

**Université du Burundi**

**Faculté des Sciences**

**Département de Mathématiques**

**Année Académique : 2024-2025**

**Topologie générale (60 heures)**

**Déstiné aux étudiants de la deuxième année de Mathématiques**

**Par**

**Rénovat NKUNZIMANA, Ph.D**

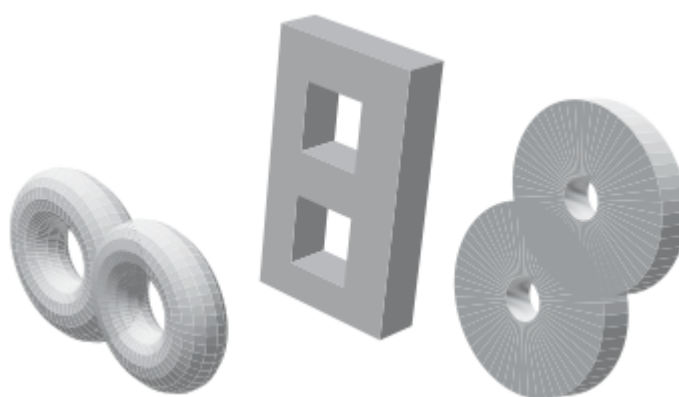


FIGURE 1 –

---

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Espaces topologiques</b>	<b>6</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Définition et exemples . . . . .	6
1.2.1	Exemples de topologies sur un ensemble . . . . .	6
1.2.2	Comparaison des topologies . . . . .	8
1.3	Caractérisation d'une topologie à l'aide des fermés . . . . .	9
1.4	Caractérisation à l'aide d'une base de topologie . . . . .	10
1.5	Topologie induite . . . . .	12
1.6	Notion de voisinage . . . . .	13
1.7	Point adhérent, point isolé et point d'accumulation . . . . .	14
1.8	Adhérence et densité d'un ensemble . . . . .	16
1.9	Intérieur, extérieur et frontière d'un ensemble . . . . .	17
1.10	Espaces topologiques séparés . . . . .	18
1.10.1	Définition et exemples . . . . .	18
	Espace de type $T_0$ ou de Kolmogorov . . . . .	18
	Espace de type $T_1$ ou accessible (ou de Fréchet) . . . . .	19
	Espaces de type $T_2$ ou séparés (ou de Hausdorff) . . . . .	19
1.10.2	Parties finies d'un espace séparé . . . . .	19
1.10.3	Espace séparé et unicité de la limite . . . . .	20
1.11	Exercices . . . . .	21
1.11.1	Sur voisinages et systèmes de voisinages . . . . .	24
1.11.2	Sur la topologie induite . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Applications continues</b>	<b>26</b>
2.1	Rappels . . . . .	26
2.2	Applications continues . . . . .	27
2.2.1	Continuité en un point . . . . .	27
2.2.2	Applications continues et proximité arbitraire . . . . .	28
2.2.3	Continuité séquentielle en un point . . . . .	29
2.3	Applications ouvertes et applications fermées . . . . .	30
2.4	Homéomorphismes . . . . .	31
2.5	Propriétés topologiques . . . . .	33
2.5.1	Applications continues et séparation . . . . .	33
2.6	Topologies induites par des applications . . . . .	34

---

---

2.6.1	Topologie initiale et topologie finale . . . . .	34
2.6.2	Topologie produit . . . . .	35
2.7	Topologie quotient . . . . .	36
2.7.1	Rappels sur les espaces quotient . . . . .	36
2.7.2	Topologie quotient . . . . .	37
2.7.3	Exemples des espaces topologiques quotient . . . . .	38
2.8	Exercices . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Espaces compacts</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1	Notion de recouvrements . . . . .	43
3.2	Espaces compacts . . . . .	44
3.3	Propriétés de la compacité . . . . .	47
3.4	Compacité et applications continues . . . . .	47
3.5	Espaces localement compacts . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Espaces connexes</b> . . . . .	<b>50</b>
4.1	Intoduction . . . . .	50
4.2	Espaces connexes . . . . .	50
4.2.1	Exemple fondamental : les connexes de $\mathbb{R}$ . . . . .	51
4.3	Propriétés de la connexité . . . . .	52
4.4	Connexité de la droite réelle . . . . .	53
4.5	Composantes connexes . . . . .	54
4.6	Espaces localement connexes . . . . .	55
4.7	Connexité par arcs . . . . .	55
4.7.1	Notion de chemis . . . . .	55
4.7.2	Homotopie des chemins . . . . .	56
4.7.3	Espaces simplement connexes . . . . .	57
4.8	Exercices . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Espaces métriques et espaces vectoriels normés</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	Espaces métriques . . . . .	59
5.1.1	Définition . . . . .	59
5.1.2	Quelques exemples des espaces métriques . . . . .	60
5.1.3	Distance d'ensembles et diamètre . . . . .	61
5.2	Topologie associée à une métrique . . . . .	62
5.2.1	Boules ouvertes dans un espace métrique . . . . .	62
5.2.2	Adhérence, intérieur et extérieur . . . . .	64
5.3	Continuité dans les espaces métriques . . . . .	64
5.3.1	Continuité ponctuelle, séquentielle et globale . . . . .	65
5.3.2	Continuité uniforme . . . . .	66
5.3.3	Métrique et applications sous additive . . . . .	66
5.4	Compacité dans les espaces métriques . . . . .	67
5.5	Espaces vectoriels normés . . . . .	68
5.5.1	Norme et distance . . . . .	68
5.5.2	Exemples . . . . .	69
5.6	Métriques équivalentes . . . . .	69

---

---

5.7	Exercices . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Espaces métriques complets</b>	<b>72</b>
6.1	Les suites dans un espace métrique . . . . .	72
6.2	Suite de Cauchy et complétude . . . . .	72
6.3	Caractérisation des espaces métriques complets . . . . .	74
6.4	Exemples d'espaces complets . . . . .	75
6.5	Théorème du point fixe de Banach et applications . . . . .	75
6.6	Espaces de Banach . . . . .	77
6.7	Exercices . . . . .	77

---

---

---

# Introduction générale

---

Ce cours est une initiation à la topologie générale. Cette branche des mathématiques a pour objet principal l'étude abstraite de notions telles que la continuité, la convergence, la compacité, la connexité etc... et généralise les notions qui sont utilisées en analyse, dans le cas particulier la topologie euclidienne.

*Intuitivement, on peut dire que la topologie est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des espaces qui sont invariantes par les déformations continues c'est à dire les déformations qui se font sans trouer ni déchirer d'espace.*

Imaginons une boule de pâte à modeler ; on peut la déformer en la travaillant et la donner la forme d'un bol par exemple ou la forme d'une balle de rugby. Dans ce cas, on aura changé sa géométrie : la distance entre deux points  $A$  et  $B$ , la courbure en un point sur la pâte à modeler va varier mais les propriétés topologiques ne sont pas modifiées. Ainsi par exemple, la sphère, un ballon de rugby et un bol sont topologiquement équivalents. En effet, analysons les questions telles que

1. Puis je aller d'un point  $A$  au point  $B$  sur la sphère ?
2. Puis je aller d'un point  $A$  au point  $B$  sur le bol ?
3. Puis je aller d'un point  $A$  au point  $B$  sur le ballon de Rugby ?

Ainsi, la topologie s'intéresse aux relations logiques entre les points plutôt qu'aux relations métriques entre les points.

Par contre, le tore et la sphère ne sont pas topologiquement équivalents car pour avoir un tore à partir d'une sphère il faut percer un trou(déformation violente ; donc non continue). Mais le tore et une tasse sont topologiquement équivalents.

## Structure du cours

Dans le premier chapitre, on définit la notion de topologie sur un ensemble quelconque  $X$ . Il s'agit de se donner une collection de sous-ensembles de  $X$  que l'on appellera ouverts, et qui doivent avoir les propriétés bien connues des ouverts euclidiens en termes d'unions et d'intersections. Le fait étonnant est que ces simples propriétés des ouverts permettent de reconstruire une bonne partie des notions vues en analyse à l'aide de la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$  (intérieur, adhérence, frontière, continuité, connexité, compacité), tout en gardant de bonnes propriétés. Dans ce même chapitre, on passera également en revue différentes méthodes pour définir une topologie sur un ensemble (par les fermés, par les systèmes

---

de voisinages, par une base, par une sous-base), on définira les notions élémentaires d'intérieur, d'adhérence et de frontière ou d'applications continues. On introduira différentes constructions d'espaces topologiques (les sous-espaces, les produits et les quotients).

Dans le deuxième chapitre, nous introduirons la notion d'applications continues entre les espaces topologiques et nous insisterons sur les homéomorphismes qui sont des applications continues particulières qui conservent les propriétés topologiques des espaces. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés aux notions de compacité et de connexité des espaces topologiques, ainsi qu'aux notions semblables. La compacité généralise la notion d'intervalles bornés fermés de  $\mathbb{R}$ . La connexité est une propriété topologique importante qui joue un rôle central dans la dérivabilité des fonctions. Dans le 5 chapitre nous parlerons des espaces topologiques particuliers à savoir les espaces métriques et les espaces vectoriels normés. Ce sont des espaces topologiques dont la topologie est induite par une métrique dans le premier cas et par une norme dans le second. Nous y parlerons également des espaces métriques complets. Le dernier chapitre est consacré à l'introduction aux espaces fonctionnels : nous y étudierons les notions de convergence simple et uniforme ainsi que quelques théorèmes utiles en Analyse fonctionnelle.

Ce cours est souvent jugé "difficile" par les étudiants ; cela est dû au fait que contrairement aux autres branches de mathématiques qui sont calculatoires, la Topologie est une branche des relations entre les objets et exige donc d'être assidu en prenant le temps suffisant pour bien maîtriser les définitions de base et faire beaucoup d'exercices d'entraînement pour une bonne maîtrise du cours. Le secret principal pour comprendre la topologie générale est la maîtrise de la topologie de  $\mathbb{R}$ . En effet, sur cet ensemble nous pouvons représenter et visualiser toutes ces notions topologiques qui apparaissent comme "bête noire" sur les espaces topologiques quelconques.

---

# ESPACES TOPOLOGIQUES

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons définir le concept de Topologie en générale, et passer en revue quelques moyens de se donner une topologie sur un ensemble  $X$  quelconque. Nous généraliserons ensuite les notions étudiées dans le cours d'Analyse de première année, telles que l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'un ensemble, ou les applications continues. Nous introduirons des constructions classiques en topologie qui permettent de définir de nouvelles topologies à partir d'anciennes : les sous-espaces, les produits et les quotients.

## 1.2 Définition et exemples

Donnons ici la définition d'une topologie. Comme souvent, nous ne définissons pas un exemple particulier, mais les conditions qui font d'un ensemble une topologie. Soit  $X$  un ensemble. On note  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $X$ .

**Définition 1.2.1.** *Une topologie sur un ensemble  $X$  est une partie  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{P}(X)$  telle que*

- $O_1$ .  $X$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $\mathcal{T}$  ;
- $O_2$ . La réunion d'une famille quelconque d'éléments de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$ .
- $O_3$ . L'intersection d'une famille finie (de deux éléments quelconques) de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$

*Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont appelés des **ouverts**. Un couple  $(X, \mathcal{T})$  formé d'un ensemble  $X$  et d'une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  est appelé **espace topologique**.*

On peut donc rephraser cette définition en disant qu'une topologie est une collection de sous-ensembles de  $X$ , appelés **ouverts**, qui doivent vérifier que

1. l'ensemble vide et  $X$  sont ouverts.
2. une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
3. une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On écrira parfois  $(X, \tau)$  pour préciser que l'on considère l'ensemble  $X$  muni de la topologie  $\tau$ .

### 1.2.1 Exemples de topologies sur un ensemble

**Exemple 1.2.1.** *Sur un ensemble  $X$ , il existe toujours deux topologies « extrêmes » :*

---

1. La **topologie grossière**  $\mathcal{T}_g = \{X, \emptyset\}$ . Elle contient le minimum possible d'ouverts. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit espace topologique discret.
2. La **topologie discrète**  $\mathcal{T}_d = \{\mathcal{P}(X)\}$ . Elle contient le maximum possible d'ouverts. Un ensemble muni de la topologie grossière est dit espace topologique grossier.

**Remarque 1.2.1.** Noter qu'une topologie est discrète ssi tous les singletons de  $X$  sont des ouverts.

**Exemple 1.2.2.** Sur l'ensemble  $X = \{0, 1\}$ , on considère la famille  $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ . La famille  $\tau$  est une topologie. Mais ce n'est ni la topologie discrète, ni la topologie grossière. On vérifie facilement que les axiomes de topologie sont satisfaits. Cet espace est appelé **espace de Sirpinski**.

**Exemple 1.2.3.** Sur  $\mathbb{R}$ , l'ensemble formé de  $\emptyset, \mathbb{R}$  et des intervalles de la forme  $]a, b[$ , n'est pas une topologie, car la propriété 3 n'est pas vérifiée. En revanche, l'ensemble formé de  $\emptyset, \mathbb{R}$  et des réunions quelconques d'intervalles de la forme  $]a, b[$  est bien une topologie sur  $\mathbb{R}$ .

Sauf mention contraire,  $\mathbb{R}$  sera toujours muni de cette topologie  $\mathcal{T}_u$  appelée **topologie usuelle de  $\mathbb{R}$** . Nous verrons dans la suite que c'est la topologie associée à la relation d'ordre total.

Par conséquent, par exemple la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  n'est pas discrète car tous les singletons sont des fermés (voir plus loin).

**Exemple 1.2.4.**  $\tau = \{A \subset X; C_A^X \text{ fini}\} \cup \emptyset$ ; est une topologie sur  $X$ , dite **topologie cofinie**.

Remarquons qu'il n'existe pas de formule pour déterminer le nombre de topologie sur un ensemble.

**Exemple 1.2.5.** – Sur un ensemble à un élément  $X = \{a\}$  on peut construire 1 topologie.

- Un ensemble à deux éléments  $X = \{a, b\}$  peut être muni de 4 topologies différentes :  $\mathcal{T}_g = \{X, \emptyset\}$ ,  $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$  et  $\mathcal{T}_d = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ .
- Sur un ensemble à trois éléments  $X = \{a, b, c\}$  on peut construire 26 topologies différentes.
- Sur un ensemble à quatre éléments  $X = \{a, b, c, d\}$  on peut construire 355 topologies différentes.
- Sur un ensemble à cinq éléments  $X = \{a, b, c, d, e\}$  on peut construire 6942 topologies différentes.
- Sur un ensemble à six éléments  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$  on peut construire 209 527 topologies différentes.
- Sur un ensemble à sept éléments  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  on peut construire 9.535.241 topologies différentes.

**Exemple 1.2.6.** Considérons les familles suivantes des parties de  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

$$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$$

Remarquons que  $\tau_1$  est une topologie sur  $X$  puisqu'elle vérifie les trois axiomes requis  $[O_1]$ ,  $[O_2]$  et  $[O_3]$ . Mais  $\tau_2$  n'est pas une topologie sur  $X$  puisque la réunion  $\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$  de deux éléments de  $\tau_2$  n'appartient pas à  $\tau_2$ , c'est-à-dire que  $\tau_2$  ne vérifie pas l'axiome  $[O_2]$ .

De même  $\tau_3$  n'est pas une topologie sur  $X$  puisque l'intersection  $\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$  n'appartient pas à  $\tau_3$ , c'est-à-dire que  $\tau_3$  ne vérifie pas l'axiome  $[O_3]$ .

**Exemple 1.2.7.** L'intersection  $\tau_1 \cap \tau_2$  de deux topologies quelconques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sur  $X$  est également une topologie sur  $X$ . En effet, d'après  $[O_1]$ ,  $X$  et  $\emptyset$  appartiennent chacun à la fois  $\tau_1$  et  $\tau_2$ ; ainsi  $X$  et  $\emptyset$  appartiennent chacun à l'intersection  $\tau_1 \cap \tau_2$ ; c'est-à-dire  $\tau_1 \cap \tau_2$  vérifie  $[O_1]$ . De plus si  $G, H \in \tau_1 \cap \tau_2$  alors, en particulier,  $G, H \in \tau_1$  et  $G, H \in \tau_2$ . Mais puisque  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des topologies,  $G \cap H \in \tau_1$  et  $G \cap H \in \tau_2$ . Par conséquent  $G \cap H \in \tau_1 \cap \tau_2$ . En d'autres termes  $\tau_1 \cap \tau_2$  vérifie  $[O_3]$ . De manière analogue  $\tau_1 \cup \tau_2$  vérifie  $[O_2]$ .

La proposition démontrée dans l'exemple précédent peut en fait être généralisée à un ensemble quelconque de topologie. A savoir,

**Théorème 1.2.1.** Soit  $\{\tau_i : i \in I\}$  une famille quelconque de topologies sur un ensemble  $X$ . Alors l'intersection  $\cap_i \tau_i$  est également une topologie sur  $X$ .

Dans notre dernier exemple nous allons montrer que la réunion de topologies n'est pas en général une topologie.

**Exemple 1.2.8.** Chacune des familles  $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$  et  $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$  est une topologie sur  $X = \{a, b, c\}$ . Mais la réunion  $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$  n'est une topologie sur  $X$  puisque l'axiome 3 n'est pas vérifié. C'est-à-dire que  $\{a\} \in \tau_1 \cup \tau_2$ ,  $\{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$  mais  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$  n'appartient pas à  $\tau_1 \cup \tau_2$ .

**Définition 1.2.2.** Si  $G$  est un ouvert contenant un point  $p \in X$ , alors  $G$  est appelé un voisinage ouvert de  $p$ . De même,  $G$  privé de  $p$ , c'est-à-dire  $G \setminus \{p\}$  est appelé voisinage ouvert pointé de  $p$ .

**Exercice 1.2.1.** Sur un ensemble à trois éléments  $X = \{a, b, c\}$  il peut y avoir 26 topologies. Décrivez les!

## 1.2.2 Comparaison des topologies

**Définition 1.2.3.** Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux topologies sur un ensemble non vide  $X$ . On dit que  $\tau_1$  est **moins fine** que  $\tau_2$  ou que  $\tau_2$  est **plus fine** que  $\tau_1$  si tout ouvert de  $\tau_1$  est également un ouvert de  $\tau_2$ .

Dans ce cas, on dit que les deux topologies sont **comparables** et on écrit  $\tau_1 \subset \tau_2$  ou encore  $\tau_1 \preceq \tau_2$ .

**Exemple 1.2.9.** La topologie discrète  $\tau_d$  est plus fine que toute autre topologie, alors que la topologie grossière  $\tau_g$  est moins fine que toute topologie : on peut écrire  $\tau_g \subset \tau \subset \tau_d$  pour toute topologie  $\tau$ , toujours sur le même ensemble  $X$ .

**Remarque 1.2.2.** Deux topologies ne sont pas forcément comparables : si l'on prend sur  $X = \{0, 1\}$ , deux topologies  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$  et  $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$ . On n'a ni  $\tau_2 \subset \tau_1$ , ni  $\tau_1 \subset \tau_2$ .

Nous passons maintenant en revue divers moyens de se donner une topologie. Ce sont les systèmes de voisinages, les bases de topologie, les sous-bases et les fermés. Dans chaque cas, nous aurons deux types de résultats : étant donné un espace topologique, on définira la notion concernée et ses propriétés, ensuite on montrera qu'un objet ayant ces propriétés définit une seule topologie. Commençons par introduire les notions suivantes.

