_U$ un homomorphisme de groupe de Lie. Alors l'homomorphisme d'algèbre de Lie associée est donnée par

$$\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$$

qui satisfait la relation

$$\phi(E_j) = F_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

où $\{E_1, E_2, E_3\}$ et $\{F_1, F_2, F_3\}$ sont les bases de $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ respectivement comme donné dans la section 2.9.

Puisque ϕ envoie une base de $\mathfrak{su}(2)$ sur une base $\mathfrak{so}(3)$, on voit que ϕ est un isomorphisme d'algèbre de Lie mais Φ n'est pas un isomorphisme de groupe de Lie car (on l'a vu plus haut) $\ker(\Phi) = \{I, -I\}$.

Démonstration. Si X est dans $\mathfrak{su}(2)$ et $Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$ avec $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ est dans l'espace vectoriel V alors on a (Rappel: $\Phi_U(A) := UAU^{-1}$ pour $U \in \mathrm{SU}(2)$)

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})Y|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}|_{t=0} = [X,Y].$$

Donc, $\phi(X)$ est une application linéaire de $V \cong \mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par $Y \mapsto [X,Y]$.

Disons que si $X = E_1$ alors les calculs montrent que

$$\left[E_1, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}$$

où $(x_1', x_2', x_3') = (0, -x_3, x_2)$. Puisque

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

on conclut que $\phi(X)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui apparaît dans le second membre de l'équation (2.15), qui est exactement la matrice F_1 de la base de $\mathfrak{so}(3)$.
Le calcul similaire permet de F_2 et F_3 en calculant respectivement $\phi(E_2)$ et $\phi(E_3)$ (**Faire cela en TD**). □

Définition 26. *Soit G un groupe de Lie matriciel, et son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$. Alors pour tout $A \in G$, on définit une application linéaire $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par la formule*

$$\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

Proposition 21. *Soit G un groupe de Lie matriciel et son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$. Soit $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ le groupe de toutes les transformations linéaires inversibles de $\mathfrak{g}$. Donc, l'application $A \to \mathrm{Ad}_A$ est un homomorphisme de G dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. En plus, pour tout $A \in G$, l'application Ad_A satisfait la relation*

$$\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. Le point 1 du théorème (9) garantit que $\mathrm{Ad}_A(X)$ est dans $\mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Le reste est facile à voir. □

Puisque $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel réel de dimension k, $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est essentiellement le même que $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. Donc, on voit $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ comme un groupe de Lie matriciel. On peut voir que l'application $\mathrm{Ad}_A : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est continue et donc un homomorphisme de groupe de Lie.

Par le théorème 9 , il existe une application linéaire réelle associée $X \mapsto \mathrm{ad}_X$ obtenue de celle de l'algèbre de Lie de G dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, i.e, l'application $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ avec la propriété suivante

$$e^{\mathrm{ad}_X} = \mathrm{Ad}_{e^X}.$$

Ici, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, donc l'espace de toutes les applications linéaires inversibles de $\mathfrak{g}$ dans lui même.

Proposition 22. *Soit G un groupe de Lie matriciel et son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$ et soit* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) : A \mapsto \mathrm{Ad}_A$. *Soit* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *l'application linéaire associée. Donc, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a*

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Démonstration. Par le point 3 du théorème 9, ad peut être calculé comme suit

$$\mathrm{ad}_X = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}_{e^{tX}}\right)|_{t=0}$$

Donc, on a

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{e^{tX}}(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}|_{t=0} = [X, Y].$$

□

Proposition 23. *Pour tout X dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, *soit* $\mathrm{ad}_X : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *définie par* $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$. *Donc, pour tout $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a*

$$e^X Y e^{-X} = \mathrm{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\mathrm{ad}_X}(Y),$$

avec

$$e^{\mathrm{ad}_X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \dots.$$

Démonstration. Ce résultat peut être prouvé par le calcul direct. C'est à dire, en considérant X et Y des matrices $n \times n$ et de montrer par induction que

$$(\mathrm{ad}_X)^m(Y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y (-X)^{m-k},$$

avec

$$(\mathrm{ad}_X)^m(Y) = \underbrace{[X, \dots [X, [X, Y]] \dots]}_{m}.$$

Par un calcul direct (**faire cela en TDs**), on montre que l'on a

$$e^{\mathrm{ad}_X}(Y) = \mathrm{Ad}_{e^X}(Y) = e^X Y e^{-X}.$$

Il faut s'assurer qu'il est légal de multiplier les séries terme à terme. □

2.12 Complexification d'une algèbre de Lie réelle

Dans l'étude des représentations d'un groupe de Lie matriciel, il est souvent d'usage de passer par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui est en général, une algèbre de Lie réelle. Il est donc d'usage de passer par l'algèbre de Lie complexe associée, appelée **la complexification (ou complexifiée) de $\mathfrak{g}$**.

Définition 27. *Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie alors la complexification de V, notée $V_{\mathbb{C}}$, est l'espace des combinaisons linéaires formelles*

$$v_1 + iv_2, \quad \text{avec} \quad v_1, v_2 \in V.$$

Ceci devient un espace vectoriel réel évident. Il devient un espace vectoriel complexe si on définit

$$i(v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1.$$

Nous pourrions définir de manière pédante $V_{\mathbb{C}}$ comme étant l'espace des paires ordonnées (v_1, v_2), mais cela est lourd sur le plan de la notation. Il est simple de vérifier que la définition ci dessus fait bien de $V_{\mathbb{C}}$ un espace vectoriel complexe.

Proposition 24. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée. Donc, le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ possède une unique extension à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui fait de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie complexe. L'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est appelée* ***complexification*** *de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. L'unicité de l'extension est évidente puisque si le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ doit être bilinéaire, alors il doit être donnée par

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, X_2] - [X_2, Y_2]) + i\,([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]) \tag{2.16}$$

Pour montrer l'existence, on doit savoir vérifier que la relation (2.16) est réellement bilinéaire et antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi. Il est clair (**faire cela en TDs**) que la relation (2.16) est bilinéaire réelle et antisymétrique. L'anti-symétrie signifie que si la relation (2.16) est linéaire complexe par rapport au premier facteur alors elle est aussi linéaire complexe par rapport au second facteur. Donc, on a besoin seulement de montrer que

$$[i(X_1 + iX_2), Y_1 + iY_2] = i\,[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] \tag{2.17}$$

Le premier membre de (2.17) est égale à

$$[-X_2 + iX_1, Y_1 + iY_2] = (-[X_2, Y_1] - [X_1, Y_2]) + i([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]),$$

tandis que le second membre de (2.17) vaut

$$i\{([X_1, Y_1]-[X_2, Y_2])+i([X_2, Y_1]+[X_1, Y_2])\} = (-[X_2, Y_1]-[X_1, Y_2])+i([X_1, Y_1]-[X_2, Y_2]),$$

et ces deux expressions sont égales. Il reste à vérifier l'identité de Jacobi. Cet identité est vérifiée si X, Y et Z sont dans $\mathfrak{g}$. En plus, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, l'expression

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$$

est complexe linéaire en X avec Y et Z fixés. Donc, l'identité de Jacobi continue d'être vérifiée si $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ avec Y et Z dans $\mathfrak{g}$. Le même argument montre que l'identité de Jacobi est vérifiée quand X et Y dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et Z dans $\mathfrak{g}$. En continuant à appliquer cet argument, on voit que l'identité de Jacobi est satisfaite pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en général. □

Proposition 25. *Les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ sont des algèbres de Lie complexes. On a donc les isomorphismes d'algèbres de Lie complexes suivantes*

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$
$$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$
$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$
$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$$
$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$$
$$\mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$$

Démonstration. A l'aide des calculs faits dans les sections précédentes, on peut voir que les algèbres de Lie spécifiées sont des sous algèbres complexes de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ et par conséquent sont des algèbres de Lie complexes. Maintenant, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ est l'espace de toutes les matrices $n \times n$ complexes tandis que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est l'espace de toutes les matrices $n \times n$ réelles. Clairement, donc, tout $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme $X_1 + iX_2$ avec $X_1, X_2 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ceci donne un isomorphisme entre les espaces vectoriels complexes $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ et il est facile de vérifier que c'est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

D'autre part, $\mathfrak{u}(n)$ est l'espace de toutes les matrices complexes $n\times n$ antisymétriques auto-adjointes (i.e, $X^* = -X$). Mais si X est toute matrice $n \times n$ complexe, alors on a

$$\begin{aligned} X &= \frac{X - X^*}{2} + \frac{X + X^*}{2} \\ &= \frac{X - X^*}{2} + i\frac{(-iX) - (iX)^*}{2} \\ &= \left(\frac{X - X^*}{2}\right) + i\left(\frac{X + X^*}{2i}\right) \end{aligned}$$

Donc X peut être écrit comme une matrice antisymétrique plus i fois une matrice antisymétrique et cette décomposition est unique. Donc, toute matrice $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ peut être écrit d'une façon unique comme $X_1 + iX_2$ avec $X_1, X_2 \in \mathfrak{u}(n)$ tels que

$$X_1 = \frac{X - X^*}{2}, \quad X_2 = \frac{X + X^*}{2i}.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. La vérification des autres isomorphismes est similaire (**Faire cela en TD**). □

Proposition 26. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée et $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie complexe arbitraire. Alors tout homomorphisme d'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ s'étend d'une façon unique à un homomorphisme d'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$.*

Ce résultat est une propriété universelle de la complexification d'une algèbre de Lie réelle.

Démonstration. L'unicité de l'extension est donnée par

$$\pi(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. On peut vérifier que cette application est un homomorphisme d'algèbres de Lie complexes. □

2.13 Exemple: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est la complexifiée de $\mathfrak{su}(2)$

L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$ est engendrée par les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On tensorise l'espace vectoriel $\mathfrak{su}(2)$ sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ comme suit

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Comme $\{I, J, K\}$ est une base de $\mathfrak{su}(2)$ sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} &= \mathbb{C}I \oplus \mathbb{C}J \oplus \mathbb{C}K \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \gamma_1 + i\gamma_2 & -\alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a complexifié $\mathfrak{su}(2)$, c'est a dire,

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) + i\mathfrak{su}(2)$$

et les matrices de bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sont

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou bien, on peut le voir comme suit.