### 1.3 Caractérisation d'une topologie à l'aide des fermés

Passons maintenant à la définition des fermés.

**Définition 1.3.1.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $F$  de  $X$  est fermé si son complémentaire dans  $X$  est un ouvert.

**Exemple 1.3.1.** La famille  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$  définit une topologie sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Les fermés de  $X$  sont les sous-ensembles

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$$

**Remarque 1.3.1.** Notons qu'il y a des sous ensembles de  $X$ , tels que  $\{b, c, d, e\}$  qui sont à la fois ouverts et fermés, et qu'il y a des sous ensembles de  $X$ , tels que  $\{a, b\}$  qui ne sont ni ouverts ni fermés. "Une topologie n'est donc pas similaire à une porte !!! car pour une porte si elle n'est pas ouverte elle est fermée."

**Exemple 1.3.2.** Pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , on a :

1. L'ensemble  $[0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé ;
2. L'ensemble  $] - \infty, \infty[$  est à la fois ouvert et fermé ;
3. L'ensemble  $]0, 1[$  est ouvert mais non fermé ;
4. L'ensemble  $[0, 1]$  est fermé mais n'est pas ouvert.

**Exemple 1.3.3.** Pour la topologie grossière de  $X$ , les fermés sont  $\emptyset$  et  $X$ .

**Exemple 1.3.4.** Soit  $X$  un espace topologique discret, c'est-à-dire tout sous-ensemble de  $X$  est un ouvert. Alors tout sous-ensemble de  $X$  est également fermé puisque son complémentaire est toujours ouvert. En d'autres termes, tous les sous-ensembles de  $X$  sont à la fois ouverts et fermés. Ainsi, pour la topologie discrète, toute partie de  $X$  est à la fois ouverte et fermée.

Le théorème qui suit donne des propriétés des ensemble fermés d'un espace topologique.

**Théorème 1.3.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Alors la famille des fermés de  $X$  possède les propriétés suivantes :

- i)  $X$  et  $\emptyset$  sont des ensembles fermés.
- ii) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

iii) La réunion de deux fermés quelconque est fermé.

*Démonstration.* On applique les lois de De Morgan sur le complémentaire de  $X$ , de  $\emptyset$ , de l'intersection quelconque de fermés et de la réunion finie de fermés. Ce qui donne

1.  $X \in \mathcal{F}$  car  $\overline{X} = \emptyset \in \tau$  et  $\emptyset \in \mathcal{F}$  car  $\overline{\emptyset} = X \in \tau$
2. Soit  $F_i$  une famille de fermés de  $X$ . Pour montrer que l'intersection d'une famille quelconque de fermé est un fermé, on montre que son complémentaire

$$X - \bigcap_{i \in I} F_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{F_i}}$$

est un ouvert.

$$F_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{F_i} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \overline{F_i} \in \tau \Rightarrow \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{F_i}} \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$$

3. De même, on a  $F_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{F_i} \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n \overline{F_i} \in \tau \Rightarrow \overline{\bigcap_{i=1}^n \overline{F_i}} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$

□

On remarque donc que les propriétés des fermés se déduisent de celles des ouverts par passage au complémentaire, et vice-versa. La proposition suivante donne une caractérisation de topologie à l'aide des fermés.

**Proposition 1.3.1.** *Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{F}$  une famille de sous-ensembles satisfaisant la condition de la proposition précédente. Il existe une unique topologie  $\mathcal{T}$  telle que  $\mathcal{F}$  soit l'ensemble des fermés associés à cette topologie  $\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de définir les ouverts de cette topologie comme les complémentaires des éléments de  $\mathcal{F}$ . □

## 1.4 Caractérisation à l'aide d'une base de topologie

On peut également caractériser une topologie à l'aide d'une sous famille appelée base de topologie.

**Définition 1.4.1.** *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. On appelle **base de topologie**  $\tau$  toute partie  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  telle que tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\tau$  soit la réunion d'une famille d'ouverts de  $\mathcal{B}$  i.e si  $\omega \in \tau$  alors  $\omega = \bigcup_{x \in X} B_x$  avec  $B_x \in \mathcal{B}$ .*

**Exemple 1.4.1.** *L'ensemble  $\mathcal{B} = \{x\}$  des singlétons d'un ensemble  $X$  est une base de la topologie discrète sur  $X$ .*

**Exemple 1.4.2.** *Les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  forment une base de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .*

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Une partie  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  est une base de  $\tau$  ssi pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\tau$ , et tout  $x \in \Omega$ , il existe un élément  $B$  de la base contenant  $x$  et inclus dans  $\Omega$  i.e  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset \Omega$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\tau$ , alors pour tout ouvert  $\omega \in \tau$  et  $\forall x \in \Omega$ , il existe une famille  $(\omega_\alpha, \alpha \in A)$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  tel que  $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ ; et donc, il existe  $\alpha_0$  tel que  $x \in \omega_{\alpha_0} \subset \Omega$ .

Réciproquement, si  $\forall x \in \Omega$ , il existe  $\omega_x \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in \omega_x \subset \Omega$ . On a donc

$$\omega = \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x$$

□

Le théorème suivant donne des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une famille d'ensembles soit un base d'une topologie

**Proposition 1.4.2.** 1. Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\tau$  alors toute intesection finie d'éléments de  $\mathcal{B}$  est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

2. De manière équivalente, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\tau$ , alors  $X$  est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$  et l'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{B}$  est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\tau$  alors toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{B}$  appartient à  $\tau$ , et donc est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

La seconde propriété se démontre de la même manière et est d'ailleurs équivalente à la première. □

On peut résumer ces conditions dans le

**Théorème 1.4.1.** Soit  $\mathcal{B}$  une famille des parties d'un ensemble non vide  $X$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une base d'une topologie sur  $X$  ssi elle possède les deux propriétés suivantes :

1.  $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$ .

2. Pour tout  $B, B^* \in \mathcal{B}$ ,  $B \cap B^*$  est réunion d'éléments de  $\mathcal{B}$ , ou de manière équivalente si  $p \in B \cap B^*$  alors  $\exists B_p \in \mathcal{B}$  tel que  $p \in B_p \subset B \cap B^*$ .

Le théorème suivant donne une caractérisation d'une topologie à l'aide d'une base.

**Théorème 1.4.2.** Soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  satisfaisant une des propriétés de la proposition précédente. Alors, il existe une unique topologie  $\tau$  sur  $X$  telle que  $\mathcal{B}$  soit une base de  $\tau$ .

Cette topologie est donnée par

$$\tau = \{\Omega \subset X; \forall x \in \Omega, \exists \omega \in \mathcal{B} : x \in \omega \subset \Omega\}$$

*Démonstration.* Voir [1] □

**Définition 1.4.2.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Une famille  $\delta$  d'ouverts de  $X$ , i.e  $\delta \subset \tau$ , est une sous-base pour la topologie  $\tau$  sur  $X$  si les intersections finies d'éléments de  $\delta$  forment une base de  $\tau$ .

**Exemple 1.4.3.** Remarquons que tout intervalle ouvert  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$  munie de la topologie usuelle est égal à l'intersection des deux intervalles infinis ouverts  $] - \infty, b[$  et  $]a, +\infty[$  donc  $]a, b[ = ] - \infty, b[ \cap ]a, +\infty[$ . Or les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ . Ainsi la familles de tous les intervalles infinis ouverts est une sous-base de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 1.4.3.** Toute famille de parties  $\mathcal{A}$  d'un ensemble non vide  $X$  est une sous-base d'une topologie unique  $\tau$  sur  $X$ ; i.e que les intersections finies d'éléments de  $\mathcal{A}$  constituent une base pour une topologie  $\tau$  sur  $X$ .

## 1.5 Topologie induite

**Définition 1.5.1.** Soit  $A$  un sous-ensemble non vide d'un espace topologique  $(X, \tau)$ . La famille  $\tau_A$  de toutes les intersections de  $A$  avec les sous-ensembles  $\tau$ -ouverts de  $A$  est une topologie sur  $A$ ; on l'appelle la **topologie induite** sur  $A$  par  $\tau$  ou **topologie trace** sur  $A$ , et l'espace topologique  $(A, \tau_A)$  est appelée un **sous-espace** de  $(X, \tau)$ .

En d'autres termes, un sous-ensemble  $H$  de  $A$  est un ensemble  $\tau_A$ -ouvert, c'est-à-dire ouvert relativement à la topologie induite sur  $A$ , ssi il existe un ensemble  $\tau$ -ouvert  $G$  de  $X$  tel que  $H = G \cap A$ . On peut montrer la proposition suivante

**Proposition 1.5.1.** Si  $A \subset (X, \tau)$  alors  $\tau_A = \{A \cap \mathcal{U}; \text{ pour } \mathcal{U} \in \tau\}$  est une topologie sur  $A$ .

*Démonstration.* Exercice □

**Exemple 1.5.1.** Considérons la topologie  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$  sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  et le sous-ensemble  $A = \{a, d, e\}$  de  $X$ . Remarquons que :  $X \cap A = A$ ,  $\{a\} \cap A = \{a\}$ ,  $\{a, c, d\} \cap A = \{a, d\}$ ,  $\emptyset \cap A = \emptyset$ ,  $\{c, d\} \cap A = \{d\}$ , et  $\{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}$ . Ainsi, la topologie induite par  $\tau$  sur  $A$  est

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$$

**Remarque 1.5.1.** Les ouverts de la topologie induite sur un sous-espace ne sont pas nécessairement des ouverts de la topologie sur l'espace tout entier.

**Exemple 1.5.2.** 1.  $\{0\}$  est un ouvert de la topologie induite sur  $\mathbb{Z}$  par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ ; mais n'est pas un ouvert de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

2. L'ensemble  $[0, 1[ = [0, 2] \cap ]-1, 1[$  est un ouvert de la topologie induite sur  $[0, 2]$  par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  mais n'est pas un ouvert de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.5.3.** Considérons la topologie usuelle  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{R}$  et la topologie induite  $\tau_A$  sur l'intervalle fermé  $A = [3, 8]$ . Notons que l'intervalle semi-ouvert  $]3, 5[$  est ouvert pour la topologie induite sur  $X$ , c'est-à-dire est  $\tau_A$ -ouvert puisque  $]3, 5[ = ]2, 5[ \cap A$  où  $]2, 5[$  est un sous-ensemble  $\tau$ -ouvert de  $\mathbb{R}$ . Ainsi nous voyons qu'un ensemble peut être ouvert relativement à un sous-espace mais ni ouvert ni fermé dans l'espace tout entier.

**Proposition 1.5.2.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset B \subset X$  des sous ensembles. Alors les topologies induites sur  $A$  par  $\tau$  et celle induite par  $\tau_B$  sur  $A$  sont les mêmes.

*Démonstration.* La topologie induite par  $\tau$  sur  $A$  étant  $\tau_A = \{A \cap \mathcal{U}; \text{ pour } \mathcal{U} \in \tau\}$ ; et la topologie induite par  $\tau_B$  sur  $A$  sera

$$(\tau_B)_A = \{A \cap (\mathcal{U} \cap B) = \mathcal{U} \cap B \cap A = A \cap \mathcal{U} = \tau_A; \text{ pour } \mathcal{U} \in \tau\}$$

□

## 1.6 Notion de voisinage

**Définition 1.6.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $x \in X$ . Un sous-ensemble  $V$  de  $X$  est un voisinage de  $x$  s'il existe un ouvert  $\omega \in \mathcal{T}$  contenant  $x$  et inclus dans  $V$  i.e un ouvert  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset V$ . L'ensemble des voisinages de  $x$  est appelé **système de voisinages de  $x$**  et on le note par  $\mathcal{V}_x$ .

**Exemple 1.6.1.** Soit  $a$  un nombre réel, c'est-à-dire  $a \in \mathbb{R}$ . Alors chaque intervalle fermé  $[a-\delta, a+\delta]$  de centre  $a$  est un voisinage de  $a$  puisqu'il contient l'intervalle ouvert  $]a-\delta, a+\delta[$  qui contient  $a$ . De manière analogue si  $p$  est un point du plan  $\mathbb{R}^2$  alors tout disque fermé  $\mathbb{D}^2 = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p, q) \leq \delta \neq 0\}$ , de centre  $p$ , est un voisinage de  $p$  puisqu'il contient le disque ouvert de centre  $p$ .

Les faits les plus importants concernant le système de voisinages  $\mathcal{V}_p$  d'un point quelconque  $p \in X$  sont donnés par les quatre propriétés de la proposition ci-dessous appelées axiomes des voisinages. D'ailleurs, ces axiomes peuvent être utilisés pour définir une topologie sur  $X$  comme nous le montrerons plus loin. La proposition suivante donne les propriétés des systèmes de voisinages.

**Proposition 1.6.1.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. On a :

1.  $\mathcal{V}_x$  n'est pas vide et  $x$  appartient à chaque élément de la famille  $\mathcal{V}_x$  i.e  $\forall V \in \mathcal{V}_x$ , on a  $x \in V$ .
2. L'intersection de deux éléments quelconques de la famille  $\mathcal{V}_x$  appartient à  $\mathcal{V}_x$  i.e  $\forall V \in \mathcal{V}_x$  et  $\forall W \in \mathcal{V}_x$ , alors on a  $V \cap W \in \mathcal{V}_x$ .
3.  $\forall x \in X$  on a  $X \in \mathcal{V}_x$ .
4. Toute partie contenant un élément de la famille  $\mathcal{V}_x$  appartient à la famille  $\mathcal{V}_x$  i.e  $V \in \mathcal{V}_x$  et  $V \subset W$  alors  $W \in \mathcal{V}_x$ .
5. Chaque élément  $V \in \mathcal{V}_x$  contient un élément  $V' \in \mathcal{V}_x$  où  $V'$  est un voisinage de chacun de ses points i.e si  $V \in \mathcal{V}_x$ , il existe  $V' \in \mathcal{V}_x$  tel que pour tout  $y \in V'$  on a  $V' \in \mathcal{V}_y$ .

*Démonstration.* Exercice □

Le lien fondamental entre ouverts et voisinages est donné par la proposition suivante.

**Proposition 1.6.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $A$  de  $X$  est ouverte ssi elle est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire que  $A$  est ouverte ssi pour tout  $x \in A$ , on a  $A \in \mathcal{V}_x$ .

*Démonstration.* En effet,  $\forall G \in \tau$ , et tout  $x \in G$ , on a  $x \in G \subset G$ ; donc  $G$  est voisinage de  $x$ .

Réciproquement, si  $\forall x \in G$ , avec  $G$  un voisinage de  $x$ , il existe un ouvert  $\omega_x \in \tau$  tel que  $x \in \omega_x \subset G$ . Alors on a  $G = \cup_{x \in G} \omega_x$ , et donc  $G$  est ouvert. □

Cette proposition signifie que  $A$  est ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points. Nous utiliserons très fréquemment ce proposition pour démontrer qu'un ensemble est ouvert.

**Définition 1.6.2.** On appelle **base de voisinages** de  $x$  tout sous-ensemble  $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}_x$  il existe  $B \in \mathcal{B}_x$  tel que  $B \subset V$ .

On donne ici quelques exemples :

1. Par exemple, dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  c'est à dire  $\mathbb{R}^n$  munie de la topologie euclidienne une boule ouverte, ou fermée centrée sur  $x$  et de rayon strictement positif est un voisinage de  $x$ . Plus généralement, on peut montrer qu'une partie  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est un voisinage de  $x$  si, et seulement si,  $V$  contient une boule ouverte centrée sur  $x$ , ou une boule fermée centrée sur  $x$  (de rayon strictement positif). L'ensemble  $B(x, r)$  (resp.  $B_f(x, r)$ ) formé des boules ouvertes (resp. fermées) de rayon strictement positif constitue une base de voisinages de  $x$ .
2. Pour la topologie discrète sur un ensemble  $X$ , on constate que  $\mathcal{V}_x$  est l'ensemble des parties de  $X$  contenant  $x$ , et que  $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$  est une base de voisinages de  $x$ , quel que soit  $x \in X$  i.e que pour la topologie discrète la base de voisinage est l'ensemble de tous les singlétons.
3. Pour l'ensemble  $X = \{a, b, c, d\}$  muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

Le système de voisinages de  $d$  est  $\mathcal{V}_d = \{\{b, c, d\}, X\}$  tandis que  $\mathcal{V}_a$  est l'ensemble des parties de  $X$  qui contiennent  $a$  i.e

$$\mathcal{V}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$$

## 1.7 Point adhérent, point isolé et point d'accumulation

**Définition 1.7.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Un point  $p \in X$  est un **point adhérent** à un sous-ensemble  $A$  de  $X$  si tout ouvert(voisinage)  $G$  contenant  $p$  rencontre  $X$  c'est à dire si

$$\boxed{G \text{ est ouvert et } p \in G \implies (G \cap A) \neq \emptyset}$$

**Définition 1.7.2.** Soit  $X$  un espace topologique. Un point  $p \in X$  est un **point isolé** à s'il existe un ouvert(voisinage)  $G$  qui rencontre  $X$  uniquement en  $p$  c'est à dire si

$$\boxed{G \text{ est ouvert et } p \in G \implies (G \cap A) = \{p\}}$$

**Définition 1.7.3.** Soit  $X$  un espace topologique. Un point  $p \in X$  est un **point d'accumulation** ou un **point limite** d'un sous-ensemble  $A$  de  $X$  si tout ouvert  $G$  contenant  $p$  contient un point de  $A$  autre que  $p$  c'est à dire si

$$\boxed{G \text{ est ouvert et } p \in G \implies (G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset}$$

L'ensemble des points d'accumulation de  $A$ , noté  $A'$ , est appelé **ensemble dérivé** ou **ensemble limite** de  $A$ . Un point adhérent est soit un point isolé ou un point d'accumulation. L'ensemble des points adhérents de  $A$  est appelé **adhérence** de  $A$ . L'adhérence de  $A$  notée  $\overline{A}$  ou  $adh(A)$ .

**Exemple 1.7.1.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique où  $X = \{a, b, c, d, e\}$  et

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Considérons la partie  $A = \{a, c, d, e\}$  de  $X$ .

1. Remarquons que  $b \in X$  est un point limite de  $A$  puisque les ouverts contenant  $b$  sont  $\{b, c, d, e\}$  et  $X$  et qu'ils contiennent chacun un point de  $A$  différent de  $b$ , c'est-à-dire  $c, d$  et  $e$ .
2. Par contre, le point  $a \in X$  n'est pas un point limite de  $A$  puisque l'ensemble ouvert  $\{a\}$  qui contient  $a$  ne contient pas de points de  $A$  différent de  $a$ . Le point  $a$  n'est pas non plus un point isolé dans  $A$ . Donc  $a$  n'est pas un point adhérent à  $A$ .
3. De manière analogue les points  $d$  et  $e$  sont des points limites de  $A$  et le point  $c$  n'est pas un point limite de  $A$ . Ainsi  $A' = \{b, d, e\}$  est l'ensemble dérivé de  $A$ .