L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$ est engendrée par les matrices suivantes

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Ces matrices de base sont liées aux matrices de Pauli σ_1, σ_2 et σ_3 et sont donc

$$u_1 = i\sigma_1, \quad u_2 = -i\sigma_2, \quad u_3 = i\sigma_3.$$

Ces matrices constituent une représentation des quaternions parce que

$$u_1u_1 = u_2u_2 = u_3u_3 = -I$$

$$u_1u_2 = u_3, \quad u_2u_3 = u_1, \quad u_3u_1 = u_2$$

$$u_2u_1 = -u_3, \quad u_3u_2 = -u_1, \quad u_1u_3 = -u_2$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les crochets sont

$$[u_1, u_2] = 2u_3, \quad [u_2, u_3] = 2u_1, \quad [u_3, u_1] = 2u_2.$$

On passe a la complexification de $\mathfrak{su}(2)$ en prenant

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) + i\mathfrak{su}(2).$$

Donc, l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est engendrée par les matrices suivantes

$$H = \frac{1}{i} u_3, \quad X = \frac{1}{2i} \left(u_1 - iu_2\right), \quad Y = \frac{1}{2i} \left(u_1 + iu_2\right).$$

C'est a dire les matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.14 Application exponentielle

Définition 28. *Si G est un groupe de Lie matriciel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'application exponentielle pour G est l'application*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G.$$

Cela signifie que l'application exponentielle pour G est l'exponentielle d'une matrice restreinte à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On a montré que toute matrice dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est une exponentielle d'une certaine matrice $n \times n$. Par contre, si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est un sous groupe fermé, il peut exister une matrice A dans G telle qu'il n'existe pas de X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G avec $\exp X = A$.

Exemple 5. *Il n'existe pas de matrice $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ avec*

$$e^X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

En général, l'application exponentielle ne réalise pas une correspondance biunivoque. Elle procure un mécanisme crucial de passage d'information entre le groupe de Lie et l'algèbre de Lie. Par contre, l'application exponentielle réalise **localement** une correspondance biunivoque comme le montre le théorème suivant.

Théorème 10. *Soit G un groupe de Lie matriciel et son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$. Alors il existe un voisinage U de zero dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage V de I dans G tel que l'application exponentielle envoie U homéomorphiquement sur V.*

Définition 29. *Si U et V sont dans la situation du théorème , alors l'application inverse $\exp^{-1} : V \to \mathfrak{g}$ est appelée* ***logarithme*** *pur G*

Corollaire 1. *Si G est un groupe de Lie matriciel connexe, alors tout élément A de G peut être écrit sous la forme suivante*

$$A = e^{X_1}e^{X_2}\dots e^{X_n} \quad \textit{pour certains} \quad X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}.$$

Il est important de signaler la terminologie ancienne qui est toujours utilisée souvent en physique. La notion de générateur infinitésimal X du groupe G est synonyme de l'élément $X \in \mathfrak{g}$. Chaque générateur infinitésimal X engendre le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp tX$ de G.

Le théorème suivant montre qu'un morphisme de groupes linéaires connexes est entièrement déterminé par sa différentielle en l'identité. C'est ce résultat remarquable qui nous permettra de ramener l'étude des représentations de dimension finie d'un tel groupe à celles de son algèbre de Lie.

Théorème 11. *Soit $f : G \to H$ un morphisme différentiable entre groupes linéaires. Soit $\phi = df|_{\mathrm{Id}}$ la différentielle de f en* Id. *Alors $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie et*

$$f(\exp(X)) = \exp(\phi(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. Montrons que $f(\exp(X)) = \exp(\phi(X))$. Posons $a(s) = f(\exp sX)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}a(s) &= \frac{d}{dt}f\left(\exp(s+t)X\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}f\left(\exp sX \exp tX\right)|_{t=0}\end{aligned}$$

et puisque f est un morphisme de groupes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}a(s) &= f(\exp sX)\frac{d}{dt}f(\exp tX)|_{t=0} \\ &= a(s)\phi(X).\end{aligned}$$

Ceci montre que $a(s)$ vérifie l'équation différentielle $a'(s) = a(s)\phi(X)$ avec la condition initiale $a(0) = \mathrm{Id}$. La résolution de cette equation différentielle montre que $a(s) = \exp(s\phi(X))$. En particulier, on a $f(\exp(X)) = \exp(\phi(X))$. Montrons enfin que ϕ est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est à dire que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$. On part de l'équation

$$f(\exp tX \exp sY \exp -tX) = \exp t\phi(X) \exp s\phi(Y) \exp -t\phi(X) \tag{2.18}$$

qu'on dérive par rapport à s et que l'on évalue en $s = 0$. D'une part, le premier membre de 2.18 donne

$$\frac{d}{ds}f(\exp tX \exp sY \exp -tX)_{s=0} = \phi(\exp(tX)Y\exp(-tX)). \tag{2.19}$$

En dérivant le second membre de l'expression (2.19) par rapport à t et en évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\phi(\exp(tX)Y\exp(-tX))_{t=0} = \phi(XY - YX) = \phi([X,Y]). \tag{2.20}$$

D'autre part, le second membre de 2.18 donne

$$\frac{d}{ds}(\exp(t\phi(X))\exp(s\phi(Y))\exp(-t\phi(X)))_{s=0} = \exp(t\phi(X))\phi(Y)\exp(-t\phi(X)) \tag{2.21}$$

En dérivant le second membre de l'expression (2.21) par rapport à t et en évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(t\phi(X))\phi(Y)\exp(-t\phi(X)))_{t=0} &= \phi(X)\phi(Y) + \phi(Y)(-\phi(X)) \\ &= \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X).\end{aligned}$$

On voit enfin que

$$\frac{d}{dt}(\exp(t\phi(X))\phi(Y)\exp(-t\phi(X)))_{t=0} = [\phi(X), \phi(Y)] \tag{2.22}$$

Le resultat s'ensuit en comparant les expressions (2.20) et (2.22). $\square$

Définition 30. *Un morphisme différentiable $f : G \to H$ est localement bijectif si $\phi = df_{\mathrm{Id}}$ est un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des groupes de Lie respectifs G et H.*

2.15 Exercices

1. Écrire explicitement, la forme générale d'une matrice réelle 4×4 dans $\mathfrak{so}(3,1)$.

2. Montrer que les matrices suivantes forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

   Calculer les crochets $[E_1, E_2], [E_2, E_3]$ et $[E_3, E_1]$. Montrer qu'il existe une application linéaire inversible $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\phi([X, Y]) = \phi(X) \wedge \phi(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{su}(2)$$

   avec " $\wedge$ " qui indique le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

3. Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée. Soit $A(t)$ une courbe différentiable dans G avec $A(0) = I$. Soit $X = \frac{d}{dt}|_{t=0}A(t)$. Montrer que $X \in \mathfrak{g}$.
   On note que ceci montre que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ coïncide avec ce qu'on appelle l'espace tangent en l'identité dans le langage des variétés différentielles.

4. Montrer que les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes tandis que $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$.

5. On considère une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ ayant les crochets non nuls suivants

$$[e_1, e_3] = ae_1 + be_2, \quad [e_2, e_3] = ce_1 + de_2$$

   avec

$$ad - bc \neq 0, \quad a^2 + d^2 + 2bc \neq 0.$$

   (i) Calculer ad_X pour $X = X^1e_1 + X^2e_2 + X^3e_3$.
   (ii) Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X)^2$. Quand est-ce que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X)^2 = 0$?

6. Soient n un entier ≥ 2. On note $\mathfrak{g}$ le sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$ formée des matrices

$$(X, v) = \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où X parcourt $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ et le vecteur v parcourt $\mathbb{C}^n$.

(i) Montrer que $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$.

(ii) On note $\mathfrak{j} = \{(0, v) : v \in \mathbb{C}^n\}$ et $\mathfrak{h} = \{(X, 0) : X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})\}$.

  (a) Montrer que $\mathfrak{j}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et qu'il est abélien

  (b) Montrer que $\mathfrak{h}$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ mais n'est pas un idéal.

Chapitre 3

Théorie de base de représentations des groupes de Lie

Si une représentation Π est une représentation fidèle d'un groupe de Lie matriciel G, alors $\{\Pi(A) : A \in G\}$ est un groupe de matrices qui est isomorphe au groupe original G. Donc Π nous permet de représenter G comme le groupe de matrices. Ceci constitue notre motivation du terme "représentation". Bien sur, on continuera à parler de représentation Π même dans le cas ou Π n'est pas fidèle.

Bien que nous n'allons pas exploiter en détails tous les aspects, notre motivation dans ce chapitre suit les axes importants suivants.

1. Comprendre les symétries continues: Les groupes de Lie formalisent les symétries continues (rotations, translations, transformations de jauge). La théorie des représentations permet de répondre à la question centrale suivante. *Comment une symétrie agit-elle concrètement sur des espaces vectoriels, des fonctions ou des états physiques?* Autrement dit, on passe d'une structure abstraite à des objets calculables.

2. Relier algèbre, géométrie et analyse: La théorie des représentations est un carrefour disciplinaire:

   - Algèbre: algèbres de Lie, modules, poids, racines
   - Géométrie: actions de groupes, fibrés homogènes, orbites coadjointes
   - Analyse: opérateurs différentiels invariants, décomposition spectrale

   Elle fournit un langage commun pour comprendre pourquoi ces domaines se répondent naturellement.

3. Outils fondamental en physique mathématique: En mécanique quantique et théorie quantique des champs:
   - les états sont des vecteurs dans des représentations,
   - les observables sont liées aux générateurs de l'algèbre de Lie,
   - les particules sont classifiées par des représentations irréductibles

   Ainsi, la théorie des représentations donne la clé mathématique de la classification des phénomènes physiques.

4. Classifier et simplifier des problèmes complexes: La décomposition en représentations irréductibles permet:
   - de réduire des problèmes compliqués en blocs élémentaires,
   - d'expliquer des phenomènes de dégénérescence ou d'invariance,
   - de rendre visibles des structures cachées

   La théorie des représentations est un outils de simplification conceptuelle extrêmement puissant.

3.1 Représentations

On considère V un espace vectoriel complexe de dimension finie ($\dim(V) \geq 1$) et $\mathrm{GL}(V)$ l'espace de toutes les transformations linéaires inversibles de V.

Définition 31. *Soit G un groupe de Lie matriciel. Une représentation complexe de dimension finie de G est un homomorphisme de groupe de Lie*

$$\Pi : G \to \mathrm{GL}(V).$$

Une représentation réelle de dimension finie de G est un homomorphisme de groupe de Lie $\Pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ avec V un espace vectoriel réel de dimension finie.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle ou complexe, alors une représentation complexe de dimension finie est un homomorphisme

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

avec V un espace vectoriel complexe. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle, alors une représentation réelle de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

Notation: On notera (V, Π) ou (V, π) la représentation du groupe de Lie et de l'algèbre de Lie respectivement.

Si une représentation Π ou π est un homomorphisme biunivoque, alors la représentation est appelée **fidèle**.

On peut penser qu'une représentation est vue comme une action linéaire d'un groupe de Lie ou d'une algèbre de Lie sur un espace vectoriel (puisque dire pour tout $g \in \mathfrak{g}$, il existe un opérateur associé $\Pi(g)$ qui agit sur l'espace vectoriel V).

Définition 32. *Soit Π une représentation réelle ou complexe de dimension finie d'un groupe de Lie matriciel G, agissant sur un espace vectoriel V. Un sous espace W de V est appelé* ***invariant*** *si $\Pi(A)w \in W$ pour tout $w \in W$ et pour tout $A \in G$.*
Un sous espace invariant W est appelé non trivial si $W \neq \{0\}$ et $W \neq V$.
Une représentation sans aucun sous espace invariant non trivial est appelé ***irréductible***

Les termes **invariant, non trivial et irréductible** sont définies de façon analogue pour les représentations d'algèbre de Lie.

Définition 33. *Soit G un groupe de Lie matriciel et soit Π une représentation de G agissant sur l'espace V et soit Σ une représentation de G agissant sur l'espace W. Une application linéaire $\phi : V \to W$ est appelé un* ***opérateur d'entrelacement de représentations*** *si*

$$\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)\phi(v) \quad \textit{pour tout } A \in G,\ v \in V. \tag{3.1}$$

Une propriété analogue définit un opérateur d'entrelacement de représentations d'algèbre de Lie.
Si ϕ est un opérateur d'entrelacement de représentations et si en plus ϕ est inversible, alors ϕ est appelé **isomorphisme** de représentations. Si il existe un isomorphisme entre les espaces V et W, alors les représentations sont dites isomorphes.

Si nous considérons la représentation vue comme action, alors la propriété d'entrelacement (3.1) sera notée

$$\phi(A.v) = A.\phi(v), \quad \text{pour tout} \quad A \in G, \quad v \in V. \tag{3.2}$$

Ceci dit que ϕ peut commuter avec l'action de G.

N.B: Un problème typique dans la théorie des représentations est de déterminer a un isomorphisme près, toutes les représentations irréductibles d'un groupe de Lie ou d'une algèbre de Lie.

On sait qu'on peut identifier $\mathrm{GL}(V)$ avec $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, le théorème (2.13) a comme conséquence la proposition qui suit.

Proposition 27. *Soit G un groupe de Lie et son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$ et soit Π la représentation (complexe ou réelle de dimension finie) de G agissant sur un espace V. Il existe un unique représentation π de $\mathfrak{g}$ agissant sur le même espace V telle que*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \textit{pour tous} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

La représentation π peut être calculée

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})|_{t=0}$$

et satisfait la relation

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tout $A \in G$.

Pour un groupe de Lie et son algèbre de Lie associée, on peut dire que toute représentation π de $\mathfrak{g}$ provient d'une représentation Π de G. Mais cela n'est vraie que **si G est simplement connexe**.

3.2 Exemples fondamentaux

3.2.1 Représentation standard

Soit G un groupe de Lie est par définition un sous espace de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. L'application d'inclusion $\Pi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A \mapsto \Pi(A) = A$ est une représentation de G appelée **représentation standard** de G.

Si G est inclus dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, alors on peut penser que la représentation standard est une représentation réelle. On peut donner les exemples suivants

1. La représentation standard de SO(3) est l'une dans laquelle SO(3) agit dans le sens usuel sur $\mathbb{R}^3$. En d'autre termes, l'action est définie par

$$g.v = gv.$$

Cette action définit une représentation de SO(3) sur $\mathbb{R}^3$.

2. La représentation standard de SU(2) est l'une dans laquelle SU(2) agit dans le sens usuel sur $\mathbb{C}^2$

3. De même si $\mathfrak{g} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie de matrices, l'application $\pi(X) = X$ est appelée représentation standard de $\mathfrak{g}$.

4. Action d'un groupe de Lie sur les fonctions (exemple géométrique): Soit (M, g) une variété Riemannienne, et soit G un groupe de Lie agissant par isométries sur M. Cette action encode une symétrie géométrique globale de l'espace. Le groupe G agit naturellement sur l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions lisses par

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x), \quad g \in G, f \in C^\infty(M).$$

Le passage infinitésimal: A l'algèbre de Lie correspond une action infinitésimal par champs de vecteurs de Killing:

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \mathcal{L}_X f.$$

Les opérateurs géométriques naturels (par ex. Laplacien) commutent avec l'action de G. Par conséquent, l'espace $C^\infty(M)$ ou $L^2(M)$ se décompose en somme (ou intégrale directe) de représentations irréductibles de G.

Cet exemple montre que:

- une symétrie géométrique se traduit en une action explicite sur des espaces de fonctions,
- les générateurs infinitésimaux deviennent des opérateurs différentiels,
- la théorie des représentations fournit le cadre naturel pour analyser le spectre et les invariants géométriques.

3.2.2 Représentation triviale

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ de dimension une. Pour tout groupe de Lie matriciel G, on peut définir l'application

$$\Pi : G \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) : A \mapsto \Pi(A) = I, \quad \text{pour tout } A \in G$$

et c'est une représentation triviale.

C'est une représentation irréductible puisque $\mathbb{C}$ n'a aucun sous espace invariant non trivial. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors on peut définir une représentation triviale de $\mathfrak{g}$ c'est à dire $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ par

$$\pi(X) = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Ceci est une représentation irréductible.

3.2.3 Représentation adjointe

Définition 34. *Si G est un groupe de Lie matriciel avec son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la représentation adjointe de G est l'application* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *donnée par* $A \mapsto \mathrm{Ad}_A$. *C'est à dire, on a*

$$\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}, \quad \forall A \in G, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

De façon similaire, la représentation adjointe de l'algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ est l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *donnée par* $X \mapsto \mathrm{ad}_X$. *C'est à dire, on a*

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

3.3 Représentations de $\mathrm{SU}(2)$ et de son algèbre de Lie $\mathrm{su}(2)$

Soit V_m l'espace des polynômes homogènes de deux variables de degré m. Pour $U \in \mathrm{SU}(2)$, on définit une transformation linéaire $\Pi_m(U)$ sur l'espace V_m par la formule

$$[\Pi_m(U)f](z) = f(U^{-1}z), \quad z \in \mathbb{C}^2. \tag{3.3}$$

Donc Π_m est une représentation de $U \in \mathrm{SU}(2)$ sur V_m,i.e, c'est un homomorphisme de groupe de Lie

$$\Pi_m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_m) : U \mapsto \Pi_m(U).$$

Les éléments f de V_m prennent la forme

$$f(z_1,z_2) = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \ldots + a_m z_2^m = \sum_{k=0}^{m} a_k z_1^{m-k} z_2^k \tag{3.4}$$

avec $z = (z_1, z_2)$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et les a_j des nombres complexes arbitraires constants, pour lesquels on voit que $\dim(V_m) = m+1$.
La matrice $U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ a pour inverse la matrice $U^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ainsi, on calcule que

$$\Pi_m(U)f(z) = f(U^{-1}z) = f(\bar{\alpha} z_1 + \bar{\beta} z_2, -\beta z_1 + \alpha z_2).$$

Donc,$f(\bar{\alpha} z_1 + \bar{\beta} z_2, -\beta z_1 + \alpha z_2)$ est un polynôme homogène à coefficients complexes de deux variables.

Explicitement, si f est de la forme (3.4) et $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$, alors on a

$$[\Pi_m(U)f](z_1,z_2) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(U_{11}^{-1} z_1 + U_{12}^{-1} z_2\right)^{m-k} \left(U_{21}^{-1} z_1 + U_{22}^{-1} z_2\right)^{k}. \tag{3.5}$$

Il faut comprendre qu'ici les $U_{11}^{-1}, U_{12}^{-1}, U_{21}^{-1}$ et U_{22}^{-1} représentent les entrées de la matrice inverse U^{-1} de U.
En développant le second membre de (3.5), nous voyons que $\Pi_m(U)f$ est aussi un polynôme homogène de degré m. Donc $\Pi_m(U)$ est une application de V_m dans V_m.
Pour voir que Π_m est une représentation, on calcule donc

$$\begin{aligned} \Pi_m(U_1)[\Pi_m(U_2)f](z) &= [\Pi_m(U_2)f](U_1^{-1}z) \\ &= f(U_2^{-1}U_1^{-1}z) \\ &= \Pi_m(U_1U_2)f(z). \end{aligned}$$

Donc Π_m est une représentation complexe de dimension finie de SU(2). L'inverse dans la définition (3.3) est nécessaire pour que Π_m soit une représentation.

Maintenant, il est question de calculer la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ associée à SU(2).