**Exemple 1.7.2.** Soit  $X$  un espace topologique grossier, c'est-à-dire que  $X$  et  $\emptyset$  sont les seuls ouverts de  $X$ . Alors  $X$  est le seul ouvert contenant un point quelconque  $p \in X$ . Ainsi  $p$  est un point d'accumulation de tout sous-ensemble de  $X$  excepté l'ensemble vide  $\emptyset$  et l'ensemble formé de  $p$  seul, c'est-à-dire le singleton  $\{p\}$ . Ainsi l'ensemble dérivé  $A'$  de tout sous-ensemble  $A$  de  $X$  est :

$$A' = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \{p\}^c = X \setminus \{p\} & \text{si } A = \{p\} \\ X & \text{si } A \text{ contient deux points ou plus} \end{cases}$$

Remarquons que pour la topologie usuelle de la droite  $\mathbb{R}$  ou du plan  $\mathbb{R}^2$ , la définition donnée ci-dessus d'un point d'accumulation est la même que celle qui a été donnée dans le cours d'Analyse.

Les ensembles fermés peuvent également être caractérisés par leurs points limites de la manière suivante :

**Théorème 1.7.1.** Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  est fermé ssi  $A$  contient chacun de ses points d'accumulation.

En d'autres termes, un ensemble est fermé ssi l'ensemble dérivé  $A'$  de  $A$  est un sous-ensemble de  $A$ , c'est-à-dire  $A' \subset A$ .

**Exemple 1.7.3.** Dans l'exemple 1.7.1 nous remarquons que l'ensemble  $A$  est fermé car  $A' \subset A$ .

**Proposition 1.7.1.** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $X$ . La fermeture ou l'adhérence de  $A$  notée  $\bar{A}$  ou  $\text{adh}(A)$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ . En d'autres termes si  $\{F_i : i \in I\}$  est la famille des tous les sous-ensembles fermés de  $X$  contenant  $A$ , alors  $\bar{A} = \bigcap_i F_i$ .

Remarquons d'abord que  $\bar{A}$  est un ensemble fermé comme intersection de fermés. De plus  $\bar{A}$  est le plus petit ensemble fermé contenant  $A$ , c'est-à-dire que si  $F$  est fermé contenant  $A$  alors  $A \subset \bar{A} \subset F$ . Ainsi un ensemble  $A$  est fermé ssi  $A = \bar{A}$ . Nous énonçons ces résultats de manière plus formelle.

**Proposition 1.7.2.** Soit  $\bar{A}$  l'adhérence d'ensemble  $A$ . Alors :

- i)  $\bar{A}$  est fermé ;
- ii) Si  $F$  est fermé et contient  $A$ , alors  $A \subset \bar{A} \subset F$  ;
- iii)  $A$  est fermé ssi  $A = \bar{A}$ .

Démonstration. [1] □

**Exemple 1.7.4.** Considérons la topologie  $\tau$  sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  de l'exemple 1.7.1 où les fermés de  $X$  sont

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}.$$

Alors on a :

$$\overline{\{b\}} = \{b, e\}, \overline{\{a, c\}} = X, \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}.$$

L'adhérence d'un ensemble peut également être complètement décrite en termes de ses points limites de la manière suivante :

**Théorème 1.7.2.** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $X$ . Alors l'adhérence de  $A$  est la réunion de  $A$  et de l'ensemble de ses points d'accumulation, c'est-à-dire  $\bar{A} = A \cup A'$ .

Ainsi donc, un point  $p \in X$  est appelé point adhérent de  $A \subset X$  si  $p$  appartient à l'adhérence de  $A$ , c'est-à-dire si  $p \in \bar{A}$ . En vertu du théorème précédent  $p \in X$  est un point adhérent à  $A \subset X$  ssi  $p \in A$  ou  $p$  est un point limite  $A$ .

**Exemple 1.7.5.** Considérons l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Comme on l'a vu précédemment, pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , tout nombre réel  $a \in \mathbb{R}$  est un point limite de  $\mathbb{Q}$  c'est à dire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. Ainsi l'adhérence de  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels tout entier, c'est-à-dire  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.7.1.** 1. Un point d'accumulation de  $A$  est-il nécessairement dans  $A$  ?

2. Soit  $A = [0, 1[ \cup \{2\}$ . Déterminer les points isolés de  $A$  et les points d'accumulation de  $A$  et le point l'adhérence de  $A$ .

3. Montrer qu'une partie  $A$  de  $X$  est discrète si et seulement si tout point de  $A$  est isolé.

## 1.8 Adhérence et densité d'un ensemble

La notion de densité formalise le problème de l'approximation des éléments d'un ensemble par ceux d'un autre ensemble. Là encore, on cherche à se ramener à des ensembles plus petits et dont on comprend mieux les propriétés. Nous en verrons de nombreux exemples dans la suite.

**Définition 1.8.1. (Densité).** Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  est dit **dense** dans  $B \subset X$  si  $B$  est contenu dans l'adhérence de  $A$ , c'est-à-dire si  $B \subset \bar{A}$ . En particulier  $A$  est dense dans  $X$  ou est un sous-ensemble dense de  $X$  ssi  $\bar{A} = X$ .

**Exemple 1.8.1.** Remarquons dans l'exemple 1.7.4 que

$$\{\overline{a, c}\} = X$$

et

$$\{\overline{b, d}\} = \{b, c, d, e\}$$

où  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Ainsi l'ensemble  $\{a, c\}$  est un sous-ensemble dense de  $X$  tandis que l'ensemble  $\{b, d\}$  n'en est pas un.

**Exemple 1.8.2.** Comme il a été indiqué dans l'exemple 1.7.5,  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . En d'autres termes, pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$ . Cela signifie que tout nombre réels est limite d'une suite de nombres rationnels ou encore entre deux nombres réels quelconques il existe un nombre rationnels.

On peut interpréter la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  en disant que tout intervalle de  $\mathbb{R}$  contient un nombre rationnels. Ainsi donc, un sous ensemble  $A$  de  $X$  est dense dans  $X$  si tout ouvert de  $X$  contient un élément de  $A$ .

L'opérateur "fermeture" ou adhérence, qui à chaque sous-ensemble  $A$  de  $X$  associe sa fermeture ou adhérence  $\bar{A} \subset X$ , vérifie les quatre propriétés de la proposition ci-dessous, appelée axiome de fermeture de Kuratowski. En fait, ces axiomes peuvent être utilisés pour définir une topologie sur  $X$ , comme on le démontrera ultérieurement.

**Proposition 1.8.1.** (i)  $\bar{\emptyset} = \emptyset$  ;

(ii)  $A \subset \bar{A}$  ;

(iii)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  ;

(iv)  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ .

Démonstration. [1]

□

## 1.9 Intérieur, extérieur et frontière d'un ensemble

**Définition 1.9.1.** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $X$ . Un point  $p \in A$  est appelé **point intérieur** de  $A$  si  $p$  appartient à un ouvert  $G$  contenu dans  $A$  :

$$p \in G \subset A \text{ où } G \text{ est ouvert.}$$

L'ensemble des intérieurs de  $A$  noté  $\text{int}(A)$ ,  $A^\circ$  est appelé l'**intérieur** de  $A$ .

L'intérieur de  $A$  peut également être caractérisé de manière suivante :

**Proposition 1.9.1.** (i) L'intérieur d'un ensemble  $A$  est la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans  $A$  ;

(ii)  $A^\circ$  est ouvert ;

(iii)  $A^\circ$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$  c'est-à-dire que si  $G$  est un ouvert contenu dans  $A$  alors  $G \subset A^\circ \subset A$  ;

(iv)  $A$  est ouvert ssi  $A = A^\circ$ .

*Démonstration.* voir [1] □

**Définition 1.9.2.** L'*extérieur* de  $A$ , noté  $\text{ext}(A)$ , est l'intérieur du complémentaire de  $A$ , c'est-à-dire  $\text{int}(A^c)$ .

**Définition 1.9.3.** La *frontière* de  $A$  noté  $b(A)$  ou  $\text{front}(A)$  est l'ensemble des points n'appartenant ni à l'intérieur ni à l'extérieur de  $A$ .

A présent on a une relation importante entre l'intérieur, l'extérieur et l'adhérence.

**Théorème 1.9.1.** Soit  $A$  un sous-ensemble quelconque d'un espace topologique  $X$ . Alors l'adhérence de  $A$  est la réunion de l'intérieur et de la frontière de  $A$  c'est-à-dire  $\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$ .

*Démonstration.* voir [1] □

**Exemple 1.9.1.** Considérons les quatre intervalles  $[a, b]$ ,  $]a, b]$ ,  $]a, b[$  et  $[a, b[$  dont les extrémités sont  $a$  et  $b$ . L'intérieur de chacun est l'intervalle  $]a, b[$  et la frontière de chacun est l'ensemble des extrémités, c'est-à-dire  $\{a, b\}$ .

**Exemple 1.9.2.** Considérons la topologie  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$  sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , et le sous-ensemble  $A = \{b, c, d\}$  de  $X$ . Les points  $c$  et  $d$  sont chacun des points intérieurs de  $A$  puisque  $c, d \in \{c, d\} \subset A$  où  $\{c, d\}$  est un ouvert. Le point  $b \in A$  n'est pas un point intérieur de  $A$ ; ainsi  $\text{int}(A) = \{c, d\}$ . Seul le point  $a \in X$  est extérieur à  $A$ , c'est-à-dire intérieur au complémentaire  $A^c = \{a, e\}$  de  $A$ ; ainsi  $\text{int}(A^c) = \{a\}$ . Par conséquent la frontière de  $A$  est formée des points  $b$  et  $e$ , c'est-à-dire  $b(A) = \{b, e\}$ .

**Exemple 1.9.3.** Considérons l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Puisque tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est formé à la fois des points rationnels et irrationnels, il n'y a pas des points intérieurs ou extérieurs à  $\mathbb{Q}$ ; ainsi  $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$  et  $\text{int}(\mathbb{Q}^c) = \emptyset$ . Ainsi la frontière de  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des réels tout entier, c'est-à-dire  $b(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ .

**Définition 1.9.4.** Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  est dit **non dense** ou **rare** dans  $X$  si l'intérieur de son adhérence est vide, c'est-à-dire  $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$ .

**Exemple 1.9.4.** Considérons les sous-ensembles  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  de  $\mathbb{R}$ . Ainsi qu'il a été noté précédemment,  $A$  a exactement un point limite,  $0$ . Ainsi  $\bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Remarquons que  $\bar{A}$  n'a pas de point intérieur; ainsi  $A$  est rare dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.9.5.** Soit  $A$  l'ensemble des nombres rationnels compris entre  $0$  et  $1$ , c'est-à-dire

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$$

Remarquons que l'intérieur de  $A$  est vide, c'est-à-dire  $\text{int}(A) = \emptyset$ . Mais  $A$  n'est pas rare dans  $\mathbb{R}$  car l'adhérence de  $A$  est  $[0, 1]$  et ainsi  $\text{int}(\bar{A}) = \text{int}([0, 1]) = ]0, 1[$  n'est pas vide.

## 1.10 Espaces topologiques séparés

### 1.10.1 Définition et exemples

Espace de type  $T_0$  ou de Kolmogorov

**Définition 1.10.1.** On dit que  $X$  est de type  $T_0$  ou de Kolmogorov si, pour tout  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , alors l'un au moins de ces deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre. Autrement dit, il existe  $i \in \{1, 2\}$  et  $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$  tel que  $j \neq i$  et  $x_j \notin V_i$ .

**Espace de type  $T_1$  ou accessible (ou de Fréchet)**

**Définition 1.10.2.** On dit que  $X$  est de type  $T_1$  ou de Fréchet si, pour tout  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , alors chacun de ces deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre. Autrement dit, il existe  $i \in \{1, 2\}$  et  $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$  et  $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$  tel que  $x_1 \notin V_2$  et  $x_2 \notin V_1$ .

**Espaces de type  $T_2$  ou séparés (ou de Hausdorff)**

**Définition 1.10.3.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. On dit que  $X$  est **séparé au sens de Hausdorff** si  $\forall a, b \in X$  avec  $a \neq b$ , il existe deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  disjoints ( $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ) de  $\tau$  tels que  $a \in U_1$  et  $b \in U_2$ . On dit aussi que la topologie  $\tau$  est séparée.

Une topologie séparée est une topologie qui a suffisamment d'ouverts pour distinguer les points de  $X$ , et on peut être tenter d'inclure cette propriété dans les axiomes des ouverts. La plupart des topologies qu'on rencontrera seront d'ailleurs séparées, et cette notion est stable par beaucoup d'opérations : produit, sous-ensemble, etc. Malheureusement, elle n'est pas stable par passage au quotient ; ce qui force à la traiter à part dans la présentation générale des espaces topologiques.

**Exemple 1.10.1.** 1. La topologie discrète sur un espace topologique est séparée. En effet, il suffit pour tous points  $a$  et  $b$  de prendre  $U_1 = \{a\}$  et  $U_2 = \{b\}$ .

2. La topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  est séparée.

**Exemple 1.10.2.** Un ensemble contenant au moins deux éléments et muni de la topologie grossière n'est pas séparé.

**Exemple 1.10.3.** Une topologie plus fine qu'une topologie séparée est encore séparée.

**Exercice 1.10.1.** 1. Trouver un exemple d'espace topologique qui n'est pas  $T_0$ .

2. Montrer que  $T_1$  implique  $T_0$ . Trouver un exemple d'espace  $T_0$  non  $T_1$ .

3. Montrer que  $T_2$  implique  $T_1$ . Trouver un exemple d'un espace  $T_1$  non  $T_2$ .

**Remarque 1.10.1.** Dans la suite du cours, quand on parle d'espace séparé, on fait allusion à la séparation au sens de Hausdorff.

**1.10.2 Parties finies d'un espace séparé**

**Propriété 1.10.1.** Si  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  est une partie finie d'un espace séparé  $X$ , alors  $A$  est fermé.

*Démonstration.* En effet, dans un espace topologique séparé, tout singleton  $\{a_i\}$  est un fermé. Or  $A = \cup_{i=1}^n \{a_i\}$  i.e  $A$  est une réunion des fermés et donc est un fermé.  $\square$

### 1.10.3 Espace séparé et unicité de la limite

**Définition 1.10.4.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X$  et soit  $l \in X$ . On dit que  $l$  est une **limite** de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n$  tend vers l'infini si pour tout voisinage  $V$  de  $l$  dans  $X$ , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans  $V$ . Cela se résume

$$\boxed{\forall V \in \mathcal{V}_l, \exists N_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_V, x_n \in V.}$$

Cela revient à dire que  $l$  est limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ssi tout voisinage de  $l$  contient les  $x_n$  à partir d'un certain rang.

**Définition 1.10.5. (Valeur d'adhérence).** On dit que  $l \in X$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si pour tout voisinage  $V_l$  de  $l$ , pour tout entier  $N$  il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n \geq N$  et  $x_n \in V_l$ .

Autrement dit, on dit que  $l$  est une **valeur d'adhérence** de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ssi pour tout voisinage  $V_l$  de  $l$ , il existe une infinité d'indices  $n$  pour lesquels  $x_n \in V_l$ .

**Remarque 1.10.2.** Si on munit  $X$  de la topologie grossière, alors n'importe quel élément de  $X$  est limite de n'importe quelle suite. En particulier, toutes les suites sont convergentes. Ceci peut expliquer le manque d'intérêt pour cette topologie. Ainsi, plus il y a d'ouverts dans la topologie choisie, plus on pourra s'approcher "finement" des éléments de  $X$ .

**Proposition 1.10.1.** Dans un espace topologique séparé une suite converge vers au plus un point.

*Démonstration.* Par absurde, supposons  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a deux limites distinctes  $l_1 \neq l_2$ . Comme  $(X, \tau)$  est séparé, il existe deux voisinages  $V_1 \in \mathcal{V}_{l_1}$  et  $V_2 \in \mathcal{V}_{l_2}$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . D'après la définition précédente des limites, il existe deux entiers  $n_1$  et  $n_2$  tels que

$$(\forall n \geq n_1, x_n \in V_1)$$

et

$$(\forall n \geq n_2, x_n \in V_2).$$

Mais alors

$$x_{\max\{n_1, n_2\}} \in V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Ce qui est impossible. D'où  $l_1 = l_2$ . □

**Exemple 1.10.4.** L'exemple le plus simple de topologie non séparée est la topologie grossière sur un ensemble  $X$  ayant au moins 2 éléments. Tout élément  $x$  de  $X$  n'admet qu'un seul voisinage  $X$ . Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $X$ , tout point  $x$  de  $X$  est une limite de la suite. Ainsi il n'y a pas unicité de la limite.

**Remarque 1.10.3.** Une topologie qui ne sépare pas les points est une topologie qui n'a pas assez d'ouverts (de voisinages ou de fermés).

Dans la suite, c'est le cas en analyse, on ne travaillera essentiellement avec des topologies séparées. On continuera de préciser l'hypothèse "espace séparé" pour bien identifier où elle intervient.

**Proposition 1.10.2.** *Dans un espace topologique séparé tout singleton est un fermé.*

*Démonstration.* Pour montrer que  $\forall x \in X, \{x\}$  est un fermé, il suffit de montrer que son complémentaire  $\{x\}^c$  est un ouvert ; donc que  $\{x\}^c$  est voisinage de chacun de ses points.  $\square$

**Proposition 1.10.3.** *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset X$ . On a :*

1. *Si  $\tau$  est séparée alors  $\tau_A$  est séparé.*
2. *Les fermés de  $\tau_A$  sont les intersections avec  $A$  des fermés de  $\tau$ .*
3. *Les voisinages de  $a \in A$  pour  $\tau_A$  sont les intersections avec  $A$  des voisinages de  $a$  pour  $\tau$ .*

*Démonstration.* Exercice  $\square$

## 1.11 Exercices

### Sur les topologies et ensembles ouverts

**Exercice 1.11.1.** *Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Indiquer si chacune des familles suivantes de parties de  $X$  est une topologie ou non.*

1.  $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
2.  $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
3.  $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

**Exercice 1.11.2.** *Soit  $\tau$  la famille formé de  $\mathbb{R}, \emptyset$  et de tous les intervalles infinis ouverts  $A = ]q, \infty[$ , avec  $q \in \mathbb{Q}$ , ensemble des rationnels. Montrer que  $\tau$  n'est pas une topologie sur  $\mathbb{R}$ .*

**Exercice 1.11.3.** *Soit  $\tau$  une topologie sur un ensemble  $X$  formée de quatre parties, c'est-à-dire de  $\tau = \{X, \emptyset, A, B\}$  où  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles propres non vide de  $X$ . Quelles conditions doivent satisfaire  $A$  et  $B$  ?*

**Exercice 1.11.4.** *Déterminer toutes les topologies sur  $X = \{a, b, c\}$  qui comporte exactement quatre éléments.*

**Exercice 1.11.5.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application d'un ensemble non vide  $X$  dans un espace topologique  $(Y, \mathcal{U})$ . De plus, soit  $\tau$  la famille des images réciproques des ouverts de  $Y$  :*

$$\tau = \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{U}\}$$

*Montrer que  $\tau$  est une topologie sur  $X$ .*

## Sur les points d'accumulation

**Exercice 1.11.6.** Soit  $\tau$  une topologie sur  $\mathbb{N}$  formée de  $\emptyset$  et de toutes les parties de  $\mathbb{N}$  de la forme  $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$  où  $n \in \mathbb{N}$  comme dans l'exercice 10.