Ainsi, on a par formule que

$$\pi_m(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Pi_m(e^{tX})$$

Donc, on obtient

$$(\pi_m(X)f)(z) = \frac{d}{dt}f(e^{-tX}z)|_{t=0}.$$

Soit donc $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ une courbe dans $\mathbb{C}^2$ définie par $z(t) = e^{-tX}z$ telle que $z(0) = z$. Par la loi de la chaîne, on obtient

$$\pi_m(X)f = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt}|_{t=0}.$$

Puisque $\frac{dz(t)}{dt}|_{t=0} = -Xz$ pour $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(2)$ et

$$-Xz = \begin{pmatrix} -X_{11} & -X_{12} \\ -X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_{11}z_1 - X_{12}z_2 \\ -X_{21}z_1 - X_{22}z_2 \end{pmatrix},$$

alors on obtient

$$\pi_m(X)f = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(X_{21}z_1 + X_{22}z_2). \tag{3.6}$$

Ou bien pour calculer la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ associée à $\mathrm{SU}(2)$ on peut utiliser ce qui suit:
Soit

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(2)$$

et posons

$$z(t) = e^{tX} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(2), t \in \mathbb{R}.$$

On a

$z(0) = Id, \quad z'(0) = X, \quad$ c'est a dire $\quad a'(0) = X_{11}, \quad b'(0) = X_{12}, \quad c'(0) = X_{21}, \quad d'(0) = X_{22}.$

On a donc

$$\begin{aligned}(\pi_m(X)f)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\Pi_m(z(t)f)\right)(z_1, z_2) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(f(z(t)^{-1}(z_1, z_2))\right).\end{aligned}$$

Sachant que

$$f(z(t)^{-1}(z_1,z_2)) = f\left(\begin{pmatrix} d(t) & -b(t) \\ -c(t) & a(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right) = f(d(t)z_1 - b(t)z_2, -c(t)z_1 + a(t)z_2),$$

on calcule que

$$\begin{aligned}(\pi_m(X)f)(z_1,z_2) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f\left((d(t)z_1 - b(t)z_2,\ -c(t)z_1 + a(t)z_2)\right). \\ &= (X_{22}z_1 - X_{12}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,z_2) + (-X_{21}z_1 + X_{11}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2}.\end{aligned}$$

Donc on a

$$(\pi_m(X)f) = (X_{22}z_1 - X_{12}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,z_2) + (-X_{21}z_1 + X_{11}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2} \tag{3.7}$$

En considérant que pour l'algèbre de Lie su(2), on doit avoir la trace nulle, c'est a dire $X_{11} = -X_{22}$, les résultats obtenus en (3.6) et (3.7) décrivant l'action $\pi_m(X)$ de l'algèbre de Lie su(2) sur V_m sont égaux. La représentation de l'algèbre de Lie su(2) sur V_m est donnée par

$$\pi_m(X) = -(X_{11}z_1 + X_{12}z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} - (X_{21}z_1 + X_{22}z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}; \quad \forall X \in \mathrm{su}(2). \tag{3.8}$$

Maintenant, par la proposition 26, toute représentation complexe de dimension finie de l'algèbre de Lie su(2) s'étend d'une façon unique en une représentation linéaire complexe de la complexifiée de su(2), i.e,

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}}.$$

En d'autres termes, la représentation π_m de su(2) s'étend en une représentation de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ que nous notons également π_m. Cette extension est donnée par la même formule mais avec $X \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Si X, Y et H sont des éléments de base de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule (3.6), on obtient

$$\pi_m(H) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\pi_m(X) = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\pi_m(Y) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

C'est donc une représentation de l'algèbre de Lie $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ sur le même espace vectoriel V_m, i.e, l'homomorphisme d'algèbre de Lie

$$\pi_m : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_m) : X \mapsto \pi_m(X).$$

En appliquant, ces opérateurs aux éléments de base $z_1^{m-k} z_2^k$ de V_m, on obtient

$$\pi_m(H)(z_1^{m-k} z_2^k) = (-m + 2k) z_1^{m-k} z_2^k$$

Donc $z_1^{m-k} z_2^k$ est un vecteur propre de $\pi_m(H)$ de valeur propre $(-m+2k)$. En particulier, $\pi_m(H)$ est diagonalisable.

$$\pi_m(X)(z_1^{m-k} z_2^k) = (-m - k) z_1^{m-k-1} z_2^{k+1}$$

$$\pi_m(Y)(z_1^{m-k} z_2^k) = -k z_1^{m-k+1} z_2^{k-1}.$$

On constate par contre que $\pi_m(X)$ et $\pi_m(Y)$ ont pour effet de monter ou de diminuer de 1 le degré de z_2. On note que puisque, $\pi_m(X)$ monte la valeur de k, cet opérateur monte la valeur propre de $\pi_m(H)$ de deux tandis que $\pi_m(Y)$ diminue la valeur propre de $\pi_m(H)$ de deux.

Proposition 28. *La représentation π_m est une représentation irréductible de* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Soit W un sous-espace invariant de π_m non réduit à zero. La restriction à W de l'opérateur $\pi_m(H)$ admet au moins une valeur propre. Par suite l'un des vecteurs propres f_j appartient à W. En faisant agir $\pi_m(X)$ et $\pi_m(Y)$ sur ce vecteur, on montre que tous les vecteurs f_j appartiennent à W. Donc $W = V_m$.

Démonstration. On doit montrer que tout sous espace non nul invariant W de V_m est égal à V_m. Soit W un tel espace. Puisque W est non nul, il existe un élément $w \in W$. Un tel élément peut être écrit

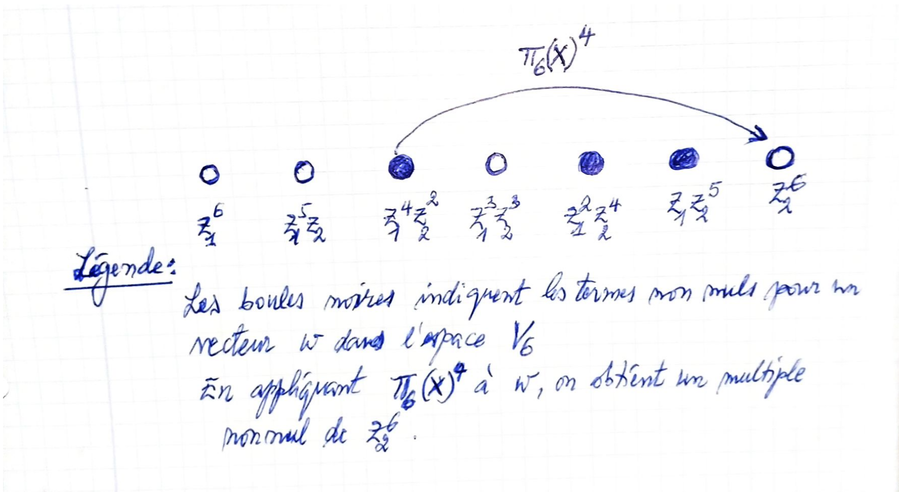
$$w = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \ldots + a_m z_2^m$$

avec au mois un des coefficients a_k non nul. Soit k_0 la plus petite valeur de k telle que $a_k \neq 0$ et considérons

$$\pi_m(X)^{m-k_0} w.$$

On a vu que $\pi_m(X)$ augmente le degré de z_2 d'une unité, donc $\pi_m(X)^{m-k_0}$ va annuler tous les termes dans w sauf pour le terme $a_{k_0} z_1^{m-k_0} z_2^{k_0}$. De l'autre coté, puisque $\pi_m(X)(z_1^{m-k} z_2^k)$ est nul uniquement si $k = m$, on voit que $\pi_m(X)^{m-k_0} w$ est un multiple non nul de z_2^m. Puisque W est supposé invariant, W doit contenir ce multiple de z_2^m et donc z_2^m lui-même. Donc, pour $0 \leq k \leq m$, il s'ensuit (partant de l'action de $\pi_m(Y)$) que $\pi_m(Y)^k z_2^m$ est un multiple non nul de $z_1^k z_2^{m-k}$. Par conséquent, W doit contenir $z_1^k z_2^{m-k}$ pour tous $0 \leq k \leq m$. Puisque ces éléments forment une base de V_m, on voit que finalement $W = V_m$. $\square$

La figure ci-dessous nous parle ce qui se passe sur V_6 l'espace vectoriel complexe des polynômes homogènes de degré 6 à deux variables z_1 et z_2.



3.4 Représentations linéaires du groupe $\mathrm{SO}(3)$ et de son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$

On définit une représentation Π du groupe de Lie SO(3) dans l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^3$ par la formule usuelle

$$\Pi(g).f(\underline{x}) = f(g^{-1}.\underline{x})$$

avec $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On peut voir que (a l'image de ce qu'on a fait dans la section précédente) que c'est une représentation de SO(3) dans $C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Dans cette section, nous montrons que la représentation de son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ sur le même espace provient de la représentation Π.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(3) &= \left\{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid X^t + X = 0\right\} \\ &= \left\{M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -2z & 2y \\ 2z & 0 & -2x \\ -2y & 2x & 0 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

et sa base est donnée par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant les relations de commutations suivantes

$$[I, J] = K, \quad [J, K] = I, \quad [K, I] = J.$$

Soit $M = M(x, y, z)$ dans $\mathfrak{so}(3)$ et soit $c(t)$ une courbe C^1 dans SO(3) telle que $c(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $C'(0) = M$. On pose alors

$$c(t) = (c_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & c_{13}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & c_{23}(t) \\ c_{31}(t) & c_{32}(t) & c_{33}(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3).$$

On a alors pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et tout $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$(\Pi(c(t))f)(\underline{x}) = f(c(t)^{-1}\underline{x}) = f(c(t)^t\underline{x})$$

car dans SO(3) on a $c(t)^{-1} = c(t)^t$. On peut l'écrire encore en termes d'action par

$$(c(t).f)(\underline{x}) = f(c(t)^{-1}.\underline{x}) = f(c(t)^t.\underline{x})$$

Ce qui donne dans le second membre

$$f(c_{11}(t)x_1 + c_{21}(t)x_2 + c_{31}(t)x_3, c_{12}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + c_{32}(t)x_3, c_{13}(t)x_1 + c_{23}(t)x_2 + c_{33}(t)x_3).$$

On dérive par rapport à t, et on évalue en $t = 0$ pour calculer l'action de $\mathfrak{so}(3)$, c'est a dire,$\pi(M)f)(\underline{x})$ ou $(M.f)(\underline{x})$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0} f(c(t)^t.\underline{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d}{dt}|_{t=0}(c_{11}(t)x_1 + c_{21}(t)x_2 + c_{31}(t)x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d}{dt}|_{t=0}(c_{12}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + c_{32}(t)x \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{d}{dt}|_{t=0}(c_{13}(t)x_1 + c_{23}(t)x_2 + c_{33}(t)x_3) \\
&= (2zx_2 - 2yx_3)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (-2zx_1 + 2xx_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (2yx_1 - 2xx_2)\frac{\partial f}{\partial x_3} \\
&= \left((2zx_2 - 2yx_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-2zx_1 + 2xx_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (2yx_1 - 2xx_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\right).f(\underline{x}).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$(\pi(M)f)(\underline{x}) = \left((2zx_2 - 2yx_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-2zx_1 + 2xx_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (2yx_1 - 2xx_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\right).f(\underline{x}).$$

Ce qui montre que la représentation de $\mathfrak{so}(3)$ sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ est donnée par

$$\pi(M) = (2zx_2 - 2yx_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-2zx_1 + 2xx_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (2yx_1 - 2xx_2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ agit donc dans $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ par des opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients constants. Notons ϕ cette représentation de $\mathfrak{so}(3)$ dans $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. En particulier, on a

$$\begin{aligned}
\phi(I) &= 2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \\
\phi(J) &= -2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3} \\
\phi(K) &= 2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

3.5 Représentations unitaires du groupe d'Heisenberg réel

Considérons le groupe d'Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Maintenant, considérons une constante réelle non nulle que nous appelons $\hbar$. Pour $\hbar \in \mathbb{R} - \{0\}$, on définit un opérateur unitaire Π_h sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$ par

$$\Pi_h \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f = e^{-i\hbar b} e^{i\hbar cx} f(x-a). \tag{3.9}$$

Il est clair que la norme du second membre de (3.9) est la même que celle de f, donc Π_h est par conséquent unitaire.
Maintenant, on calcule

$$\begin{aligned} \Pi_h \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_h \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f &= e^{-i\hbar\tilde{b}} e^{i\hbar\tilde{c}x} f(x-a) e^{-i\hbar b} e^{i\hbar c(x-\tilde{a})} f(x-\tilde{a}-a) \\ &= e^{-i\hbar(\tilde{b}+b+c\tilde{a})} e^{i\hbar(\tilde{c}+c)x} f(x-(\tilde{a}+a)) \end{aligned}$$

Cette application $A \to \Pi_\hbar(A)$ est un homomorphisme du groupe d'Heisenberg dans $U(L^2(\mathbb{R}))$. cette application est continue et donc $\Pi_\hbar$ est une représentation du groupe d'Heisenberg H. On note qu'un opérateur unitaire $\Pi_\hbar(A)$ consiste en premier lieu en la translation de f puis en la multiplication de f par la fonction $e^{i\hbar cx}$ et enfin en la multiplication de la fonction f par la constante $e^{-i\hbar b}$.

Multiplier f par la fonction $e^{i\hbar cx}$ a pour effet de translater la transformée de Fourier de f ou dans le langage physique, il a pour effet de translater la fonction f dans l'espace des impulsions. Maintenant, si U_1 est la translation ordinaire et U_2 est la translation de la transformée de Fourier (i.e, $U_2 =$ multiplication par $e^{i\hbar cx}$), alors U_1 et U_2 ne commute pas mais $U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1}$ est simplement la multiplication par une constante de valeur absolue 1.
Donc $\{\Pi_\hbar(A) | A \in H\}$ est un groupe d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translations ordinaires et les translations dans l'espace de Fourier. C'est une représentation du groupe d'Heisenberg qui motive son nom. On peut montrer que pour $\hbar \in \mathbb{R} - \{0\}$ la représentation $\Pi_\hbar$ est une représentation unitaire irréductible (Nous n'allons pas le montrer dans ce cours, mais cela nécessite la connaissance de la théorie standard de la transformée de Fourier. On peut visiter la référence de **W.Rudin, Real and Complex Analysis. Theorem 9.17** pour plus d'informations).

3.6 Représentations irréductibles de $su(2)$

Dans cette section, on calcule (à une équivalence près) toutes les représentations irréductibles complexes de dimension finie de l'algèbre de Lie $su(2)$. Ce calcul est important pour plusieurs raisons.

- Premièrement, l'algèbre de Lie $su(2)$ est isomorphe à $so(3)$ et les représentations de $su(2)$ ont une signification physique.(Les calculs qu'on fait ici se retrouvent dans des livres standard de mécanique quantique sous la rubrique "moment angulaire"),
- En second lieu, la théorie de représentations de $su(2)$ est un exemple ultime de la façon dont on utilise les relations de commutation pour déterminer les représentations d'une algèbre de Lie
- En troisième lieu, pour déterminer les représentations d'une algèbre de Lie semi-simple, on utilise explicitement la théorie de représentation de $su(2)$.

Maintenant, toute représentation complexe π de dimension finie de $su(2)$ s'étend en une représentation linéaire complexe (notée également π) de la complexifiée $sl(2, \mathbb{C})$ de l'algèbre de Lie $su(2)$.

Proposition 29. *Soit π une représentation complexe de $su(2)$, étendu à une représentation linéaire complexe de $sl(2, \mathbb{C})$. Donc π est irréductible en tant que représentation de $su(2)$ si et seulement si il est irréductible en tant que représentation de $sl(2, \mathbb{C})$.*

Démonstration. On suppose que π est une représentation complexe d'une algèbre de Lie (réelle) de l'algèbre de Lie (réelle) $su(2)$. agissant sur l'espace vectoriel complexe V. Alors dire que π est irréductible signifie que V ne possède aucun sous espace complexe invariant non trivial $W \subset V$. Autrement dit, même si $su(2)$ est une algèbre de Lie réelle, quand on considère les représentations complexes, on est intéressé uniquement par les sous espaces invariants complexes.
Maintenant, supposons que π est irréductible vu comme représentation de $su(2)$. Si W est un sous espace (complexe) de V qui est invariant sous l'action de $sl(2, \mathbb{C})$, alors il est certain que W est invariant sous l'action de $su(2) \subset sl(2, \mathbb{C})$. Donc $W = \{0\}$ ou $W = V$. Donc π est une représentation irréductible de $sl(2, \mathbb{C})$.
D'autre part, supposons que π est irréductible vu comme représentation de $sl(2, \mathbb{C})$ et supposons que W est un sous espace (complexe) invariant de V qui est invariant sous l'action de $su(2)$, alors π sera aussi invariant sous l'action de $\pi(X+iY) = \pi(X)+i\pi(Y)$, pour tous $X, Y \in su(2)$. Puisque tout élément de $sl(2, \mathbb{C})$ peut écrit comme $X + iY$, on

conclut qu'en fait W est invariant sous l'action de $sl(2, \mathbb{C})$. Donc $W = \{0\}$ ou $W = V$. Donc π est une représentation irréductible de $su(2)$. $\square$

On voit donc que étudier les représentations irréductibles de $su(2)$ est équivalent à étudier les représentations irréductibles de $sl(2, \mathbb{C})$. Passer à la complexification d'une algèbre de Lie rend facile les calculs.

Nous considérons la base suivante de $sl(2, \mathbb{C})$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui qui ont des relations de commutations

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Si V est un espace vectoriel (complexe de dimension finie) et A, B et C sont des opérateurs sur V satisfaisant les relations de commutation

$$[A, B] = 2B, \quad [A, C] = -2C, \quad [B, C] = A$$

alors à cause de l'anti-symétrie et de la bilinéarité du crochet de Lie, l'application linéaire $\pi : sl(2, \mathbb{C}) \to gl(V)$ satisfaisant

$$\pi(H) = A, \quad \pi(X) = B, \quad \pi(Y) = C$$

est une représentation de $sl(2, \mathbb{C})$. On comprend qu'on peut trouver plusieurs représentation de $sl(2, \mathbb{C})$.

Notre but est de montrer que toute représentation irréductible de dimension finie de $su(2)$ (ou $sl(2, \mathbb{C})$) comme dans l'exemple de la section 3.3.

Pour rappel, dans cet exemple, l'espace V_m est engendré par les vecteurs propres de $\pi_m(H)$ et les opérateurs $\pi_m(X)$ et $\pi_m(Y)$ agissent en abaissant ou en augmentant 2 le degré des vecteurs propres.

Théorème 12. *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une représentation irréductible de $sl(2, \mathbb{C})$ de dimension $m + 1$. Deux représentations irréductibles de $sl(2, \mathbb{C})$ de même dimension sont équivalentes. Si π est une représentation irréductible de $sl(2, \mathbb{C})$ de dimension $m + 1$, alors π est équivalente à la représentation décrite dans la section 3.3.*

Démonstration. La preuve du théorème 12. Soit π une représentation irréductible de $sl(2,\mathbb{C})$ agissant sur un espace vectoriel (complexe de dimension finie) V. Notre stratégie consiste à diagonaliser l'opérateur $\pi(H)$. Le problème est que à priori, on ne sait pas si $\pi(H)$ est diagonalisable. Mais, on sait qu;on travaille sur un corps algébriquement clos des nombres complexes. Donc $\pi(H)$ doit avoir au moins un vecteur propre. □

Maintenant, nous introduisons un lemme crucial qui nous permet de développer une structure similaire pour une représentation irréductible arbitraire de $su(2)$ (ou $sl(2,\mathbb{C})$). Ce lemme est la clef de la démonstration du théorème.

Lemme 2. *Soit u un vecteur propre de $\pi(H)$ de valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors, on a*

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u.$$

Donc, soit $\pi(X)u = 0$ ou soit $\pi(X)u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ de valeur propre $\alpha + 2$.

De même,

$$\pi(H)\pi(Y)u = (\alpha-2)\pi(Y)u.$$

Donc, soit $\pi(Y)u = 0$ ou soit $\pi(Y)u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ de valeur propre $\alpha - 2$.