1. Trouver les points d'accumulation de l'ensemble  $A = \{4, 13, 28, 37\}$ .
2. Trouver les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{N}$  pour lesquels  $E' = \mathbb{N}$ .

**Exercice 1.11.7.** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $(X, \tau)$ . A quelle condition un point  $p \in X$  n'est-il pas un point limite de  $A$  ?

**Exercice 1.11.8.** Soit  $A$  un sous-ensemble quelconque d'un espace topologique discret  $X$ . Montrer que l'ensemble dérivé  $A'$  de  $A$  est vide.

**Exercice 1.11.9.** Considérons la topologie  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$  sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Déterminer les ensembles dérivés

1. de  $A = \{c, d, e\}$ .
2. de  $B = \{b\}$ .

**Exercice 1.11.10.** Démontrer que si  $A$  est un sous-ensemble de  $B$ , alors tout point limite de  $A$  est également un point limite de  $B$ , c'est-à-dire que  $A \subset B$  implique  $A' \subset B'$ .

**Exercice 1.11.11.** Soit  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux topologies sur  $X$  telles que

$$\tau_1 \subset \tau_2$$

c'est-à-dire que tout sous-ensemble  $\tau_1$ -ouvert de  $X$  est également un sous-ensemble  $\tau_2$ -ouvert de  $X$ .

- i) Montrer que  $\tau_2$ -point limite de  $A$  est également un  $\tau_1$ -point limite de  $A$ .
- ii) Construire un espace dans lequel un  $\tau_1$ -point limite n'est pas un  $\tau_2$ -point limite.

**Exercice 1.11.12.** Démontrer que si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles d'un espace topologique  $(X, \tau)$ , alors  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

## Sur les ensembles fermés et densité

**Exercice 1.11.13.** Considérons les topologies suivantes sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  :  
 $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$

- i) Déterminer les sous-ensembles fermés de  $X$ .
- ii) Déterminer quelle est l'adhérence des ensembles  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  et  $\{c, e\}$ .
- iii) Quels sont parmi les ensembles de ii) ceux qui sont denses dans  $X$  ?

**Exercice 1.11.14.** Soit  $\tau$  la topologie de  $\mathbb{N}$  formée de  $\emptyset$  et de tous les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$  de la forme  $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$  où  $n \in \mathbb{N}$  comme dans le problème 10.

- i) Déterminer les fermés de  $(\mathbb{N}, \tau)$ .
- ii) Déterminer l'adhérence des ensembles  $\{7, 24, 47, 85\}$  et  $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ .
- iii) Déterminer les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$  qui sont denses dans  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 1.11.15.** Soit  $\tau$  la topologie de  $\mathbb{R}$  formée de  $\mathbb{R}$ ,  $\emptyset$  et de tous les intervalles infinis ouverts  $E_a = ]a, \infty[$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

- i) Déterminer les fermés de  $(\mathbb{R}, \tau)$ .
- ii) Déterminer l'adhérence des ensembles  $[3, 7[$ ,  $\{7, 24, 47, 85\}$  et  $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ .

**Exercice 1.11.16.** Soit  $X$  un espace topologique discret.

- i) Déterminer l'adhérence de n'importe quel sous-ensemble  $A$  de  $X$ .
- ii) Déterminer les sous-ensembles denses de  $X$ .

**Exercice 1.11.17.** Soit  $X$  un espace topologique muni de la topologie grossière.

- iii) Déterminer les fermés de  $X$ .
- iii) Déterminer l'adhérence de tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ .
- iii) Déterminer les sous-ensembles denses de  $X$ .

**Exercice 1.11.18.** Démontrer le théorème 2.4 : Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique est fermé ssi il contient chacun des ses points d'accumulation, c'est-à-dire si  $A' \subset A$ .

**Exercice 1.11.19.** Démontrer que si  $F$  est un fermé contenant un ensemble quelconque  $A$ , alors  $A' \subset F$ .

**Exercice 1.11.20.** Démontrer que  $A \cup A'$  est un fermé.

**Exercice 1.11.21.** Démontrer que  $\bar{A} = A \cup A'$ .

**Exercice 1.11.22.** Démontrer que si  $A \subset B$  alors  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

**Exercice 1.11.23.** Démontrer que  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

**Exercice 1.11.24.** Démontrer que

1.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ;
2.  $A \subset \bar{A}$ ;
3.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
4.  $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ .

## Sur l'intérieur, extérieur et frontière

**Exercice 1.11.25.** Considérons la topologie suivante

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

1. Trouver les points intérieurs du sous-ensemble  $A = \{a, b, c\}$  de  $X$ .
2. Trouver les points extérieurs de  $A$ .
3. Trouver les points frontières de  $A$ .

**Exercice 1.11.26.** Démontrer que l'intérieur d'un ensemble  $A$  est égal à la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$ . De plus :

1.  $A^\circ$  est ouvert;

2.  $A^\circ$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ , c'est-à-dire si  $G$  est un ouvert contenu dans  $A$  alors  $G \subset A^\circ \subset A$ ;
3.  $A$  est ouvert ssi  $A = A^\circ$ .

**Exercice 1.11.27.** Soit  $A$  est sous-ensemble propre non vide d'un espace topologique  $X$  muni de la topologie grossière. Trouver l'intérieur, l'extérieur et la frontière de  $A$ .

**Exercice 1.11.28.** Soit  $\tau$  la topologie sur  $\mathbb{R}$  formée de  $\mathbb{R}$ ,  $\emptyset$  et de tous les intervalles infinis ouverts  $E_a = [a, \infty[$  où  $a \in \mathbb{R}$ . Trouver l'intérieur, l'extérieur et la frontière de l'intervalle infini fermé  $A = [7, \infty[$ .

**Exercice 1.11.29.** Démontrer que :  $\bar{A} = \text{int}(A) \cup b(A)$ .

**Exercice 1.11.30.** Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que l'application  $f$  qui à tout ensemble associe son intérieur, c'est-à-dire que  $f(A) = \text{int}(A)$ , ne commute pas avec la fonction  $g$  qui associe à chaque ensemble son adhérence, c'est-à-dire  $g(A) = \bar{A}$ .

### 1.11.1 Sur voisinages et systèmes de voisinages

**Exercice 1.11.31.** Considérons la topologie  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$  sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Déterminer les voisinages

1. du point  $e$ ;
2. du point  $c$ .

**Exercice 1.11.32.** Déterminer le système de voisinage d'un point  $p$  quelconque d'un espace topologique muni de la topologie grossière.

**Exercice 1.11.33.** Démontrer que l'intersection  $N \cap M$  de deux voisinages quelconques  $N$  et  $M$  d'un point  $p$  est également un voisinage de  $p$ .

**Exercice 1.11.34.** Démontrer que tout ensemble  $M$  contenant  $N$  d'un point  $p$  est également un voisinage de  $p$ .

**Exercice 1.11.35.** Indiquer si chacun des intervalles suivants est ou non un voisinage de 0 pour  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle  $\mathbb{R}$ .

1.  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ;
2.  $] -1, 0]$ ;
3.  $[0, \frac{1}{2}[$ ;
4.  $]0, 1]$ .

**Exercice 1.11.36.** Démontrer qu'un ensemble  $G$  est ouvert ssi il est voisinage de chacun des ses points.

**Exercice 1.11.37.** Soit  $\mathcal{N}_p$  le système de voisinage d'un point  $p$  dans un espace topologique  $X$ . Montrer que :

1.  $\mathcal{N}_p$  est non vide et  $p$  appartient à chaque élément de  $\mathcal{N}_p$ .
2. L'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{N}_p$  appartient à  $\mathcal{N}_p$ .
3. Tout ensemble contenant un élément de  $\mathcal{N}_p$  appartient à  $\mathcal{N}_p$ .
4. Chaque élément  $N \in \mathcal{N}_p$  contient un élément  $G \in \mathcal{N}_p$  ou  $G$  est voisinage de chacun de ses points.

### 1.11.2 Sur la topologie induite

**Exercice 1.11.38.** Déterminer la topologie induite sur  $\mathbb{N}$  par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.11.39.** Considérons sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  la topologie

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

Déterminer les éléments de la topologie  $\tau_A$  induite sur  $A = \{a, c, e\}$ .

**Exercice 1.11.40.** Considérons la topologie usuelle  $\mathcal{U}$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$ . Décrire la topologie  $\mathcal{U}_{\mathbb{N}}$  induite sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers positifs.

**Exercice 1.11.41.** Soit  $A$  un ensemble  $\tau$ -ouvert de  $(X, \tau)$  et soit  $A \subset Y \subset X$ . Montrer que  $A$  est également ouvert pour la topologie induite sur  $Y$ , c'est-à-dire que  $A$  est une partie  $\tau_Y$ -ouvert de  $Y$ .

**Exercice 1.11.42.** Considérons la topologie usuelle  $\mathcal{U}$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$ . Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants de  $I = [0, 1]$  sont ouverts relativement à  $I$  ou non, c'est-à-dire  $\tau_I$  ouvert :

1.  $] \frac{1}{2}, 1 ]$  ;
2.  $] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} [$  ;
3.  $] 0, \frac{1}{2} ]$ .

**Exercice 1.11.43.** Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $(X, \tau)$ . Montrer que la topologie induite  $\tau_A$  est bien définie. En d'autres termes montrer que  $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$  est une topologie sur  $A$ .

**Exercice 1.11.44.** Soit  $(X, \tau)$  un sous-espace de  $(Y, \tau^*)$  et soit  $(Y, \tau^*)$  un sous-espace de  $(Z, \tau^{**})$ . Montrer que  $(X, \tau)$  est également un sous-espace de  $(Z, \tau^{**})$ .

---

# APPLICATIONS CONTINUES

---

Chaque fois que l'on étudie une structure sur un ensemble, il est naturel de savoir quelles sont les applications qui conservent cette structure. Les applications continues jouent un rôle important en Topologie. Dans ce chapitre, nous étudions des applications continues en général et nous allons terminer par des cas particuliers des applications continues à savoir les homéomorphismes.

## 2.1 Rappels

Avant d'aborder les applications continues, rapellons d'abord quelques propriétés des applications entre ensembles

**Définition 2.1.1.** Si  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ , on appelle *image directe* de  $A$  par  $f$  l'ensemble

$$f(A) := \{f(x) \in Y; x \in A\}$$

et on appelle *image réciproque* de  $B$  par  $f$  l'ensemble

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application;  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $X$  et  $(B_j)_{j \in J}$  une famille de sous-ensembles de  $Y$ . On a les propriétés suivantes

1.  $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$ .
  2.  $f(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} f(A_i)$ , avec l'égalité si  $f$  est injective.
  3.  $f^{-1}(\cup_{j \in J} B_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ .
  4.  $f^{-1}(\cap_{j \in J} B_j) = \cap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ .
  5.  $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ .
  6.  $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ ; avec égalité si  $f$  est injective.
  7.  $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ ; avec égalité si  $f$  est surjective.
  8.  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$ .
  9.  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .
-

## 2.2 Applications continues

### 2.2.1 Continuité en un point

**Définition 2.2.1.** Une application  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$  est continue en  $p \in X$  si l'image réciproque  $f^{-1}[H]$  de tout ouvert  $H \subset Y$  contenant  $f(p)$  contient un ouvert  $G \subset X$  contenant  $p$  ou, ce qui revient au même, si l'image réciproque de tout voisinage de  $f(p)$  est un voisinage de  $p$ , i.e.,

$$V \in \mathcal{V}_{f(p)} \Rightarrow f^{-1}[V] \in \mathcal{V}_p$$

Remarquons que, pour la topologie usuelle sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ , cette définition coïncide avec la définition par  $\varepsilon$  et  $\delta$  de la continuité en un point pour les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 2.2.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si elle est continue en tout point de  $X$ .

**Théorème 2.2.1.** Soient  $(X, \tau)$  et  $(Y, \tau^*)$  deux espaces topologiques. Une application  $f$  de  $X$  dans  $Y$  est continue relativement à  $\tau$  et  $\tau^*$ , ou simplement continue ssi l'image réciproque  $f^{-1}[H]$  de tout ouvert pour  $\tau^*$  de  $Y$  est un ouvert pour  $\tau$  de  $X$ , i.e ssi

$$G \in \tau^* \quad \text{implique} \quad f^{-1}[G] \in \tau$$

On écrira  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$  pour désigner une application de  $X$  dans  $Y$  quand il y a lieu d'indiquer les topologies mises en jeu.

**Exemple 2.2.1.** Considérons les topologies suivantes  $X = \{a, b, c, d\}$  et de  $Y = \{x, y, z, w\}$  :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \tau^* = \{Y, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$$

Considérons également les applications  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  définies par les schémas ci-dessous :

L'application  $f$  est continue puisque l'image réciproque de chaque élément de la topologie  $\tau^*$  sur  $Y$  est un élément de la topologie  $\tau$  sur  $X$ . L'application  $g$  n'est pas continue puisque  $\{y, z, w\} \in \tau^*$ , i.e est un ouvert de  $Y$ , alors que son image réciproque  $g^{-1}[y, z, w] = \{c, d\}$  n'est pas un ouvert de  $X$ , i.e n'appartient pas à  $\tau$ .

**Exemple 2.2.2.** *Considérons un espace discret quelconque  $(X, \tau_d$  et un espace topologique  $(Y, \tau)$  quelconque. Alors toute application  $f : X \rightarrow Y$ , est continue relativement à  $\tau_d$  et  $\tau$ . Car si  $G$  est un ouvert quelconque de  $Y$  son image réciproque  $f^{-1}[G]$  est un ouvert de  $X$  puisque toute partie d'un espace discret est un ouvert.*

**Exemple 2.2.3.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  où  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques et soit  $\beta$  une base de la topologie de  $Y$ . Supposons que pour tout élément  $B \in \beta$ ,  $f^{-1}[B]$  soit un ouvert de  $X$ , alors  $H = \cup_i B_i$ , une réunion d'éléments de  $\beta$ . Or*

$$f^{-1}[H] = f^{-1}[\cup_i B_i] = \cup_i f^{-1}[B_i]$$

*et chaque  $f^{-1}[B_i]$  est ouvert par hypothèse. Ainsi  $f^{-1}[H]$  est réunion d'ouverts et donc un ouvert. Par conséquent  $f$  est continue.*

Nous allons énoncer de façon plus formelle le résultat de l'exemple précédent.

**Proposition 2.2.1.** *Une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi l'image réciproque de tout élément d'une base de  $Y$  est un ouvert de  $X$ .*

On peut caractériser les applications continues à l'aide des sous-bases :

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $\delta$  une sous-base d'un espace topologique  $Y$ . Alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi l'image réciproque de tout élément de  $\delta$  est un ouvert de  $X$ .*

**Exemple 2.2.4.** *Les projections du plan  $\mathbb{R}^2$  sur la droite  $\mathbb{R}$  sont toutes les deux continues relativement aux topologies usuelles. Considérons par exemple la projection  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\pi(\langle x, y \rangle) = y$ . Alors l'image réciproque d'un intervalle ouvert quelconque  $]a, b[$  est une bande ouverte infinie donc ouverte. Ainsi l'image réciproque de tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et donc  $\pi$  est continue.*

Les applications continues peuvent être caractérisées par leur comportement vis-à-vis des ensembles fermés.

**Théorème 2.2.3.** *Une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi l'image réciproque de tout ensemble fermé de  $Y$  est un fermé de  $X$ .*

*Démonstration.* Exercice □

## 2.2.2 Applications continues et proximité arbitraire

**Définition 2.2.3.** *Soit  $X$  un espace topologique. Un point  $p \in X$  est dit **arbitrairement proche** d'un ensemble  $A \subset X$  si*

- (i) soit  $p \in A$
- (ii) soit  $p$  un point d'accumulation de  $A$ .

On rappelle que  $\bar{A} = A \cup A'$ , ainsi l'adhérence de  $A$  est constituée précisément par les points de  $X$  qui sont arbitrairement proches de  $A$ . On rappelle également que

$$\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$$

Ainsi  $p$  est arbitrairement proche de  $A$  si  $p$  est soit un point intérieur soit un point de la frontière de  $A$ . Les applications continues peuvent également être caractérisées comme étant les applications qui conservent la proximité arbitraire, à savoir :

**Théorème 2.2.4.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi pour tout  $p \in X$  et tout  $A \subset X$ ,  $p$  est arbitrairement proche de  $A \Rightarrow f(p)$  arbitrairement proche de  $f[A]$  ou

$$p \in \overline{A} \Rightarrow f(p) \in \overline{f(A)}$$

ou

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

*Démonstration.* Exercice en TD □

### 2.2.3 Continuité séquentielle en un point

**Définition 2.2.4.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est *séquentiellement continue* en un point  $p \in X$  ssi pour toute suite  $\langle a_n \rangle$  de  $X$  convergeant vers  $p$ , la suite  $\langle f(a_n) \rangle$  converge vers  $f(p)$ , i.e

$$a_n \rightarrow p \quad \text{implique} \quad f(a_n) \rightarrow f(p)$$

La continuité séquentielle et la continuité en un point sont reliées de la façon suivante :

**Proposition 2.2.2.** Si une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $p \in X$ , alors elle est séquentiellement continue en  $p$ .

**Remarque 2.2.1.** La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. Considérons par exemple la topologie  $\tau$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$  formée de  $\emptyset$  et des complémentaires des ensembles dénombrables. On rappelle qu'une suite  $\langle a_n \rangle$  converge vers  $p$  ssi elle est de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n, p, p, p, \dots \rangle$$

Alors pour toute application  $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (X, \tau^*)$ ,

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), f(p), f(p), f(p), \dots \rangle$$

converge vers  $f(p)$ . En d'autres termes, toute application définie sur  $(\mathbb{R}, \tau)$  est séquentiellement continue. Réciproquement, la fonction  $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$  définie par  $f(x) = x$ , i.e la fonction identique, n'est pas continue relativement à  $\tau$  et  $\mathcal{U}$  puisque  $f^{-1}(]0, 1[) = ]0, 1[$  n'est pas un ouvert pour  $\tau$  de  $\mathbb{R}$ .

Les caractérisations des applications continues sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.5.** Soient  $(X, T)$  et  $(Y, T')$  deux espaces topologiques et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application  $f$  est continue ;
2. Pour tout  $\omega' \in T'$ , on a  $f^{-1}(\omega') \in T$  ;
3. Pour tout fermé  $F$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $X$  ;
4. Si  $\beta'$  est une base de  $T'$ , alors pour tout  $\omega' \in \beta'$ , on a  $f^{-1}(\omega') \in T$  ;
5. Si  $A$  est une partie non vide de  $X$  alors  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

*Démonstration.* [5] □

- Exemple 2.2.5.**
1. On retrouve évidemment toutes les fonctions continues au sens classique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , ou de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , telles que  $x \mapsto x^2$ ,  $\sin(x)$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .
  2. Si  $X$  est muni de la topologie discrète, toute application  $f : X \rightarrow Y$  est continue.
  3. Si  $Y$  est muni de la topologie grossière, toute application  $f : X \rightarrow Y$  est continue.
  4. Une application constante  $f : X \rightarrow Y$  est toujours continue : si  $f(X) = y_0$ ,  $f^{-1}(V)$  est soit  $X$ , si  $y_0 \in V$ , soit vide, si  $y_0 \notin V$ .
  5. La continuité d'une application dépend des topologies que l'on considère. Par exemple, soit  $X = \{0, 1\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$ . L'application identité  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$  est évidemment continue, alors que la même application, mais avec des topologies différentes  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$  n'est pas continue au point 1, car  $id^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ , qui n'est pas ouvert pour  $\tau_1$  ; par contre, elle est continue au point 0.