Démonstration. On sait que $[\pi(H),\pi(X)] = \pi[H,X] = 2\pi(X)$. Donc

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)u &= \pi(X)\pi(H)u + [\pi(H),\pi(X)]\\ &= \pi(X)\pi(H)u + 2\pi(X)u\\ &= \pi(X)(\alpha u) + 2\pi(X)u \quad \text{car} \quad \pi(H)u = \alpha u\\ &= (\alpha+2)\pi(X)u.\end{aligned}$$

En remplaçant l'argument $\pi(X)$ par $\pi(Y)$ on obtient le deuxième résultat. Il suffit de voir que $[\pi(H),\pi(Y)] = -2\pi(Y)$. □

L'opérateur $\pi(H)$ doit avoir au moins un vecteur propre u ($u \neq 0$) de valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$. Par le lemme, on sait que

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u$$

et de façon général,

$$\pi(H)\pi(X)^n u = (\alpha+2n)\pi(X)^n u.$$

Ceci signifie que soit $\pi(X)^n u = 0$ ou encore $\pi(X)^n u$ est un vecteur propre de $\pi(H)$ de valeur propre $(\alpha + 2n)$.
Maintenant, un opérateur sur un espace de dimension finie ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes. Donc les $\pi(X)^n u$ ne peuvent pas être tous différent de zero. Donc il existe un certain $N \geq 0$ tel que

$$\pi(X)^N u \neq 0 \quad \text{mais} \quad \pi(X)^{N+1} u = 0.$$

On définit $u_0 = \pi(X)^N u$ et $\lambda = \alpha + 2N$. Donc

$$\pi(H)u_0 = \lambda u_0 \quad \text{mais} \quad \pi(X)u_0 = 0 \quad \text{car} \quad \pi(X)u_0 = \pi(X)\pi(X)^N u = \pi(X)^{N+1}u = 0. \tag{3.10}$$

Donc, on définit $u_k = \pi(Y)^k u_0$ pour $k \geq 0$. Par la deuxième partie du lemme, on a

$$\pi(H)u_k = (\lambda - 2k)u_k. \tag{3.11}$$

Puisque $\pi(H)$ ne peut avoir qu'un nombre fini des valeurs propres, donc les vecteurs propres u_k ne peuvent pas être tous non nuls.

Lemme 3. *Avec les notations ci-haut, on a*

$$\pi(X)u_k = [k\lambda - k(k-1)]u_{k-1} \qquad (k \geq 1).$$
$$\pi(X)u_0 = 0.$$

Démonstration. On procède par induction sur k. Dans le cas de $k = 1$, on note que

$$u_1 = \pi(X)u_0.$$

En utilisant la relation de commutation $[\pi(X), \pi(Y)] = \pi(H)$, on a

$$\begin{aligned}
\pi(X)u_1 = \pi(X)\pi(Y)u_0 &= (\pi(Y)\pi(X) + [\pi(X), \pi(Y)])u_0 \\
&= (\pi(Y)\pi(X) + \pi(H))u_0 \\
&= \pi(H)u_0 \quad \text{car} \quad \pi(X)u_0 = 0 \quad \text{par} \quad (3.10) \\
&= \lambda u_0,
\end{aligned}$$

c'est à dire $\pi(X)u_1 = \lambda u_0$ qui est le lemme dans le cas de $k = 1$.
Maintenant, par définition $u_{k+1} = \pi(Y)u_k$. En utilisant (3.11) et l'induction, on obtient

$$\begin{aligned}
\pi(X)u_{k+1} &= \pi(X)\pi(Y)u_k \\
&= (\pi(Y)\pi(X) + \pi(H))u_k \\
&= \pi(Y)[k\lambda - k(\lambda - 1)]u_{k-1} + (\lambda - 2k)u_k \\
&= [k\lambda - k(k-1) + (\lambda - 2k)]u_k \\
&= [(k+1)\lambda - (k+1)k]u_k,
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Puisque $\pi(H)$ possède un nombre fini de valeurs propres, les u_k ne peuvent pas être tous non nuls. Donc, il doit y avoir un entier $m \geq 0$ tel que

$$u_k = \pi(Y)^k u_0 \neq 0$$

pour tout $k \leq m$, mais

$$u_{m+1} = \pi(Y)^{m+1} u_0 = 0.$$

Si $u_{m+1} = 0$, alors certainement que $\pi(X)u_{m+1} = 0$. Donc par le lemme 3, on a

$$0 = \pi(X)u_{m+1} = [(m+1)\lambda - m(m+1)]u_m = (m+1)(\lambda - m)u_m.$$

Mais $u_m \neq 0$ et $m+1 \neq 0$ (puisque $m \geq 0$). Donc, dans le but d'avoir $(m+1)(\lambda - m)u_m$ égale à 0, on doit avoir $\lambda = m$.

Ainsi, étant donnée une représentation irréductible de dimension finie π de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, agissant sur un espace vectoriel V, il existe un entier $m \geq 0$ et des vecteurs non nuls $u_0, \ldots, u_m$ tels que (en considérant que $\lambda = m$), on a

$$\pi(H)u_k = (m - 2k)u_k \tag{3.12}$$

$$\pi(Y)u_k = \begin{cases} u_{k+1} & \text{si} \quad k < m \\ 0 \quad \text{si} & k = m \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\pi(X)u_k = \begin{cases} [km - k(k-1)]u_{k-1} & \text{si} \quad k > 0 \\ 0 \quad \text{si} & k = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Les vecteurs $u_0, \ldots, u_m$ doivent être linéairement indépendants puisque ils sont vecteurs propres de $\pi(H)$ de valeurs propres distincts. En plus, l'espace de dimension $m+1$ engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ est explicitement invariant sous l'action de $\pi(H)$, $\pi(X)$ et $\pi(Y)$ et par conséquent sous l'action de $\pi(Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Puisque π est irréductible, cet espace doit être tout l'espace V.

Nous avons montré que toute représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est de la forme (3.12), (3.13) et (3.14). Inversement, si on définit $\pi(H)$, $\pi(X)$ et $\pi(Y)$ par (3.12), (3.13) et (3.14) (avec u_k des vecteurs de base de l'espace vectoriel V de dimension finie), ces opérateurs définis par(3.12), (3.13) et (3.14) satisfont les relations de commutation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

L'analyse précédente montre que toute représentation irréductible de dimension $m+1$ doit avoir la forme (3.12), (3.13) et (3.14), qui montre que deux telles représentations sont isomorphes. Ainsi, la représentation π_m de dimension finie $m+1$ décrite dans la section 3.3 doit être isomorphe à celle définie par les formules (3.12).

Si π_1 et π_2 sont deux représentations irréductibles de dimension $m+1$ agissant sur les espaces V_1 et V_2, alors V_1 possède une base $u_0, \ldots, u_m$ comme dans (3.12), (3.13) et (3.14) et V_2 possède une base similaire $\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_m$. Donc, l'application $\phi : V_1 \to V_2 : u_k \mapsto \tilde{u}_k$ sera un isomorphisme de représentations.

En particulier, la représentation π_m de dimension $m+1$ décrite dans la section 3.3 doit être équivalent à (3.12), (3.13) et (3.14). Ceci peut être vu explicitement en introduisant la base suivante V_m

$$u_k = (\pi_m(Y)^k(z_2^m) = (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} z_1^k z_2^{m-k}, \quad (k \leq m).$$

Alors par définition $\pi_m(Y)u_k = u_{k+1}$ si $k < m$, on peut voir que $\pi_m(Y)u_m = 0$. On peut voir aussi que $\pi_m(H)u_k = (m-2k)u_k$. La seule chose qui reste à vérifier est le comportement de $\pi_m(X)$. Mais les calculs directes montrent que l'on a

$$\pi_m(X)u_k = k(m-k+1)u_{k-1} = [km - k(k-1)]u_{k-1}$$

comme souhaité. $\square$

3.7 Exercices

1. Soit $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base usuelle de $\mathfrak{su}(2)$ et $\{F_1, F_2, F_3\}$ celle de $\mathfrak{so}(3)$ comme on l'a vu dans ce cours. Identifier $\mathfrak{su}(2)$ avec $\mathbb{R}^3$ en identifiant la base de $\mathfrak{su}(2)$ avec la base usuelle de $\mathbb{R}^3$. Considérer $\mathrm{ad}(E_1), \mathrm{ad}(E_2)$ et $\mathrm{ad}(E_3)$ comme opérateur sur $\mathfrak{su}(2)$, par conséquent sur $\mathbb{R}^3$.

   (i) Montrer que $\mathrm{ad}(E_i) = F_i$ avec $i = 1, 2, 3$. En particulier ad est un isomorphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ vers $\mathfrak{so}(3)$.

   (ii) Maintenant, considérer $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathrm{SU}(2)) = \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. Montrer que l'image de Ad est précisément SO(3).
   Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{I, -I\}$.
   Montrer que $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ est un homomorphisme.

2. Soit SO(2) agissant naturellement sur $\mathbb{R}^2$.Montrer que $\mathbb{R}^2$ est une représentation réelle de SO(2) sous cette action.

3. Soit ρ une représentation linéaire complexe irréductible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de dimension $m+1$. On note

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Soit v un vecteur propre de $\rho(H)$, pour la valeur propre λ. Montrer que

$$\rho(Y)\rho(X)v = \frac{1}{4}(m-\lambda)(m+\lambda+2)v$$

$$\rho(X)\rho(Y)v = \frac{1}{4}(m+\lambda)(m-\lambda+2)v$$

   b) Montrer que l'opérateur

$$\frac{1}{2}\rho(H)^2 + \rho(Y)\rho(X) + \rho(X)\rho(Y)$$

   est un multiple scalaire de l'identité. Calculer ce scalaire.

Chapitre 4

Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Ce chapitre va dans le sens de répondre à certaines questions plus compliquées à résoudre. Nous avons notamment, les résultats déjà décrits dans les chapitres précédents.

1. Tout groupe de Lie matriciel G possède une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$
2. Un homomorphisme continu Φ entre les groupes de Lie matriciels G et H donne lieu à un homomorphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.
3. Si G et H sont des groupes de Lie matriciels et H est un sous groupe de G alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H est une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Tous ces résultats vont dans la direction facile, " *du groupe de Lie matriciel vers son algèbre de Lie associée*". Dans ce chapitre, nous voulons aller dans le sens inverse, qui est le plus difficile,"*de l'algèbre de Lie vers son groupe de Lie matriciel*". Les questions à investiguer sont relatives à ces trois théorèmes précédents et sont

1. Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est-elle une algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel?
2. Soit G et H des groupes de Lie matriciels d'algèbre de Lie associées $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement. Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorphisme d'algèbre de Lie. Existe-t-il un homomorphisme de groupe de Lie $\Phi : G \to H$ tel que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$?
3. Si G est un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Existe-il un groupe de Lie $H \subset G$ pour lequel $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie associée?

La réponse à la première question est Oui (confère le troisième théorème de Lie et le Théorème d'Ado). La réponse à la deuxième question est en général Non, mais la réponse est oui si G est simplement connexe. La réponse à la question trois est en général Non, mais elle est oui si on permet que H soit un sous groupe de Lie connexe qui n'est pas nécessairement fermée.

Notre outil pour investiguer toutes ces questions est la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff* qui exprime $\log(e^X e^Y)$ pour X et Y des matrices suffisamment petites. Cette formule implique que toute information relative à la multiplication dans le groupe de Lie matriciel autour de l'identité est encodée dans l'algèbre de Lie.

4.1 Exemple illustratif

Dans cette section, on prouve le théorème (réponse à la question deux) dans le cas du groupe de Heisenberg. On introduit le problème dans le cas général et on le spécialise pour le cas de Heisenberg. On suppose G et H des groupes de Lie matriciels associées à leurs algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement. On suppose l'homomorphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. On veut construire un homomorphisme de groupe de Lie $\Phi : G \to H$ tel que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On définit une application Φ qui d'un voisinage U de l'identité dans G vers H comme suit

$$\Phi(A) = e^{\phi(\log\ A)}, \tag{4.1}$$

telle que

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)} \tag{4.2}$$

au moins pour X suffisamment petit.

La clef est de montrer que Φ défini autour de l'identité par (4.1) ou (4.2) est un homomorphisme local. Supposons $A = e^X$ et $B = e^Y$, avec $X, Y \in \mathfrak{g}$ plus petits et que e^X, e^Y et $e^X e^Y$ sont dans le domaine de Φ. Calculer $\Phi(AB) = \Phi(e^X e^Y)$, on a besoin de calculer $e^X e^Y$ dans la forme e^Z, pour que $\Phi(e^X e^Y)$ soit égale à $e^{\phi(Z)}$. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff stipule que pour X et Y suffisamment petits, on a

$$Z = \log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots \tag{4.3}$$

où ... indique les termes additionnels faisant itération sur les crochets de X et Y.

Si ϕ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, alors on a

$$\begin{aligned}\phi(\log(e^X e^Y)) &= \phi(X)+\phi(Y)+\frac{1}{2}[\phi(X),\phi(Y)] \\ &+ \frac{1}{12}[\phi(X),\phi(Y)]-\frac{1}{12}[\phi(X),[\phi(X),\phi(Y)]]+\ldots \\ &= \log(e^{\phi(X)}e^{\phi(Y)}).\end{aligned}$$

Il s'en suit donc (d'après (4.1) et (4.2)) que

$$\Phi(e^X e^Y) = e^{\phi(X)}e^{\phi(Y)} = \Phi(e^X)\Phi(e^Y).$$

Dans le cas général, cela demande un effort pour prouver la formule de Baker-Campbell-Hausdorff et donc pour prouver cela, quand G est simplement connexe, Φ peut être étendu sur tout G.

Dans le cas du groupe de Heisenberg (qui est simplement connexe), l'argument peut être simplifié.

Théorème 13. *Supposons X et Y des matrices complexes $n\times n$ et que X et Y commutent avec leurs commutateurs:*

$$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0. \tag{4.4}$$

Alors, on a

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

Ceci est le cas special de (4.3) dans laquelle les séries terminent après le terme $[X,Y]$.

Démonstration. Considérons X et Y dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant (4.4). On va montrer que

$$e^{tX}e^{tY} = \exp\left(tX+tY+\frac{t^2}{2}[X,Y]\right)$$

qui se réduit au résultat voulu dans le cas de $t=1$. Puisque, par hypothèse, $[X,Y]$ commute avec X et Y, la relation ci dessus est équivalente à

$$e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} = e^{t(X+Y)}. \tag{4.5}$$

Posons $A(t)$ le membre de gauche de (4.5) et $B(t)$ le membre de droite de (4.5). Notre stratégie sera de montrer que $A(t)$ et $B(t)$ satisfont les mêmes équations différentielles avec les mêmes conditions initiales. D'une part, nous pouvons voir immédiatement que

$$\frac{dB}{dt} = (X+Y)e^{t(X+Y)} = B(t)(X+Y).$$

D'autre part, différencier $A(t)$ signifie que

$$\frac{dA}{dt} = e^{tX}Xe^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}Ye^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(-t[X,Y]). \tag{4.6}$$

Puisque Y commute avec $[X,Y]$, il commute aussi avec $e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}$.
Donc, le second terme du second membre de (4.6) peut être réécrit comme

$$e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}Y.$$

Pour le premier terme du second membre de (4.6), on peut calculer (en utilisant la proposition23) que

$$\begin{aligned} Xe^{tY} &= e^{tY}e^{-tY}Xe^{tY} \\ &= e^{tY}\mathrm{Ad}_{e^{-tY}}(X) \\ &= e^{tY}e^{-t\mathrm{ad}Y}(X). \end{aligned}$$

Puisque $[Y,[Y,X]] = -[Y,[X,Y]] = 0$, on a par la proposition23 que

$$e^{-t\mathrm{ad}Y}(X) = X - t[Y,X] = X + t[X,Y],$$

avec tous les termes de grand ordre égaux à zero. Nous pouvons donc simplifier la relation (4.6) en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(X+t[X,Y]) + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}Y + e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(-t[X,Y]) \\ &= e^{tX}e^{tY}e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}(X+Y) \\ &= A(t)(X+Y). \end{aligned}$$

Donc, on voit que $A(t)$ et $B(t)$ satisfont les mêmes equations différentielles avec la même condition initiale $A(0) = B(0) = I$. Donc, par l'unicité standard des solutions pour les equations différentielles linéaires ordinaires, $A(t) = B(t)$ pour tout t. $\square$

Proposition 30. *Soit H le groupe de Heisenberg et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Soit G un groupe de Lie matriciel avec son algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$ et soit $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ un homomorphisme d'algèbre de Lie. Alors il existe un unique homomorphisme de groupe $\Phi : H \to G$ tel que*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Démonstration. On utilise le fait que le groupe de Heisenberg possède une propriété spéciale que l'application exponentielle qui va de son algèbre de Lie vers le groupe de Heisenberg réalise une correspondance biunivoque. Soit "log" l'inverse de cette application et on définit $\phi : H \to G$ par la formule

$$\Phi(A) = e^{\phi(\log(A))}.$$

On va montrer que Φ est un homomorphisme de groupe de Lie matriciel. Si X et Y sont des éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg (des matrices triangulaires supérieures strictes), le calcul direct montre que chaque entrée de $[X, Y]$ est nulle sauf celle située dans le coin supérieur droit. Donc, on sait par ailleurs que de telles matrices $[X, Y]$ commute avec X et Y. Puisque ϕ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ commutent aussi avec leurs commutateur. Donc, par le théorème 13, pour X et Y dans l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(e^X e^Y) &= \Phi\left(e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}\right) \\
&= e^{\phi(X)+\phi(Y)+\frac{1}{2}[\phi(X),\phi(Y)]} \\
&= e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)} \\
&= \Phi(e^X)\Phi(e^Y).
\end{aligned}$$

D'où, Φ est un homomorphisme de groupe, qui est continu car les applications exp, log et ϕ sont toutes continues. □

4.2 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

L'objectif principal de la formule de B-C-H est de calculer $\log(e^X e^Y)$. Le calcul se fait cette fois ci à l'aide d'une formule intégrale plutôt que d'utiliser la formule des séries (4.3). Cette version intégrale de la formule de B-C-H est dû à Poincaré. La version des séries présente des difficultés de calcul à partir des termes quadratiques.
Considérons la fonction

$$g(z) = \frac{\log(z)}{1 - \frac{1}{z}}$$

qui est définie et holomorphe dans le disque $\{|z-1|<1\}$. Donc $g(z)$ peut être exprimée comme une série

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-1)^m$$

avec un rayon de convergence égal à 1. Si V est un espace vectoriel de dimension finie, on peut identifier V avec $\mathbb{C}^n$ en considérant une base arbitraire pour que la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur linéaire sur V soit définie. Pour un opérateur A sur V avec $\|A-I\|<1$, on peut définir

$$g(A)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(A-I)^m.$$

On peut maintenant donner la version intégrale de la formule de B-C-H.

Théorème 14. *Pour toutes $n\times n$ matrices complexes X et Y avec $\|X\|$ et $\|Y\|$ suffisamment petits, on a*

$$\log(e^Xe^Y)=X+\int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y})(Y)dt. \tag{4.7}$$

La preuve de ce théorème sera donnée dans la section 4.3. On précise ici que $e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}$ et par conséquent $g(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y})$ sont des opérateurs linéaires sur l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ des $n\times n$ matrices complexes. Dans la formule (4.7), cet opérateur est définie pour être appliquée sur la matrice Y. Le fait que X et Y sont supposés petits garantit que $e^{\mathrm{ad}X}e^{t\mathrm{ad}Y}$ est fermé sur l'opérateur identité sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour $0\leq t\leq 1$, telle que $g(e^{\mathrm{ad}X}e^{t\mathrm{ad}Y})$ est bien définie.
Si X et Y commutent, alors on a

$$\log(e^Xe^Y)=\log(e^{X+Y})=X+Y.$$

On exploite d'abord la dérivation de l'application exponentielle qui va jouer un rôle important dans la démonstration du théorème 14.

On observe que si X et Y commutent, alors $e^{X+tY}=e^Xe^{tY}$ et on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)=e^X\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{tY}\right)=e^XY.$$

En général, X et Y ne commutent pas, donc

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)\neq e^XY$$

Ceci est un point important. En particulier, on note que dans le langage du calcul multivariables, l'expression $\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)$ indique une dérivation directionnelle de exp en X dans la direction de Y. La dérivation va dépendre linéairement de Y avec X fixé. Le calcul de cette dérivation est le même que celui de la dérivée directionnelle de la fonction exponentielle des matrices.