**Remarque 2.2.2.** En général, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert. Par exemple, prenons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  ; alors  $f(]-1, 1]) = [0, 1[$ , qui n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ .

## 2.3 Applications ouvertes et applications fermées

Une application continue a la propriété que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert et que l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Il est alors naturel de se proposer d'étudier les applications suivantes :

- Définition 2.3.1.**
1. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite **ouverte** si l'image de tout ouvert est un ouvert.
  2. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite **fermée** si l'image de tout fermé est un fermé.

En général, les applications qui sont ouvertes ne sont pas nécessairement fermées et vice-versa. D'ailleurs l'application de notre premier exemple est ouverte et continue mais non fermée.

**Exemple 2.3.1.** Considérons  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  du plan  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe  $(ox)$ , i.e  $\pi(\langle x, y \rangle) = x$ . Remarquons que la projection  $\pi[D]$  de tout disque ouvert  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un intervalle ouvert. Ainsi tout point  $\pi(p)$  de l'image  $\pi[G]$  d'un ouvert  $G \subset \mathbb{R}^2$  appartient à un intervalle ouvert contenu dans  $\pi[G]$ , i.e que  $\pi[G]$  est ouvert. Par conséquent  $\pi$  est une application ouverte. Par ailleurs  $\pi$  n'est pas une application fermée, car l'ensemble  $A = \{\langle x, y \rangle : xy \geq 1, x > 0\}$  est fermé alors que sa projection  $\pi[A] = ]0, \infty[$  n'est pas fermée. (Faire la figure).

**Proposition 2.3.1.** *Soient  $(X, T)$ ,  $(Y, T')$  et  $(Z, T'')$  des espaces topologiques. Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des applications continues, alors  $g \circ f$  est une application continue.*

*Démonstration.* Exercice □

## 2.4 Homéomorphismes

Un espace topologique  $(X, \tau)$  est, comme on l'a vu, la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une famille distinguée  $\tau$  de parties de  $X$  vérifiant certains atomes. Pour deux espaces tels que  $(X, \tau)$  et  $(Y, \tau^*)$  il existe plusieurs applications  $f : X \rightarrow Y$ . Nous avons préféré d'étudier les fonctions continues ou ouvertes ou fermées plutôt que des applications arbitraires puisque ce sont ces fonctions qui conservent certains aspects de la structure des espaces  $(X, \tau)$  et  $(Y, \tau^*)$ .

**Définition 2.4.1.** *Soient  $(X, T)$  et  $(Y, T')$  deux espaces topologiques. Un homéomorphisme de  $X$  dans  $Y$  est une application bijective de  $X$  dans  $Y$ , continue et d'inverse continue.*

S'il existe un homéomorphisme entre  $(X, T)$  et  $(Y, T')$ , ces espaces sont dit **homéomorphes** ou **topologiquement équivalents**. Il s'agit d'une relation d'équivalence entre espaces topologiques.

Quand des espaces sont homéomorphes, rien ne permet de les distinguer d'un point de vue topologique, et on les considérera donc comme égaux. Il est aussi important de noter que les notions que nous introduirons dans les chapitres suivants seront des notions purement topologiques seulement si elles sont préservées par homéomorphisme. Il sera donc important de prouver que c'est le cas.

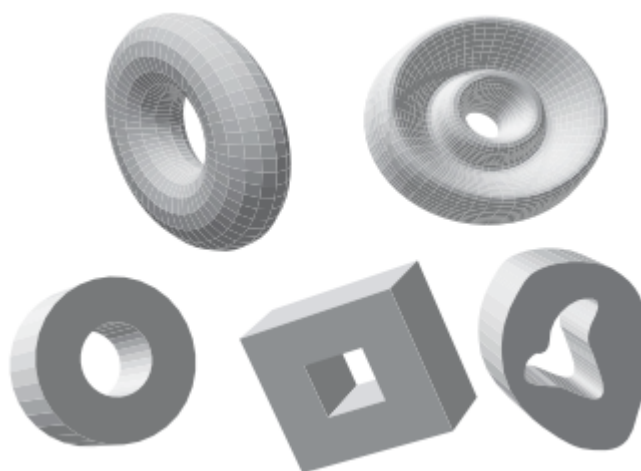


FIGURE 2.1 – Espaces homéomorphes

**Définition 2.4.2.** *Une application  $f$  est dite bicontinue si  $f$  est ouverte et continue. Alors  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme ssi  $f$  est bicontinue et bijective.*

**Exemple 2.4.1.** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

est continue et bijective de réciproque

$$f(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

De plus son application réciproque  $f^{-1}$  est également continue. Ainsi la droite réelle  $\mathbb{R}$  et l'intervalle ouvert  $] - 1, 1[$  sont homéomorphes.

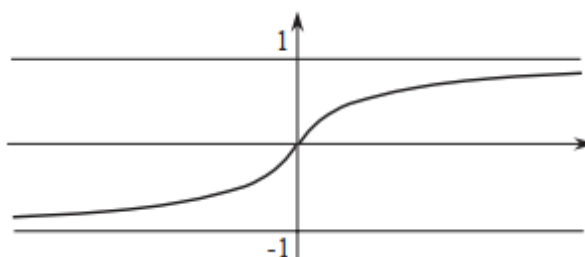


FIGURE 2.2 – homéo entre  $I$  et  $\mathbb{R}$

**Exemple 2.4.2.** Les ensembles  $\mathbb{C}$  et le disque unité ouvert  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  sont homéomorphes. Considérer l'application

$$f(z) = \frac{z}{1 + |z|}$$

qui est continue et de réciproque

$$g(z') = \frac{z'}{1 - |z'|}$$

qui est elle aussi continue.

**Exemple 2.4.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces discrets. Comme on l'a déjà vu, toutes les applications de l'un dans l'autre sont continues. Ainsi  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes ssi il existe une application bijective de l'un dans l'autre, c-à-d ssi leur cardinal est le même.

**Remarque 2.4.1.** La relation définie sur toute famille d'espaces topologiques par " $X$  est homéomorphe à  $Y$ " est une relation d'équivalence.

Ainsi d'après le théorème fondamental sur les relations d'équivalence, sur toute famille d'espaces topologiques, il existe une partition en classes d'espaces topologiquement équivalents. Les homéomorphismes ont les propriétés suivantes :

**Propriété 2.4.1.** Si  $f$  est un homéomorphisme alors  $f^{-1}$  est un homéomorphisme.

**Propriété 2.4.2.** Un homéomorphisme est une application à la fois ouverte et fermée.

## 2.5 Propriétés topologiques

**Définition 2.5.1.** Une propriété  $P$  est dite **topologique** ou être un **invariant topologique** si toutes les fois qu'un espace topologique  $(X, \tau)$  à la propriété  $P$  alors tout espace homéomorphe à  $(X, \tau)$  a également la propriété  $P$ .

**Exemple 2.5.1.** La droite réelle  $\mathbb{R}$  est homeomorphe à l'intervalle ouvert  $X = ]-1, 1[$ . Ainsi la longueur n'est pas une propriété topologique puisque  $X$  et  $\mathbb{R}$  ont des longueurs différentes, de même la propriété d'être borné n'est pas une propriété topologique puisque  $X$  est borné mais que  $\mathbb{R}$  ne l'est pas.

**Exemple 2.5.2.** Soit  $X$  l'ensemble des reals positifs, c'est à dire  $X = ]0, \infty[$ . La fonction  $f : X \rightarrow X$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est un homeomorphisme de  $X$  dans  $X$ . Remarquons que la suite

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$$

correspond par l'homeomorphisme à la suite

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$$

La suite  $\langle a_n \rangle$  est une suite de cauchy; mais la suite  $\langle f(a_n) \rangle$  ne l'est pas. Ainsi la propriété pour une suite, d'être de cauchy, n'est pas une propriété topologique.

La plus grande partie de la topologie est consacrée à l'étude de conséquences de certaines propriétés topologique, comme la compacité et la connexité. En fait, de façon tout à fait formelle, la topologie est l'étude des invariants topologiques. Dans l'exemple suivant, on définit la connexité et on montre que c'est une propriété topologique.

**Exemple 2.5.3.** On sait que si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, où  $I$  est un intervalle, alors  $f(I)$  est un intervalle. Cela est dû au fait que  $I$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}$ . On peut donc generaliser aux espaces dits connexes lorsque  $f$  est un homéomorphisme.

Un espace topologique  $(X, \tau)$  est non connexe ssi  $X$  peut s'écrire comme la réunion de deux ouverts disjoints non vides, i.e  $X = G \cup H$  où  $G, H \in \tau$ ,  $G \cap H = \emptyset$  avec  $G, H \neq \emptyset$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme, alors  $X = G \cup H$  ssi  $Y = f[G] \cup f[H]$  et donc  $Y$  est non connexe ssi il en est de même pour  $X$ . L'espace  $(X, \tau)$  est alors connexe ssi il n'est pas non connexe. Ainsi donc la connexité est une propriété topologique.

### 2.5.1 Applications continues et séparation

**Proposition 2.5.1.** Soient  $x_1 \neq x_2 \in X$ . S'il existe une application  $f$  continue de  $X$  dans  $Y$  séparé telle que  $f(x_1) \neq f(x_2)$  alors  $X$  est séparé.

*Démonstration.* Comme  $Y$  est séparé, il existe deux ouverts  $V_1 \ni f(x_1)$  et  $V_2 \ni f(x_2)$  tel que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Ainsi  $U_1 = f^{-1}(V_1)$  et  $U_2 = f^{-1}(V_2)$  sont des ouverts contenant  $x_1$  et  $x_2$  respectivement car  $f$  est continue. On a alors

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset.$$

D'où  $X$  est séparé. □

**Corollaire 2.5.1.** 1. *S'il existe une injection continue  $i : A \rightarrow X$  avec  $X$  séparé, alors  $A$  est séparé.*

2. *Si  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes et si  $Y$  est séparé, alors  $X$  est séparé.*

**Remarque 2.5.1.** *L'image continue de  $X$  séparé n'est pas toujours séparée.*

*Démonstration.* Par contre exemple, considérons  $X = \mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle et  $Y = \mathbb{R}$  muni de la topologie grossière. Soit l'application  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $f(x) = x$ . Nous avons  $X$  séparé, mais  $Y$  est non séparé.  $\square$

**Théorème 2.5.1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues d'un espace topologique  $X$  dans  $Y$  séparé. L'ensemble  $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  est fermé dans  $X$ .*

*Démonstration.* Exercice  $\square$

## 2.6 Topologies induites par des applications

Soit  $(Y_i, \tau_i)$  une famille quelconque d'espace topologiques et pour chaque  $Y_i$  supposons que soit donnée une application  $f_i : X \rightarrow Y_i$  définie sur un certain ensemble non vide  $X$ . Nous allons étudier les topologies de  $X$  vis-a-vis desquelles toutes les fonctions  $f_i$  sont continues. Rappelons que  $f_i$  est continue pour une certaine topologie sur  $X$  si l'image réciproque de tout ouvert de  $Y_i$  est un ouvert de  $X$ . Ainsi nous sommes amenés à considérer la famille suivante de parties de  $X$  :

$$\delta = \cup_i \{f_i^{-1}[G] : G \in \tau_i\}$$

Donc  $\delta$  est constitué par les images réciproques de chaque ouvert de chaque espace  $Y_i$ . La topologie  $\tau$  sur  $X$  engendrée par  $\delta$  est appelée la *topologie induite* (ou engendrée) par les applications  $f_i$ . Les principales propriétés de  $\tau$  sont énumérées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.6.1.** (i) *Toutes les applications  $f_i$  sont continues pour  $\tau$ .*

(ii)  *$\tau$  est l'intersection de toutes les topologies sur  $X$  pour lesquelles les applications  $f_i$  sont continues.*

(iii)  *$\tau$  est la plus petite, c-à-d la moins fine, des topologies sur  $X$  pour lesquelles les applications  $f_i$  sont continues.*

(iv)  *$\delta$  est une sous-base pour la topologie  $\tau$ .*

Nous appellerons  $\delta$  la sous-base de définition de la topologie engendrée par les applications  $f_i$ , i.e la topologie la moins fine sur  $X$  pour laquelle les fonctions  $f_i$  soient continues.

### 2.6.1 Topologie initiale et topologie finale

L'application suivante est-elle continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1; \\ 2 & \text{si } x \neq 1? \end{cases}$$

Cette réponse dépend des topologies sur l'espace source  $\mathbb{R}$  (au départ) ou sur l'espace but  $\mathbb{R}$  (à l'arrivée). En effet, si on considère  $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_g)$ , l'application  $f$  est continue. Ceci reste vrai quelle que soit la topologie fixée sur l'espace source.

De la même manière, si on considère  $f : (\mathbb{R}, \tau_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ , cette application est continue, et ceci reste vrai quelle que soit la topologie que l'on considère sur l'espace but.

Dans cette section, nous allons considérer une application  $f : X \rightarrow Y$  et fixer une topologie sur l'un de ces deux espaces. Nous déterminerons ensuite la topologie sur l'autre qui rend l'application  $f$  continue et qui s'éloigne le plus des exemples triviaux cités plus haut. Cela donnera lieu aux concepts de topologie initiale et finale relative à  $f$ .

Outre la curiosité de rendre la fonction définie plus haut continue, ces notions vont nous permettre d'introduire simplement et d'obtenir des propriétés pour les sous-espaces topologiques et les produits d'espaces topologiques où la topologie sera définie comme une topologie initiale, et pour les espaces quotients, où la topologie est une topologie finale.

**Définition 2.6.1.** Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique,  $Y$  un ensemble et  $\varphi : (X, \tau) \rightarrow Y$  une application. On appelle **topologie finale** associée à  $\varphi$  l'unique topologie la plus fine sur  $Y$  qui rende l'application  $\varphi$  continue. Elle est notée  $\tau_\varphi$  ou  $\varphi(\tau)$  et définie par

$$\tau_\varphi = \{V \in \mathcal{P}(Y) : \varphi^{-1}(V) \in \tau\}$$

**Exercice 2.6.1.** Montrer que  $\tau_\varphi$  est bien une topologie et qu'elle est plus fine que toute autre topologie sur  $Y$ .

**Définition 2.6.2.** Soient  $(Y, \tau')$  un espace topologique,  $X$  un ensemble et  $\varphi : X \rightarrow (Y, \tau')$  une application. On appelle **topologie initiale** associée à  $\varphi$  l'unique topologie la moins fine sur  $X$  qui rende l'application  $\varphi$  continue. Elle est notée  $\varphi^{-1}(\tau')$  et définie par

$$\varphi^{-1}(\tau') = \{\varphi^{-1}(V) : V \in \tau'\}$$

**Exercice 2.6.2.** Montrer que  $\varphi^{-1}(\tau')$  est bien une topologie et qu'elle est moins fine que toute autre topologie sur  $X$ .

## 2.6.2 Topologie produit

Dans cette section,  $I$  désigne un ensemble d'indices, qui peut être soit fini, soit infini, dénombrable ou non. On se donne une famille d'espaces topologiques  $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ . Le produit cartésien des ensembles  $X_i$  est l'ensemble

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i, \forall i \in I\}$$

C'est donc l'ensemble de toutes les familles formées avec les éléments des ensembles  $X_i$ . Cette notion de produit a déjà été rencontrée, comme le montrent les deux exemples suivants.

**Exemple 2.6.1.** Si  $I$  est fini, disons  $I = \{1, \dots, p\}$ , alors le produit cartésien s'écrit

$$\prod_{i \in I} X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) : x_i \in X_i, \forall i \leq p\}$$

On peut garder cet exemple en tête, pour se faire une idée, mais il ne sera pas suffisant, comme nous allons le voir. Un deuxième exemple est donné par l'espace des suites à valeurs dans un ensemble.

**Exemple 2.6.2.** Soient  $I = \mathbb{N}$  (ou plus généralement un ensemble dénombrable) et  $X$  un ensemble. L'espace des suites d'éléments de  $X$  est

$$X^{\mathbb{N}} = \prod_{i=0}^{\infty} X_{(i)} = \{(x_m)_{m \in \mathbb{N}} : x_m \in X, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Il s'agit ici encore d'un exemple assez simple, puisqu'on a un ensemble d'indices bien connu, et qu'on peut encore écrire un produit infini dénombrable comme

$$X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_k \times \cdots$$

**Définition 2.6.3.** Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $k$ , soit la projection canonique de  $X$  sur  $X_i$ , i.e l'application  $\pi_i : X \rightarrow X_i, (x_1, x_2, \cdots, x_k) \mapsto x_i$ . On appelle **topologie produit** la topologie la moins fine sur  $X$  qui rendent les projections  $\pi_i$  continues. C'est la topologie initiale sur  $X$  associée aux projections  $\pi_i$ .

Les ouverts de cette topologie sont les produits les images réciproques par  $\pi_i$  des ouverts  $U_i$  des  $X_i$  i.e

$$\tau_{\pi} := \{\prod_{i=1}^k U_i, U_i \in \tau_i\}$$

## 2.7 Topologie quotient

### 2.7.1 Rappels sur les espaces quotient

**Définition 2.7.1.** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On définit le quotient  $X/\mathcal{R}$  de  $X$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  comme l'ensemble des classes d'équivalence.

L'application  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ , qui à  $x$  associe sa classe d'équivalence (souvent notée  $[x]$  ou  $\bar{x}$ ), est surjective ; elle est appelée projection canonique (ou application quotient). On note souvent  $x \sim y$  au lieu de  $x\mathcal{R}y$  et  $X/\sim$  à la place de  $X/\mathcal{R}$ .

**Exemple 2.7.1.** Par exemple, sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir la relation d'équivalence :  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$ . L'ensemble quotient est  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \sim$ , le tore de dimension  $n$ .

**Définition 2.7.2. (Le saturé d'une partie d'un ensemble).**

Soit  $A$  une partie de  $X$ , l'ensemble des points de  $X$  qui sont équivalents à un point de  $A$  est appelé le saturé de  $A$  pour la relation d'équivalence. Le saturé de  $A$  s'écrit alors  $\pi^{-1}(\pi(A))$  où  $\pi$  est la projection canonique de  $X$  sur  $X/\mathcal{R}$ .

**Définition 2.7.3.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est compatible avec la relation d'équivalence (ou passe au quotient) si elle est constante sur les classes d'équivalence i.e. on a  $f(x) = f(y)$  pour tout  $(x, y)$  élément de  $X \times X$  vérifiant  $x \sim y$ .

Parmi les exemples les plus fréquents des espaces quotients, on peut citer l'**action de groupe**.

**Définition 2.7.4.** Soit  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. Une **action** (à gauche) de  $G$  sur  $X$  est une application  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g.x$  telle que  $\forall x \in X, \forall g, h \in G, (gh).x = g(h.x)$  et  $e.x = x$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

On peut alors considérer la relation d'équivalence associée dont les classes d'équivalences sont les orbites de l'action de  $G$  :  $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$  tel que  $y = g.x$ . L'espace quotient est noté  $X/G$ .