Maintenant, la fonction

$$\frac{1-e^{-z}}{z}=\frac{1-(1-z+\frac{z^2}{2!}-\dots)}{z}$$

est une fonction analytique entière de z, en $z=0$ et est donnée par la série des puissances

$$\frac{1-e^{-z}}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n-1}}{n!}=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}-\dots.$$

Ces séries (qui ont un rayon de convergence infinie), ont un sens si z est remplacé par un opérateur linéaire A sur un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 15. *(Dérivée de l'exponentielle) Pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right) = e^X\left\{\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y)\right\} \tag{4.8}$$

$$= e^X\left\{Y-\frac{[X,Y]}{2!}+\frac{[X,[X,Y]]}{3!}-\dots\right\}. \tag{4.9}$$

Plus généralement, si $X(t)$ est une fonction différentiable à valeur matricielle, alors

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}e^{X(t)}=e^{X(0)}\left\{\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_{X(t)}}}{\mathrm{ad}_{X(t)}}\left(\frac{dX}{dt}\right)\right\}. \tag{4.10}$$

Notons que la dérivée directionnelle dans (4.8) est linéaire en Y pour un X fixée. Notons aussi que (4.8) est juste un cas special de (4.10) en prenant $X(t)=X+tY$ et en évaluant en $t=0$. En plus, on observe que si X et Y commutent, alors seul le premier terme dans (4.8) est non nul. Dans ce cas, on obtient

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)=e^XY$$

comme annoncée.

Démonstration. Il est possible de démontrer ce théorème en exprimant tout en séries des puissances et en différenciant terme a terme. On ne va pas utiliser cette approche. Nous démontrons la forme (4.8) et la forme (4.10) s'en déduit à l'aide de la loi de la dérivation en chaînes.
On utilise la formule du produit de Lie et prenons que c'est légal d'échanger la limite et l'intégrale. En appliquant maintenant la loi du produit (généralisé à n facteurs) on obtient

$$e^{-X}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)=e^{-X}\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\right)^n=e^{-X}\lim_{n\to\infty}n\left\{\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\right)^{n-1}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\frac{Y}{n}\right)\right\}_{t=0}.$$

Les calculs montrent que l'on a également:

$$\begin{aligned}
e^{-X}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right) &= e^{-X}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\right)^{n-k-1}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\frac{Y}{n}\right)\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{tY}{n}}\right)^k\right\}_{t=0}\\
&= e^{-X}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^{n-k-1}\left(e^{\frac{X}{n}}\frac{Y}{n}\right)\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^k\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^{-k}Y\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^k.
\end{aligned}$$

Mais on sait (d'après la relation entre Ad et ad), on a

$$\begin{aligned}
\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^{-k}Y\left(e^{\frac{X}{n}}\right)^k &= \mathrm{Ad}_{(e^{-\frac{X}{n}})^k}(Y)\\
&= \left(e^{-\mathrm{ad}\frac{X}{n}}\right)^k(Y).
\end{aligned}$$

Don on a

$$e^{-X}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\mathrm{ad}\frac{X}{n}}\right)^k(Y). \tag{4.11}$$

On observe que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\mathrm{ad}\frac{X}{n}}\right)^k$ est une série géométrique. En utilisant la formule usuelle pour la série géométrique, on a

$$\begin{aligned}
e^{-X}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right) &= \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{I-\left(e^{-\mathrm{ad}\,\frac{X}{n}}\right)^n}{I-e^{-\mathrm{ad}\,\frac{X}{n}}}(Y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{n\left[I-\left(I-\frac{\mathrm{ad}_X}{n}+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{n^2 2!}-\dots\right)\right]}(Y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X-\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{n2!}+\dots}(Y)\\
&= \frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y).
\end{aligned}$$

C'est ça qu'on voulait montrer, cad en multipliant les deux membres par e^X, on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{X+tY}\right) = e^X\left\{\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y)\right\}.$$

□

4.3 Preuve de la formule B-C-H

Maintenant, on se tourne vers la preuve du théorème 14. Pour X et Y suffisamment petits dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, soit

$$Z(t) = \log(e^X e^{tY}) \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le 1.$$

Notre but est de calculer $Z(1)$. Puisque $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$, d'une part, on a

$$e^{-Z(t)}\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = (e^X e^{tY})^{-1}\frac{d}{dt}(e^X e^{tY}) = (e^X e^{tY})^{-1}e^X e^{tY}Y = Y$$

et d'autre part,(par le théorème 15), on a

$$e^{-Z(t)}\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = \left\{\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right\}\left(\frac{dZ}{dt}\right).$$

Par conséquent, on a

$$\left\{\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right\}\left(\frac{dZ}{dt}\right) = Y.$$

Maintenant, si X et Y sont trop petits, $Z(t)$ sera aussi trop petit, donc $\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}$ sera proche de l'identité et donc inversible. Dans ce cas, on obtient

$$\frac{dZ}{dt} = \left\{\frac{I - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right\}^{-1}(Y). \tag{4.12}$$

On rappelle que $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$, donc, en appliquant l'homomorphisme Ad, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(e^{Z(t)}) &= \mathrm{Ad}(e^X e^{tY}) \\ &= \mathrm{Ad}(e^X)\mathrm{Ad}(e^{tY}). \end{aligned}$$

Par la relation entre Ad et ad, cela devient

$$e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}} = e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}$$

ou bien

$$\mathrm{ad}_{Z(t)} = \log(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}).$$

En mettant ces deux dernières relations dans (4.12), on obtient

$$\frac{dZ}{dt} = \left\{\frac{I - (e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})^{-1}}{\log(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})}\right\}^{-1}(Y). \tag{4.13}$$

On observe que

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\log(z)}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \frac{\log(z)}{1 - z^{-1}} \\ &= \left(\frac{1 - z^{-1}}{\log(z)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

et donc la relation (4.13) est de la même forme que

$$\frac{dZ}{dt} = g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})(Y). \tag{4.14}$$

Si on note $Z(0) = X$ et en intégrant la relation (4.14) et sachant que $Z(1) = \log(e^X e^Y)$, on obtient

$$\log(e^X e^Y) = Z(1) = X + \int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})(Y)dt$$

qui est la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

4.4 Les séries provenant de la formule de B-C-H

Maintenant, on va montrer comment on obtient les premiers termes de la forme des séries de la formule de B-C-H à partir de la forme intégrale (14). Rappelons la fonction

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\log(z)}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z\log(z)}{z-1} \\ &= \frac{[1+(z-1)]\left[(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}\dots\right]}{(z-1)} \\ &= [1+(z-1)]\left[1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{3}\dots\right]. \end{aligned}$$

En multipliant et en combinant les termes, on obtient

$$g(z) = 1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{6}(z-1)^2+\frac{1}{12}(z-1)^3-\dots$$

et sous la forme simplifiée, on a

$$g(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}(z-1)^n. \tag{4.15}$$

Entre temps, on a

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}-I &= \left(I+\mathrm{ad}_X+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2}+\dots\right)\left(I+t\mathrm{ad}_Y+\frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2}+\dots\right)-I \\ &= \mathrm{ad}_X+t\mathrm{ad}_Y+t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2}+\frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2}+\dots. \end{aligned}$$

Puisque $e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}-I$ n'a aucun terme d'ordre zero, $(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}-I)^n$ contribuera seulement les termes de degré n ou de degré en ad_X et (ou) en ad_Y. En calculant jusqu'au degré 2 en ad_X et en ad_Y, en posant $z = e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}$ et en utilisant (4.15), on obtient

$$\begin{aligned} g(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}) &= I+\frac{1}{2}\left(\mathrm{ad}_X+t\mathrm{ad}_Y+t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2}+\frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2}+\dots\right) \\ &- \frac{1}{6}\left(\mathrm{ad}_X+t\mathrm{ad}_Y+t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2}+\frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2}+\dots\right)^2+\text{ordres supérieurs} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X+\frac{t}{2}\mathrm{ad}_Y+\frac{t}{2}\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y+\frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{4}+\frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{4}+\dots \\ &- \frac{1}{6}\left[(\mathrm{ad}_X)^2+t^2\mathrm{ad}_Y)^2+t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y+\mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X\right]+\text{ordres supérieurs} \end{aligned}$$

On applique maintenant $g(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y})$ sur Y et on intègre. En calculant (en négligeant les termes d'ordre supérieurs) par B-C-H et en notant que pour chaque terme l'action de ad_Y en premier lieu donne zero, on obtient

$$\begin{aligned}
\log(e^Xe^Y) &\approx X + \int_0^1 \left[Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{4}[X,[X,Y]] - \frac{1}{6}[X,[X,Y]] - \frac{t}{6}[Y,[X,Y]]\right] dt \\
&\approx X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{6}[Y,[X,Y]]\int_0^1 tdt \\
&\approx X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]]
\end{aligned}$$

Donc, si on ajoute les termes d'ordres supérieurs, on obtient l'expression (4.3) et on note

$$\log(e^Xe^Y) = X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\text{termes d'ordres superieurs.}$$

4.5 Exercices

1. Le centre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie comme étant l'ensemble de tous les $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[X,Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Considérons maintenant le groupe de Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

avec son algèbre de Lie

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Détermine le centre $Z(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{h}$ montrer que $[X,Y] \in Z(\mathfrak{h})$. Ceci implique en particulier que X et Y commutent à la fois avec leur commutateur $[X,Y]$.

   (ii) Montrer par le calcul direct que

$$e^Xe^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

2. Vérifier que le membre de droite de la formule de B-C-H (forme intégrale) se réduit à $X+Y$ quand X et Y commutent.
Indication: Calculer en premier lieu $e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y}$ et $(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\mathrm{ad}_Y} - I)(Y)$.

Bibliographie

[1] Brian. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and Representations.* An elementary Introduction. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 222. Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[2] V.S Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras and Their representations.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1984.

[3] D. Bernard, Y. Laszlo et D. Renard. *Éléments de Théorie des groupes et de symétries quantiques. Notes de cours, 1er Septembre 2011.*

[4] J.F Cornwell. *Group theory in Physics. An introduction.* Academic Press, 1997.