**Exemple 2.7.2.** Par exemple,  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  le tore de dimension  $n$  est défini comme le quotient de  $\mathbb{R}^n$  par l'action par translations entière de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On a donc la relation d'équivalence :  $x \sim y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $y = x + m$ .

## 2.7.2 Topologie quotient

**Définition 2.7.5.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$  et  $\pi$  la surjection canonique de  $X$  sur  $X/\mathcal{R}$ . On appelle **topologie quotient** la topologie la plus fine sur  $X/\mathcal{R}$  qui rend la surjection canonique continue. C'est la topologie finale associée à la surjection canonique.

L'espace topologique  $(X/\mathcal{R}, \tau_\pi)$  est appelé espace topologique quotient de  $(X, \tau)$  par  $\mathcal{R}$ . La topologie quotient est donc définie par

$$\tau_\pi := \{U \subset X/\mathcal{R} : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$$

**Exercice 2.7.1.** Montrer que  $\tau_\pi$  est bien une topologie.

On déduit de la définition précédente que les ouverts de la topologie quotient sont les ensembles dont l'image inverse par  $\pi$  sont ouverts dans  $X$ . Il est important de pouvoir définir des applications continues sur un espace quotient  $X/\mathcal{R}$ . Elles peuvent toutes être définies comme induites par des applications continues sur l'espace  $X$ . C'est l'objet du théorème de factorisation suivant.

**Théorème 2.7.1.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $f$  est constante sur les classes d'équivalence (i.e.  $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$ ), alors il existe une unique application  $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  telle que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Réciproquement, toute application  $g : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  est obtenue de cette façon, de manière unique. L'application  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  est alors continue si, et seulement si,  $\tilde{f} : (X/\mathcal{R}, \pi(\tau)) \rightarrow (Y, \tau')$  l'est.

On a le diagramme commutatif :

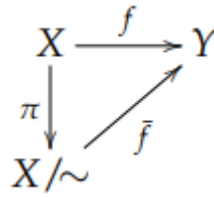


FIGURE 2.3 – Propriété de factorisation

*Démonstration.* [5] □

On dit que  $f$  se factorise à travers  $\pi$ , ou que  $f$  induit  $\tilde{f}$ . Cette propriété est notamment importante pour démontrer que certains espaces quotients sont séparés.

**Remarque 2.7.1.** *La difficulté de la topologie quotient provient du fait qu'elle n'est pas toujours séparée comme le montre le théorème suivant.*

**Théorème 2.7.2.** *Pour que l'espace quotient soit séparé, il faut que le graphe  $\Gamma$  de la relation  $\mathcal{R}$  soit fermé.*

*Démonstration.* □

**Théorème 2.7.3. (Propriétés fondamentales de la topologie quotient).** *Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$  ; on munit  $X/R$  de la topologie quotient. Alors :*

1. *La topologie quotient est la plus fine pour laquelle la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/R$  est continue ;*
2. *Soit  $Y$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow Y$  une application qui passe au quotient en  $\bar{f}$ . Alors  $f$  est continue  $\iff \bar{f}$  est continue.*
3. *Si l'application  $f$  est ouverte, alors  $\bar{f}$  est aussi ouverte. Si  $f$  est fermée, alors  $\bar{f}$  est aussi fermée.*

### 2.7.3 Exemples des espaces topologiques quotient

On donne dans la suite quelques exemples de la topologie quotient.

**Exemple 2.7.3.** *Sur  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , on considère la relation d'équivalence suivante :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 : y = \lambda x$$

"  $\sim$  " est une relation d'équivalence. (exercice).

On pose  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  l'ensemble des classes d'équivalence.  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  est appelé **espace projectif réel** de dimension  $n$ .

On note  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  l'application de passage au quotient. L'espace  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  est compacte en tant qu'image de  $\mathbb{S}^n$  par l'application continue  $\pi$ .

L'espace  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  peut être muni d'une topologie quotient :  $\forall i \leq i \leq i \leq n$ , on pose

$$U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i \neq 0\}$$

$U_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  car complémentaire de fermé  $(U_i' : \{(x_0, \dots, x_n)/x_i = 0\})$ . En effet, l'application

$$X_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

est continue. Alors  $X_i^{-1}\{0\}$  est fermé car  $\{0\}$  est fermé et  $X_i$  continue. Sur  $U_i$ , on définit les applications

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

où le signe  $\hat{\phantom{x}}$  signifie que le terme correspondant est omis. Ce sont des applications continues et  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$ .

D'après les propriétés de la topologie quotient,  $V_i = \varphi(U_i)$  est un ouvert de  $P^n\mathbb{R}$ , et  $\varphi$  passe au quotient et donne une application  $\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Explicitement,

$$\phi_i(p(x)) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

L'application réciproque est donnée par

$$\phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$$

ce qui montre que  $\phi_i$  est un homéomorphisme de  $V_i$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 2.7.4. Le tore  $\mathbb{T}^2$ .** Le tore  $\mathbb{T}^2$  peut être redéfini comme quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les identifications  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, t)$ . L'application

$$f : [0, 1] \times [0, 1]; f(s, t) = \left( (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \right)$$

induit un homéomorphisme de  $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$  sur  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Ceci permet de plonger  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

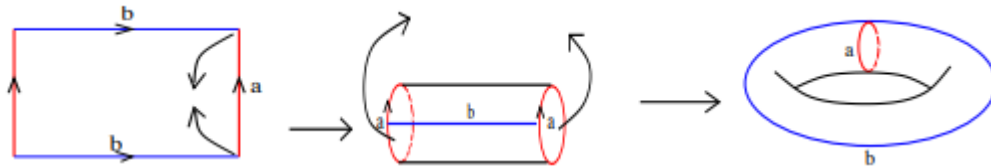


FIGURE 2.4 – Tore comme quotient

**Remarque 2.7.2.** On peut voir aussi  $\mathbb{T}^2$  comme une surface de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, c'est la surface

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} - (R - r)^2 + z^2 = r^2, \quad \text{où } R > r > 0\}$$

**Exemple 2.7.5. Le ruban de Möbius.** Le ruban de Möbius, est défini comme le quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par l'identification :  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ .

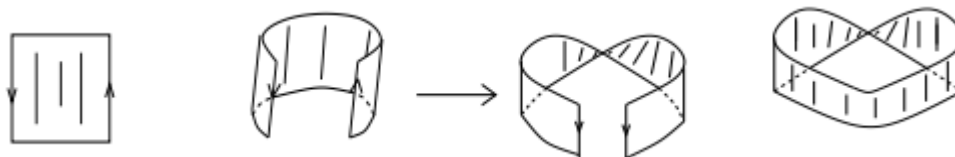


FIGURE 2.5 – Ruban de Möbius

**Exemple 2.7.6. La bouteille de Klein.** La bouteille de Klein, est définie comme le quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par l'identification  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ . Cette

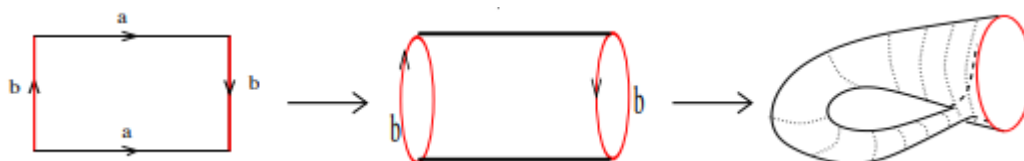


FIGURE 2.6 – Bouteille de Klein

surface ne peut pas être plongée dans  $\mathbb{R}^3$  mais dans  $\mathbb{R}^4$ .

## 2.8 Exercices

**Exercice 2.8.1.** A quelle condition une application  $f : X \rightarrow Y$  n'est-elle pas continue en un point  $p \in X$  ?

**Exercice 2.8.2.** Considérons la topologie suivante définie sur  $X = \{a, b, c, d\}$  :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$$

Soit l'application  $f : X \rightarrow X$  définie par le schéma ci-dessous :

1. Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $c$
2. Montrer que  $f$  est continue en  $d$ .

**Exercice 2.8.3.** Supposons qu'un singleton  $p$  soit un ouvert d'un espace topologique  $X$ . Montrer que pour tout espace topologique  $Y$  et pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  est continue en  $p \in X$ .

**Exercice 2.8.4.** Démontrer que si  $f : X \rightarrow Y$  la restriction de  $f$  à un sous-ensemble contenant  $p$  est également continue en  $p$ . Plus précisément, soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace topologique  $(X, \tau)$  tel que  $p \in A \subset X$  et soit  $f_A : A \rightarrow Y$  la restriction de  $f : X \rightarrow Y$  à  $A$ . Alors si  $f$  est continue pour  $\tau$  en  $p$ ,  $f_A$  est continue pour  $\tau_A$  en  $p$ .  $\tau_A$  est la topologie induite par  $\tau$  sur  $A$ .

**Exercice 2.8.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi elle est continue en tout point  $p \in X$

**Exercice 2.8.6.** Démontrer que si une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $p \in X$ , alors elle est séquentiellement continue en  $p$ , i.e  $a_n \rightarrow p \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(p)$ .

**Exercice 2.8.7.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application constante, admettons que  $f(x) = p \in Y$  pour tout  $x \in X$ . Démontrer que  $f$  est continue pour toute topologie  $\tau$  sur  $X$  et pour toute topologie  $\tau^*$  sur  $Y$ .

**Solution 2.8.1.** Nous devons montrer que l'image réciproque de tout ouvert pour  $\tau^*$  de  $Y$  est un ouvert de  $\tau$  de  $X$ . Soit  $\omega \in \tau^*$ . A present  $f(x) = p$  pour tout  $x \in X$ , donc

$$f^{-1}[G] = \begin{cases} X & \text{si } p \in G \\ \emptyset & \text{si } p \notin G \end{cases}$$

Dans l'un ou l'autre cas  $f^{-1}[G]$  est un ouvert de  $X$  puisque  $X$  et  $\emptyset$  appartiennent à toutes les topologies  $\tau$  sur  $X$ .

**Exercice 2.8.8.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application quelconque. Démontrer que si  $(Y, \tau_g)$  est un espace topologique muni de la topologie grossière,  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_g)$  est continue pour toute topologie  $\tau$ .

**Solution 2.8.2.** Nous voulons montrer que l'image réciproque de tout ouvert de  $Y$  est un ouvert de  $X$ . Puisque  $(Y, g)$  est un espace topologique muni de la topologie grossière,  $Y$  et  $\emptyset$  sont les seuls ouverts de  $Y$  or

$$f^{-1}[Y] = X, f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

et  $X$  et  $\emptyset$  appartiennent à toutes les topologies  $\tau$  sur  $X$ . Donc  $f$  est continue pour toute  $\tau$ .

**Exercice 2.8.9.** Supposons qu'une application  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  ne soit pas continue relativement à  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Montrer que si  $\tau_1^*$  est une topologie sur  $X$  moins fine que  $\tau_1$  et que  $\tau_2^*$  est une topologie de  $Y$  plus fine que  $\tau_2$ , i.e  $\tau_1^* \subset \tau_1$  et  $\tau_2^* \subset \tau_2$ , alors  $f$  n'est pas non plus continue relativement à  $\tau_1^*$  et  $\tau_2^*$ .

**Exercice 2.8.10.** Montrer que l'application identique  $i : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau^*)$  est continue ssi  $\tau$  est plus fine que  $\tau^*$ , i.e  $\tau^* \subset \tau$

**Exercice 2.8.11.** Soient les applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$ . Démontrer que l'application  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est également continue.

**Exercice 2.8.12.** Soient  $\tau_i$  une famille de topologies définies sur un ensemble  $X$ . Si une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue pour chaque  $\tau_i$ . Démontrer que  $f$  est continue pour la topologie intersection des  $\tau_i : \tau = \bigcap_i \tau_i$ .

**Exercice 2.8.13.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi l'image réciproque de tout fermé de  $Y$  est un fermé de  $X$ .

**Exercice 2.8.14.** Démontrer qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi pour toute partie  $A \subset X$ ,  $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ .

**Exercice 2.8.15.** Soit une application continue  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ . Démontrer que  $f : (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau^*)$  est continue, où  $A \subset X$  et  $f_A$  est la restriction de  $f$  à  $A$ .

**Exercice 2.8.16.** Donner un exemple d'une application réelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f$  soit continue et fermée mais non ouverte.

**Exercice 2.8.17.** Soit l'application réelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Montrer que  $f$  n'est pas ouverte.

**Exercice 2.8.18.** Montrer que l'intervalle fermé  $A = [a, b]$  est homéomorphe à l'intervalle unité  $I = [0, 1]$ .

**Solution 2.8.3.** L'application linéaire affine  $f : I \rightarrow A$  définie par  $f(x) = (b - a)x + a$  est bijective et bicontinue. Ainsi  $f$  est un homéomorphisme.

**Exercice 2.8.19.** Montrer que l'aire n'est pas une propriété topologique.

**Exercice 2.8.20.** Soit  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$  une application injective et ouverte, soit  $A \subset X$  et supposons que  $f[A] = B$ . Montrer que l'application  $f_A : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B^*)$  est également injective et ouverte. Ici  $f_A$  désigne la restriction de  $f$  à  $A$ , et  $\tau_A$  et  $\tau_B^*$  désignent les topologies induites.

**Exercice 2.8.21.** Soit  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$  un homéomorphisme et soit  $(A, \tau_A)$  un sous-espace quelconque de  $(X, \tau)$ . Montrer que  $f_A : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B^*)$  est également un homéomorphisme ou  $f_A$  est la restriction de  $f$  à  $A$ ,  $f[A] = B$ , et  $\tau_B^*$  est la topologie induite sur  $B$ .

---

# ESPACES COMPACTS

---

Le terme de compacité évoque une idée de petitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part. On verra aussi que les parties compactes de  $\mathbb{R}$  sont les parties fermées bornées. En fait de petitesse, les compacts sont définis par une propriété de finitude topologique. L'importance de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas.

La compacité est une notion qui, tout comme la complétude, nous permettra de nous assurer de l'existence de certains objets mathématiques. Elle permettra ainsi de prédire l'existence de la limite pour certaines suites ou l'existence des extremums pour une fonction numérique. Elle servira, d'autre part, à se ramener, partant d'une situation présentant "un caractère infini" à une situation "finie" et exploitable. Les espaces compacts sont une généralisation, dans le cadre des espaces topologiques, de la notion d'intervalle fermé et borné de  $\mathbb{R}$ .

## 3.1 Notion de recouvrements

**Définition 3.1.1.** Une famille  $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$  d'ouverts d'un espace topologique  $X$  est un recouvrement ouvert de  $X$  si  $X = \cup_{i \in I} U_i$ .

Un sous-recouvrement de  $\mathcal{U}$  est un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{U}$  qui recouvrent  $X$  i.e tel que  $X = \cup_{i=1}^n U_i$ .

**Exemple 3.1.1.** Considérons la famille  $\mathcal{A} = \{\mathbb{D}_p : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{D}_p$  est un disque ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$  de rayon 1 et de centre  $p = (m, n)$ ,  $m$  et  $n$  étant des entiers relatifs. Alors  $\mathcal{A}$  est un recouvrement de  $\mathbb{R}^2$  appartenant à l'un au moins des éléments de  $\mathcal{A}$ . Par contre ; la famille des disques ouverts  $\mathcal{B} = \{\mathbb{D}_p^* : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{D}_p^*$  a pour centre  $p$  et pour rayon  $\frac{1}{2}$  ne constitue pas un recouvrement de  $\mathbb{R}^2$ . Par exemple, le point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  n'appartient à aucun élément de  $\mathcal{B}$ , comme on l'a indiqué sur la figure.

---

## 3.2 Espaces compacts

La notion de compacité est sans aucun doute motivée par la propriété de l'intervalle fermé borné telle qu'elle a été énoncée dans le théorème classique de Heine-Borel. A savoir :

**Théorème 3.2.1.** *De tout recouvrement ouvert d'un intervalle fermé borné  $A = [a, b]$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

On a alors la définition

**Définition 3.2.1.** *Un espace topologique  $X$  est compacte s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue i.e si de tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini (condition de compacité) ce qui équivaut à*

$$X = \cup_{i \in I} U_i \implies \exists n \in \mathbb{N} : X = \cup_{i=1}^n U_i$$

Dans la pratique, on se trouve souvent dans la situation où  $X$  est un sous-espace d'un espace  $Y$ , et que le recouvrement de  $X$  est donné par une famille  $\{V_i\}_{i \in I}$  d'ouverts de  $Y$ ; strictement parlant, le recouvrement de  $X$  est la famille  $\{V_i \cap X\}_{i \in I}$ . La condition de compacité de  $X$  s'exprime alors en disant qu'il existe  $J \subset I$  fini tel que  $X \subseteq \cup_{i \in J} V_i$ .

**Définition 3.2.2.** *Soit  $\mathcal{A} = \{G_i\}$  une famille de parties de  $X$  telle que  $A \subseteq \cup_i G_i$  pour un certain  $A \subset X$ . La famille  $\mathcal{A}$  est alors appelée un **recouvrement** de  $A$  et on parle de **recouvrement ouvert** si chacun des  $G_i$  est ouvert. En outre, si une sous-famille finie de  $\mathcal{A}$  est également un recouvrement de  $A$ , i.e si*

$$\exists G_{i_1}, \dots, G_{i_m} \in \mathcal{A}$$

tels que

$$A \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

alors on dit qu'on peut **extraire de  $\mathcal{A}$  un sous-recouvrement fini** ou que  $\mathcal{A}$  contient un **sous-recouvrement fini**.

Ainsi donc une partie  $A$  d'un espace topologique  $X$  est compacte si de tout recouvrement ouvert de  $A$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si  $A$  est compacte et  $A \subseteq \cup_i G_i$ , où les  $G_i$  sont des ouverts, alors on peut choisir un nombre fini d'ouverts, admettons que ce soient  $G_{i_1}, \dots, G_{i_m}$ , de sorte que  $A \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$ .

**Exemple 3.2.1.** *D'après le théorème de Heine-Borel, tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$  est compact.*

**Exemple 3.2.2.** *Soit  $A$  une partie finie quelconque d'un espace topologique  $X$ , par exemple  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Alors  $A$  est nécessairement compacte. En effet si  $\mathcal{G} = \{G_i\}$  est un recouvrement ouvert de  $A$ , alors chaque point de  $A$  appartient à l'un des éléments de  $\mathcal{G}$ , par exemple  $a_1 \in G_{i_1}, \dots, a_m \in G_{i_m}$ . Par conséquent,*

$$A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

**Remarque 3.2.1.** *Puisque un ensemble  $A$  est compact, ssi tout recouvrement ouvert de  $A$  contient un sous-recouvrement fini, il nous suffit d'exhiber un recouvrement ouvert de  $A$  dont aucun sous-recouvrement n'est fini pour montrer que  $A$  n'est pas compact.*

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $A$  une partie d'un espace topologique  $(X, \tau)$ . Alors  $A$  est compacte pour  $\tau$  ssi  $A$  est compacte pour la topologie induite  $\tau_A$  sur  $A$ .*

Par conséquent on peut souvent limiter notre étude de la compacité aux espaces topologiques qui sont eux-mêmes compacts, c'est-à-dire aux *espaces compacts*.

**Remarque 3.2.2.** *Un sous-ensemble d'un espace compact n'est pas nécessairement compact.*

Par exemple, l'intervalle unité fermé  $[0, 1]$  est compact d'après le théorème de Heine-Borel mais l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  est un sous-ensemble de  $[0, 1]$  n'est pas compact. Nous avons cependant le théorème suivant :

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $F$  un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact  $X$ . Alors  $F$  est également compact.*

*Démonstration.* Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $F$  i.e une famille d'ouverts de  $X$  tel que  $F \subset \cup_{i \in I} U_i$ . Comme  $F \subset X$  est fermé,  $X - F \subset X$  est un ouvert ; et par conséquent

$$\{U_i\}_{i \in I} \cup \{X - F\}$$

est un recouvrement ouvert de  $X$ . Comme  $X$  est alors compact, il existe  $i_1, \dots, i_m \in I$  tels que

$$X = (X - F) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$$

Comme  $F$  et  $X - F$  sont disjoints, cela implique que  $F \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$ . On a donc trouvé un sous recouvrement fini de  $F$ . Ce qui fait que  $F$  est compact.  $\square$

La proposition suivante, dite propriété d'intersection finie, caractérise les espaces topologiques compacts

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $X$  un espace topologique séparé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *De tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un recouvrement fini.*
2. *Pour toute suite de fermés  $(F_i)_{i \in I}$  de  $X$  d'intersection vide i.e  $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$ , il existe  $n \in \mathbb{N} : \cap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ .*
3. *Si  $\mathcal{F}$  est une famille de fermés dont toutes les sous familles finies sont d'intersection non vide, alors  $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $X$  est compact et montrons que pour toute suite de fermés d'intersection vide, on peut extraire une suite finie de fermés d'intersection vide. Partons de

$$X = \cup_{i \in I} u_i \implies \exists n \in \mathbb{N} : X = \cup_{i=1}^n u_i$$

Par passage au complémentaire, on a :

$$X^c = \emptyset = (\cup_{i \in I} u_i)^c \implies \exists n \in \mathbb{N} : X^c = \emptyset = (\cup_{i=1}^n u_i)^c$$

D'après les lois de De Morgan, on a :

$$\emptyset = \cap_{i \in I} u_i^c \implies \exists n \in \mathbb{N} : \emptyset = \cap_{i=1}^n u_i^c$$

Comme  $u_i$  sont des ouverts, alors les  $u_i^c$  sont des fermés. D'où

$$\emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i \implies \exists n \in \mathbb{N} : \emptyset = \bigcap_{i=1}^n F_i$$

La réciproque se démontre de la même manière.  $\square$

Le résultat suivant est une conséquence utile dans le cas où les fermés sont emboîtés.

**Proposition 3.2.2.** *Si  $(X, \tau)$  est un espace compact, toute suite décroissante de fermés non vides,  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $F_{n+1} \subset F_n$ ,  $F_n \neq \emptyset$  a une intersection non vide.*

*Démonstration.* Par contraposée, si  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ , il existe  $n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  tel que

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_N} = \emptyset$$

Dans ce cas,

$$F_{\max\{n_1, n_2, \dots, n_N\}} = F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_N} = \emptyset,$$

ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

**Exemple 3.2.3.** *Si  $E$  est un ensemble fini, muni de sa topologie discrète, alors l'espace topologique  $E$  est compact. En effet,  $E$  est bien séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (puisque'il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts de  $E$ , étant donné que  $E$  est fini).*

**Exemple 3.2.4.** *L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , muni de sa topologie usuelle, n'est pas compact. En effet, la famille  $(]-n, n[)_{n \in \mathbb{N}_0}$  constitue bien un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}$  mais on ne peut extraire d'elle aucun sous-recouvrement fini car toute réunion finie d'intervalles ayant la forme  $]-n, n[$  avec  $n \in \mathbb{N}_0$  donne un ensemble borné de  $\mathbb{R}$  et ne peut donc être égale à  $\mathbb{R}$ .*

**Exemple 3.2.5.** *L'intervalle ouvert  $A = ]0, 1[$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie usuelle n'est compact. Considérons par exemple la famille des intervalles ouverts*

$$\mathcal{G} = \left\{ \left] \frac{1}{3}, 1[ , \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2}[ , \left] \frac{1}{5}, \frac{1}{3}[ , \left] \frac{1}{6}, \frac{1}{4}[ , \dots \right\}.$$

*Remarquons que  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  où  $G_n = \left( \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right)$ ; ainsi  $\mathcal{G}$  est un recouvrement ouvert de  $A$ . Faire la figure*

*Mais  $\mathcal{G}$  ne contient pas de sous-recouvrement fini. En effet, soit*

$$\mathcal{G}^* = \left\{ \left] a_1, b_1[ , \left] a_2, b_2[ , \dots , \left] a_m, b_m[ \right\}$$

*une sous-famille finie quelconque de  $\mathcal{G}$ . Si  $\epsilon = \min(a_1, \dots, a_m)$  alors  $\epsilon > 0$  et*

$$\left] a_1, b_1[ \cup \dots \cup \left] a_m, b_m[ \subset ]\epsilon, 1[.$$

*Or  $]0, \epsilon]$  et  $]\epsilon, 1[$  sont disjoints; ainsi  $\mathcal{G}^*$  n'est pas un recouvrement de  $A$ , et donc  $A$  n'est pas compact.*

### 3.3 Propriétés de la compacité

On donne ici, sans démonstration, une série de propriétés de la compacité

**Propriété 3.3.1.** *Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*

**Propriété 3.3.2.** *Si  $(X, \tau)$  est un espace topologique compact et  $F$  est un fermé de  $X$  alors  $F$  est compact.*

**Propriété 3.3.3.** *Dans un espace topologique compact, les compacts sont les fermés.*

**Propriété 3.3.4.** *Les compacts de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles fermés bornés.*

Par exemple l'intervalle  $[0, 1]$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle.

**Propriété 3.3.5.** *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.*

**Propriété 3.3.6.** *Dans un espace topologique, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.*

**Propriété 3.3.7. (Théorème de Tychonoff).** *Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

**Définition 3.3.1.** *On dit qu'une partie  $A$  d'un espace topologique séparé  $(X; \tau)$  est **relativement compacte** si son adhérence est compacte.*

Par exemple l'ensemble  $A = [0, 1[$  n'est pas compact pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  mais  $A$  est relativement compact.

### 3.4 Compacité et applications continues

**Proposition 3.4.1. (Image d'un compact).** *Soit  $(X; \tau)$  et  $(Y; \tau')$  deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est compacte.*

*Démonstration.* Soit  $K$  un compact de  $X$  et  $f$  une application continue. Si  $\cup_{i \in I} W_i$  est un recouvrement ouvert de  $f(K)$  alors  $f^{-1}(\cup_{i \in I} W_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(W_i)$  est un recouvrement ouvert de  $K$ . Comme  $K$  est compact, on peut extraire de  $\cup_{i \in I} f^{-1}(W_i)$  un sous recouvrement fini  $\cup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$ ; donc  $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$ . Par conséquent

$$f(K) \subset f(\cup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)) = f(f^{-1}(\cup_{i=1}^n W_i)) \subset \cup_{i=1}^n W_i$$

□

Plus particulièrement, on a

**Proposition 3.4.2.** *La compacité est une propriété topologique.*

*Démonstration.* Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique compact et  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  un homéomorphisme. Comme  $X$  est séparé alors  $Y$  est séparé. Soit

$$Y = \cup_{j \in J} V_j, X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\cup_{j \in J} V_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(V_j)$$

Comme  $X$  est compact,  $\exists n \in \mathbb{N} : X = \cup_{j=1}^n f^{-1}(V_j)$  et alors

$$Y = f(X) = f[\cup_{i=1}^n f^{-1}(V_j)] = f[f^{-1} \cup_{j=1}^n (V_j)] \subseteq \cup_{j=1}^n (V_j)$$

Donc  $Y$  est compact. □

**Corollaire 3.4.1. (Théorème des bornes atteintes).** *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

*Démonstration.* Soit  $f : (X; \tau) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Comme  $X$  est compact, il est séparé. De plus  $\mathbb{R}$  est séparé ; par conséquent l'image  $f(X)$  est un compact de  $\mathbb{R}$ . L'image  $f(X)$  est donc bornée. La fonction  $f$  est donc bornée et on peut définir  $\sup_{x \in X} f(x)$  et  $\inf_{x \in X} f(x)$  (propriété de  $\mathbb{R}$ ). L'image  $f(X)$  est fermée et on a donc  $\sup_{x \in X} f(x) \in f(X)$  et  $\inf_{x \in X} f(x) \in f(X)$ . Autrement dit les bornes supérieure et inférieure sont atteintes. Ce sont des maximum et minimum. □

Il est bien sûr faux de dire que l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact. Par exemple l'image réciproque de  $[0; 1]$  par la projection sur l'axe des abscisses dans  $\mathbb{R}^2$  est  $[0; 1] \times \mathbb{R}$  qui n'est pas compact. En revanche, c'est toujours un fermé. Le fait que l'image réciproque d'un compact soit un compact est une propriété que l'on rencontre et qui est parfois bien utile. Il y a un mot pour identifier cette propriété.

**Définition 3.4.1.** *Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques séparés est dite **propre** si l'image réciproque de tout compact  $K'$  de  $Y$  est un compact de  $X$ .*

**Exemple 3.4.1.** *Si on note  $\Delta = \{f(x; x); x \in \mathbb{R}^2\}$  la diagonale dans  $\mathbb{R}^2$ , la restriction de la projection sur l'axe des abscisses à  $\Delta$  est propre.*

## 3.5 Espaces localement compacts

**Définition 3.5.1.** *Un espace topologique  $X$  est **localement compact** si tout point de  $X$  admet un voisinage compact.*

**Exemple 3.5.1.** *Considérons la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie usuelle. Remarquons que chaque point  $p \in \mathbb{R}$  est intérieur à un intervalle fermé, par exemple  $[p - \delta, p + \delta]$ , et qu'un intervalle fermé est compact d'après le théorème de Heine-Borel. Ainsi  $\mathbb{R}$  est un espace localement compact. Par contre,  $\mathbb{R}$  n'est pas un espace compact ; par exemple, la famille*

$$\mathcal{A} = \{ \dots, ] - 3, -1[, ] - 2, 0[, ] - 1, 1[, ] 0, 2[, ] 1, 3[, \dots \}$$

*est un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}$  qui ne contient pas de sous-recouvrement fini.*

Ainsi nous voyons, d'après l'exemple ci-dessus, qu'un espace localement compact n'est pas nécessairement compact. Par contre, puisqu'un espace topologique est toujours voisinage de chacun de ses points, la réciproque est vraie. C'est-à-dire

**Proposition 3.5.1.** *Tout espace compact est localement compact.*

On donne enfin quelques exemples courants d'espaces topologiques compacts

**Exemple 3.5.2.** 1. *Le cercle  $\mathbb{S}^1$ , le segment  $[0, 1]$  sont des espaces compacts.*

2. *La droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie usuelle n'est pas compacte.*

3. *La sphère  $\mathbb{S}^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$ , la bouteille de Klein sont des espaces compacts.*

# ESPACES CONNEXES

---

## 4.1 Introduction

D'un point de vue intuitif, un espace topologique connexe est un espace topologique fait d'un seul morceau. On commence par la présentation d'une situation modèle sur laquelle nous reviendrons : Supposons connu le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (ce sera dans ce cours une conséquence d'un résultat plus général). On se demande quelles sont les parties à la fois ouvertes et fermées de  $\mathbb{R}$ , ou de manière équivalente, quelles sont les parties ouvertes  $A$  de  $\mathbb{R}$  telles que  $(A, C_{\mathbb{R}}A)$  forme une partition d'ouverts de  $\mathbb{R}$ . Soit  $A$  un tel sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction caractéristique  $1_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$  est continue puisque pour tout ouvert  $O$  de  $\{0, 1\}$  l'image réciproque  $f^{-1}(O) = \emptyset, \mathbb{R}, A$  ou  $C_{\mathbb{R}}A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Le théorème des valeurs intermédiaires impose alors que  $1_A$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire  $A = \mathbb{R}$  ou  $A = \emptyset$ .

### Une autre motivation

Soit  $U \subset (\mathbb{R}, \tau_u)$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable telle que  $f'(x) = 0, \forall x \in U$ . Nous voudrions conclure que  $f$  est constante ; mais l'exemple où  $U = ]-2, -1[ \cup ]1, 2[$  avec  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$  indique que le résultat est faux. Pour que ce résultat soit vrai, il faut une condition supplémentaire de **connexité**.

Intuitivement, un espace connexe est un espace qui est "en un seul morceau" ou encore qu'on ne peut pas partager en deux parties "éloignées l'une de l'autre". par exemple,

1.  $X = ]-2, -1[ \cup ]1, 2[$  n'est pas connexe.
2.  $Y = [0, 1] \cup ]1, 2[$  est connexe.

Dans la suite, nous allons formaliser cette notion topologique.

## 4.2 Espaces connexes

**Définition 4.2.1.** *Un espace topologique  $(X, \tau)$  est connexe s'il n'existe pas de partition de  $X$  en deux ouverts non vides.*

**Remarque 4.2.1.** 1. *En passant au complémentaire, on voit que  $(X, \tau)$  est connexe s'il n'existe pas de partition de  $X$  en deux fermés non vides.*

---

2. On peut montrer facilement, que  $(X, \tau)$  est connexe si, et seulement si, il ne contient pas d'ouvert fermé propre.

On peut reformuler ces remarques sous forme du théorème de caractérisation suivante

**Théorème 4.2.1.** *Un espace topologique  $(X, \tau)$  est connexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

1. *Il n'existe pas une partition de  $X$  en deux ouverts disjoints i.e  $X \neq W_1 \sqcup W_2$ , avec  $W_1, W_2 \in \tau$ .*
2. *Il n'existe pas une partition de  $X$  en deux fermés disjoints i.e  $X \neq F_1 \sqcup F_2$ , avec  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_\tau$ .*
3. *Il n'existe pas de partie propre de  $X$  à la fois ouverte et fermée i. si  $A \subset X$  alors  $(A \in \tau \text{ et } A^c \in \tau) \implies A = \emptyset \text{ ou } A = X$ .*
4. *Les seuls sous-ensembles de  $X$  à la fois ouverts et fermés sont  $\emptyset$  et  $X$ .*

#### 4.2.1 Exemple fondamental : les connexes de $\mathbb{R}$

**Théorème 4.2.2.** *Les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.*

*Démonstration.* [?] □

**Exemple 4.2.1.** *L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est inclus dans l'union des ouverts disjoints  $O_1 = ]-\infty, \sqrt{2}[$  et  $O_2 = ]\sqrt{2}, +\infty[$  sans être inclus dans l'un des deux. L'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  n'est pas connexe.*

**Exemple 4.2.2.** *L'ensemble  $A = [0, 1] \cup [2, 3]$  n'est pas connexe. En utilisant le théorème ci-dessus, il suffit de dire que ce ne sont pas des intervalles.*

Comme d'habitude, on peut définir la connexité d'un sous-ensemble.

**Définition 4.2.2.** *Un sous-ensemble  $A$  de  $(X, \tau)$  est connexe si l'espace topologique  $(A, \tau_A)$  est connexe.*

**Exemple 4.2.3.** *Considérons sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  la topologie définie par*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

*On remarque que  $X$  n'est pas connexe ; car  $\{a\}$  et  $\{b, c, d, e\}$  sont complémentaires donc à la fois ouverts et fermés. En d'autres termes  $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$  est une décomposition de  $X$ . Remarquons que la topologie sur le sous ensemble  $A = \{b, c, d, e\}$  est  $\{A, \emptyset, \{d\}\}$ . Par conséquent  $A$  est connexe puisque  $A$  et  $\emptyset$  sont les sous-ensembles de  $A$  qui sont à la fois ouverts et fermés pour la topologie induite.*

On peut traduire la définition pour n'utiliser que des ouverts de  $X$  et non ceux de  $Y$ .

**Définition 4.2.3.** *On appelle une **disconnexion** de  $Y$  par des ouverts de  $X$  une paire d'ouverts  $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau$  tels que  $Y \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $Y \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ ,  $Y \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  et  $Y \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ .*

Alors un sous-ensemble  $Y$  est connexe s'il n'existe pas de disconnexion de  $Y$  par des ouverts de  $X$ .

**Exemple 4.2.4.** *Considérons la topologie  $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{c\}\}$  sur l'ensemble  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . On remarque que  $A = \{a, d, e\}$  n'est pas connexe. Car considérons  $G = \{a, b, c\}$  et  $H = \{c, d, e\}$ ; alors  $A \cap G = \{a\}$  et  $A \cap H = \{d, e\}$  sont deux ensembles disjoints non vides dont la réunion est égale à  $A$ .*

**Remarque 4.2.2.** *Remarquons que les ouverts  $G$  et  $H$  ne sont pas disjoints.*

**Proposition 4.2.1.** *Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $Y$  et  $Z$  deux parties de  $X$ . Si  $Y$  est connexe et dense dans  $Z$ , alors  $Z$  est connexe.*

*Démonstration.* Supposons que  $Z$  n'est pas connexe. On a alors une disconnexion de  $Z$  par deux ouverts de  $X$ , soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Puisque  $Y \subset Z$ , on a  $Y \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$  et  $Y \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ . De plus puisque  $Y$  est dense dans  $Z$ , on a  $\Omega_1 \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ , et donc, par définition de l'adhérence,  $\Omega_1 \cap Y \neq \emptyset$ , et la même conclusion vaut pour  $\Omega_2$ . On a donc une disconnexion de  $Y$  par des ouverts de  $X$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

### 4.3 Propriétés de la connexité

On donne ici quelques propriétés de la connexité :

**Propriété 4.3.1.** *Toute image continue d'un connexe est connexe. En particulier, tout quotient d'un espace connexe est connexe.*

*Démonstration.* Soient  $(X, \tau)$  et  $(Y, \tau')$  des espaces connexes et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $f(X)$  n'est pas connexe, il existe une disconnexion de  $f(X)$  par des ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $Y$ . Puisque  $f$  est continue, les ensembles  $f^{-1}(\Omega_1)$  et  $f^{-1}(\Omega_2)$  sont ouverts dans  $X$  et on vérifie qu'ils forment une disconnexion de  $X$ .  $\square$

**Propriété 4.3.2.** *Toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties connexes d'un espace topologique  $(X, \tau)$  ayant deux à deux une intersection non vide a une réunion connexe.*

*Démonstration.* Exercice  $\square$

**Propriété 4.3.3.** *Tout produit d'espaces topologiques connexes est connexe.*

Nous savons que si  $(X, \tau)$  est un espace topologique connexe, il en est de même pour tout quotient de  $X$ . La propriété suivante montre que la réciproque est vraie dans certains cas.

**Propriété 4.3.4.** *Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $X/\mathcal{R}$  est connexe et si les classes de  $\mathcal{R}$  sont connexes, alors  $(X, \tau)$  est connexe.*

*Démonstration.* Supposons que  $X$  ne soit pas connexe. Il existe alors une disconnexion de  $X$  par des ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Pour tout  $x \in X$ , la classe de  $x$  vue comme sous-ensemble de  $X$  est  $\pi^{-1}(\pi(\{x\}))$ . Etant connexe, elle est soit dans  $\Omega_1$ , soit dans  $\Omega_2$ . Alors on a  $X/\mathcal{R} = \pi(\Omega_1) \cup \pi(\Omega_2)$ . Les ensembles  $\pi(\Omega_1)$  et  $\pi(\Omega_2)$  sont disjoints, sinon un point de  $\Omega_1$  serait équivalent à un point de  $\Omega_2$ , et non vides, sinon on aurait  $X \subset \Omega_1$  ou  $X \subset \Omega_2$ . De plus, on a  $\pi^{-1}(\pi(\Omega_i)) = \Omega_i$ , donc ces ensembles sont également ouverts du quotient; ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle le quotient est connexe.  $\square$

**Propriété 4.3.5.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Si  $A$  est connexe alors  $\overline{A}$  est connexe.

*Démonstration.* Supposons que  $\overline{A}$  n'est pas connexe i.e  $\overline{A} = W_1 \sqcup W_2$ , avec  $W_i \in \tau_{\overline{A}}$  avec  $i = 1, 2$ . On a  $A = \overline{A} \cap A = (W_1 \sqcup W_2) \cap A = (W_1 \cap A) \sqcup (W_2 \cap A)$ . Or  $(W_1 \cap A) \neq \emptyset$  et  $(W_2 \cap A) \neq \emptyset$ ; cela est alors absurde car  $A$  est connexe.  $\square$

**Théorème 4.3.1. (Théorème de passage à la douane).** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Toute partie connexe  $B \subset X$  qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de  $A$  rencontre la frontière de  $A$ .

*Démonstration.* Supposons que  $B \cap fr(A) = \emptyset$ . Comme  $B \cap int(A) \neq \emptyset$  et  $B \cap ext(A) \neq \emptyset$  on a  $B = (B \cap int(A)) \sqcup (B \cap ext(A))$ . Cela contredit le fait que  $B$  est connexe.  $\square$

**Théorème 4.3.2.** Un espace topologique  $(X, \tau)$  est connexe ssi toute application continue  $f : (X, \tau) \rightarrow (\{0, 1\}, \tau_{disc})$  est constante.

*Démonstration.* L'ensemble  $\{0, 1\}$  pris comme partie de  $\mathbb{R}$  est muni de topologie la topologie discrète.

$\implies$  Si  $(X; \tau)$  est connexe et si  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  est continue alors le couple

$$(f^{-1}(\{0\}); f^{-1}(\{1\}))$$

est une partition d'ouverts de  $X$ .

Donc ou bien  $(f^{-1}(\{0\}) = X \text{ et } f^{-1}(\{1\}) = \emptyset) \implies f(x) \equiv 0$  et  $f$  est constante

ou bien  $(f^{-1}(\{1\}) = X \text{ et } f^{-1}(\{0\}) = \emptyset) \implies f(x) \equiv 1$  et là aussi  $f$  est constante.

$\Leftarrow$  Réciproquement, supposons que toute application continue  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  est constante.

Si  $(A; A^c)$  est une partition d'ouverts de  $X$  alors la fonction caractéristique  $1_A$  est continue sur  $X$ . Par hypothèse, elle est donc constante et  $A = X$  ou  $A = \emptyset$ ; d'où  $X$  est connexe.  $\square$

**Exemple 4.3.1.** 1. L'espace  $\mathbb{R}$ , le cercle  $\mathbb{S}^1$ , le segment  $[0, 1]$  sont des espaces connexes.

2. La sphère  $\mathbb{S}^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  sont des espaces connexes.

## 4.4 Connexité de la droite réelle

Les ensembles connexes de nombres réels peuvent être simplement décrits de la manière suivante :

**Théorème 4.4.1.** Les seules parties connexes de  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle sont les intervalles.

On rappelle que les intervalles de la droite réelle  $\mathbb{R}$  sont de la forme suivante :

1.  $]a, b[, ]a, b], [a, b[, [a, b]$ , pour les intervalles finis ;

2.  $] - \infty, a[, ] - \infty, a], ]a, \infty[, [a, \infty[$  pour les intervalles infinis.

Un intervalle  $E$  peut être caractérisée par la propriété suivante :

$$a, b \in E, a < x < b \Rightarrow x \in E$$

Puisque l'image par une application continue d'un espace connexe est connexe nous obtenons la généralisation suivante du théorème de la valeur intermédiaire de Weierstrass.

**Théorème 4.4.2.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application réelle continue définie sur un espace connexe  $X$ . Alors  $f$  admet comme valeur chaque nombre compris entre deux quelconques de ses valeurs i.e  $f(X)$  est un intervalle.*

**Exemple 4.4.1.** *Une application intéressante de la théorie de la connexité est constituée par le théorème du point fixe suivant. Soit  $I = [0, 1]$  et soit  $f : I \rightarrow I$  continue, alors  $\exists p \in I$  tel que  $f(p) = p$ .*

## 4.5 Composantes connexes

Quand un espace  $(X, \tau)$  n'est pas connexe, il est naturel de le décomposer en "morceaux connexes". C'est l'idée des composantes connexes.

**Définition 4.5.1.** *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique quelconque. Pour tout point  $x$  de  $X$ , on appelle **composante connexe** de  $x$  et on note  $C(x)$  le plus grand connexe contenant  $x$  :  $C(x) = \bigcup_{x \in C \subset X, C \text{ connexe}} C$ .*

Donc une composante connexe de  $(X, \tau)$  est une partie connexe maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des parties connexes de  $X$ . Cette définition signifie qu'une composante connexe  $E$  d'un espace topologique  $X$  est le sous-ensemble connexe maximal de  $X$ , i.e que  $E$  est connexe et que  $E$  n'est pas un sous-ensemble propre d'aucun connexe de  $X$ . Il est clair que  $E$  est non vide.

Ainsi tout sous-ensemble connexe de  $X$  est contenu dans une composante connexe. Chaque point  $x \in X$  appartient à une composante connexe unique appelée **la composante connexe** de  $x$ ; c'est la réunion de toutes les parties connexes de  $X$  contenant  $x$ . La composante connexe de  $x$  est notée par  $C_x$  ou  $C(x)$ .

Avec cette définition il est clair que deux points  $x$  et  $y$  appartiennent à un même connexe si et seulement si  $C(x) = C(y)$ .

**Proposition 4.5.1.** *La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par  $C(x) = C(y)$  est un relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de  $X$ . Ainsi les composantes connexes de  $X$  forment une partition de  $X$ .*

*Démonstration.* Exercice □

**Remarque 4.5.1.** *D'un point de vue intuitif, les composantes connexes de  $X$  sont les morceaux d'un seul tenant de  $X$ . Par exemple les composantes connexes de  $X = [0, 1] \cup [2, 3]$  sont  $C_1 = [0, 1]$  et  $C_2 = [2, 3]$ .*

Les faits les plus importants concernant les composantes connexes d'un espace sont contenus dans le théorème suivant.

**Théorème 4.5.1.** 1. *Tout point de  $x \in X$  appartient à sa composante connexe ;*

2. La composante connexe d'un point est la plus grande partie connexe contenant ce point ;
3. Les composantes connexes sont fermées ;
4. Les composantes connexes d'un espace topologique  $X$  forment une partition de  $X$ , i.e elles sont disjointes et leur réunion est  $X$ .

**Exemple 4.5.1.** Si  $X$  est connexe alors  $X$  n'a qu'une seule composante :  $X$  lui-même.

**Exemple 4.5.2.** Considérons la topologie suivante sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

Les composantes connexes de  $X$  sont  $\{a\}$  et  $\{b, c, d, e\}$ . Toute autre partie connexe de  $X$ , comme  $\{b, d, e\}$ , est incluse dans l'une des composantes connexes.

## 4.6 Espaces localement connexes

**Définition 4.6.1.** Un espace topologique  $X$  est dit **localement connexe** en  $p \in X$  si tout ouvert contenant  $p$  contient un ouvert connexe contenant  $p$ , i.e si les ouverts connexes contenant  $p$  forment une base locale en  $p$ .  $X$  est dit **localement connexe** s'il est localement connexe en chacun de ses points ou, de manière équivalente, si les ouverts connexes forment une base de  $X$ .

**Exemple 4.6.1.** Tout espace discret est localement connexe. En effet si  $p \in X$  alors  $\{p\}$  est un ouvert connexe contenant  $p$  qui est contenu dans tout ouvert contenant  $p$ . Notons que  $X$  n'est pas connexe si  $X$  contient plus d'un point.

## 4.7 Connexité par arcs

### 4.7.1 Notion de chemis

**Définition 4.7.1.** Soit  $I = [0, 1]$  l'intervalle unité fermé. Un **chemin** allant d'un point  $a$  à un point  $b$  dans un espace topologique  $X$  est une application continue  $f : I \rightarrow X$  telle que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ .

Le point  $a$  s'appelle l'**origine** et  $b$  l'**extrémité** du chemin.

**Exemple 4.7.1.** Pour tout  $p \in X$  l'application constante  $e_p : I \rightarrow X$  définie par  $e_p(s) = p$  est continue et donc est un chemin . On l'appelle le chemin constant de  $p$ .

**Exemple 4.7.2.** Soit  $f : I \rightarrow X$  un chemin allant de  $a$  à  $b$ . Alors l'application  $f : I \rightarrow X$  définie par  $f(s) = f(1 - s)$  est un chemin allant de  $b$  à  $a$ . On l'appelle **chemin inverse**.

**Exemple 4.7.3.** Soit  $f : I \rightarrow X$  un chemin allant de  $a$  à  $b$  et soit  $g : I \rightarrow X$  un chemin allant de  $b$  à  $c$  . Alors la **concaténation** des deux chemins  $f$  et  $g$  notée  $f * g$  est l'application  $f * g : I \rightarrow X$  définie par

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

laquelle est un chemin allant de  $a$  à  $c$  obtenue en suivant le chemin  $f$  de  $a$  à  $b$  et ensuite le chemin  $g$  de  $b$  à  $c$ .

**Définition 4.7.2.** Un sous-ensemble  $E$  d'un espace topologique  $X$  est dit **connexe par arcs** si pour deux points quelconques  $a, b \in E$ , il existe un chemin  $f : I \rightarrow X$  allant de  $a$  à  $b$  entièrement contenu dans  $E$  i.e  $f(I) \subset E$ .

**Définition 4.7.3.** Un espace topologique  $X$  est **connexe par arcs** si deux points quelconques de  $X$  peuvent être joints par un chemin de  $X$ .

**Exemple 4.7.4.** 1. L'espace  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs ;

2. La sphère  $\mathbb{S}^2$  est connexe par arcs ;

3. Le tore  $\mathbb{T}^2$  est connexe par arcs.

Les sous-ensembles connexes par arcs maximaux de  $X$ , appelés composantes connexes par arcs constituent une partition de  $X$ .

**Propriété 4.7.1.** L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

*Démonstration.* Exercice. Il suffit de remarquer que si  $\alpha$  est un chemin reliant deux points quelconques  $x_1$  et  $x_2$  dans  $X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, alors  $\beta = f \circ \alpha$  est un chemin reliant  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  dans  $Y$ .  $\square$

La relation existant entre la connexité et la connexité par arcs est donnée suivant

**Théorème 4.7.1.** Tout espace connexe par arcs est connexe. Mais la réciproque n'est pas, en général, vraie

**Théorème 4.7.2.** Tout ouvert connexe du plan  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs.

## 4.7.2 Homotopie des chemins

Soit  $f : I \rightarrow X$  et  $g : I \rightarrow X$  deux chemins de même origine  $p \in X$  et de même extrémité  $q \in X$ . Alors  $f$  est dit **homotope** à  $g$ , ce qui s'écrit  $f \cong g$  s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que

1.  $H(t, 0) = f(t), \forall t \in [0, 1]$  ;
2.  $H(t, 1) = g(t), \forall t \in [0, 1]$  ;
3.  $H(0, s) = p, \forall s \in [0, 1]$  ;
4.  $H(1, s) = q, \forall s \in [0, 1]$ .

On dit alors que le chemin  $f$  peut être déformé continuellement dans  $g$ . L'application  $H$  est appelée une **homotopie de  $f$  sur  $g$** .

**Exemple 4.7.5.** Soit  $X$  l'ensemble des points situés entre deux cercles concentriques (appelé couronne). Alors représentons deux chemins  $f$  et  $g$  qui sont homotopes et deux chemins  $f'$  et  $g'$  qui ne sont pas homotopes.

**Exemple 4.7.6.** Soit  $f : I \rightarrow X$  un chemin quelconque, alors  $f \cong f$  i.e  $f$  est homotope à lui même. En effet l'application  $H : I^2 \rightarrow X$  définie par

$$H(t, s) = f(t)$$

est une homotopie de  $f$  sur  $f$ .

**Exemple 4.7.7.** Soit  $f \cong g$  et soit par exemple  $H : I^2 \rightarrow X$  une homotopie de  $f$  sur  $g$ . Alors l'application  $\widehat{H} : I^2 \rightarrow X$  définie par

$$\widehat{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$$

est une homotopie de  $g$  sur  $f$ , et donc  $g \cong f$

**Exemple 4.7.8.** Soient  $f \cong g$  et  $g \cong h$ ; supposons par exemple que  $F : I^2 \rightarrow X$  soit une homotopie de  $f$  et  $g$  et que  $G : I^2 \rightarrow X$  soit une homotopie de  $g$  sur  $h$ . L'application  $H : I^2 \rightarrow X$  définie par

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de  $f$  sur  $h$  et donc  $f \cong h$ . L'homotopie  $H$  peut être interprétée géométriquement comme une compression des domaines de  $F$  et  $G$  en un seul carré.

Les trois relations suivantes impliquent la proposition suivante :

**Proposition 4.7.1.** La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins allant de  $a$  à  $b$ .

*Démonstration.* Exercice □

### 4.7.3 Espaces simplement connexes

**Définition 4.7.4.** Un chemin  $f : I \rightarrow X$  dont l'origine coïncide avec l'extrémité, par exemple  $f(0) = f(1) = p$  est appelé un **chemin fermé** ou **lacet** en  $p \in X$ .

En particulier, le chemin constant  $e_p : I \rightarrow X$  défini par  $e_p(s) = p$  est un chemin fermé en  $p$ . Un chemin fermé  $f : I \rightarrow X$  qu'on peut déformer continument en un point est dit homotope à 0.

**Définition 4.7.5.** Un espace topologique est dit **simplement connexe** si tout lacet de  $X$  est homotope à 0.

**Exemple 4.7.9.** Un disque ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$  est simplement connexe tandis qu'une couronne n'est pas simplement connexe puisqu'il existe des lacets qu'on ne peut déformer continument en un point.

## 4.8 Exercices

**Exercice 4.8.1.** *Montrer qu'un disque ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs.*

**Solution 4.8.1.** *Indication :*

*Considérer deux points  $p = (a_1, b_1), q = (a_2, b_2) \in D$  et montrer que l'application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par*

$$f(t) = (a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1))$$

*est un chemin allant de  $p$  à  $q$  qui est contenu dans  $D$ .*

**Exercice 4.8.2.** *Montrer que  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  n'est pas compact.*

*Indication :* Il faut montrer que  $F_n = [n, +\infty[$  avec  $n \in \mathbb{N}$  est une suite de fermés d'intersection vide mais qu'on peut extraire une suite finie d'intersection non vide.

**Exercice 4.8.3.** *Montrer qu'un espace topologique discrète est compact ssi il est fini.*

**Exercice 4.8.4.** *Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$ , muni de la topologie induite par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  sont-ils compacts ?*

---

# ESPACES MÉTRIQUES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS

---

Dans ce chapitre, nous verrons d'autres moyens de se définir une topologie, qui généralise ce qui a été vu sur les espaces euclidiens.

## 5.1 Espaces métriques

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Nous étudierons leurs propriétés spécifiques comme exemples pour illustrer les définitions abstraites. Ce sont des espaces topologiques avec des propriétés assez intuitives, ou tout du moins qu'on a l'habitude de manipuler car le modèle le plus simple est  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle.

### 5.1.1 Définition

**Définition 5.1.1.** Soit  $X$  un ensemble. Une **distance** ou **métrique** sur  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

1.  $d(x, y) = 0$  ssi  $x = y$  ; ( propriété de séparation)
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tous  $x, y \in X$  ; ( propriété de symétrie)
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  pour tous  $x, y, z \in X$  ( propriété d'inégalité triangulaire)

Un espace muni d'une distance(métrique) est appelé **espace métrique**. Une distance sur un espace permet de définir les boules (ouvertes) de cet espace, toujours par

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

ce qui nous permet alors de définir une topologie.

Pour montrer qu'un espace est métrique on doit vérifier les 3 conditions ci-dessus. Les deux premières sont faciles, c'est l'inégalité triangulaire qui demande généralement du travail. On donne maintenant une conséquence directe de l'inégalité triangulaire que l'on appelle deuxième inégalité triangulaire.

**Proposition 5.1.1.** Pour tout  $x, y, z \in (X, d)$  on a :  $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$

---

*Démonstration.* D'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} d(x; y) &\leq d(x; z) + d(z; y) = d(x; z) + d(y; z) \\ &\implies d(x; y) - d(y; z) \leq d(x; z)(1). \end{aligned}$$

Par le même raisonnement,

$$\begin{aligned} d(y; z) &\leq d(y; x) + d(x; z) = d(x; y) + d(x; z) \\ &\implies d(y; z) - d(x; y) \leq d(x; z) \\ &\implies -d(x; z) \leq d(x; y) - d(y; z)(2). \end{aligned}$$

De (1) et (2), on a  $-d(x; z) \leq d(x; y) - d(y; z) \leq d(x; z)$ . D'où le résultat.  $\square$

### 5.1.2 Quelques exemples des espaces métriques

1. L'application  $d$  définie par  $d(a, b) = |a - b|$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  est une distance sur  $\mathbb{R}$  appelée **distance usuelle** sur  $\mathbb{R}$ .
2. L'application  $d$  définie par

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

où

$$p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

est une distance sur  $\mathbb{R}^2$  appelée **distance usuelle** sur  $\mathbb{R}^2$ .

3. Soit  $X$  un ensemble quelconque non vide et soit  $d$  l'application définie par

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Alors  $(X, d)$  est un espace métrique et  $d$  est appelée **distance triviale** sur  $X$ .

4. Soit  $C([0, 1])$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$ . L'application

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

est une métrique sur  $C([0, 1])$ .

5. Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  deux points de  $\mathbb{R}^n$ , on définit les métriques usuelles sur  $\mathbb{R}^n$  suivantes :

- (i) La métrique euclidienne ou métrique  $l^2$  définie par

$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

(ii) la métrique infinie  $l^\infty$  définie par

$$d_\infty(x, y) := \max_{i=1, n} |x_i - y_i|$$

(iii) La métrique  $l^1$  définie par

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

**Remarque 5.1.1.** Si  $n = 1$  les trois métriques usuelles sont égales à la métrique usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

### 5.1.3 Distance d'ensembles et diamètre

**Définition 5.1.2.** Soit  $d$  une distance définie sur un ensemble  $X$ . La distance d'un point  $p \in X$  à une partie non vide  $A$  de  $X$  est notée  $d(p, A)$  et définie par

$$d(p, A) := \inf\{d(p, a) : a \in A\}$$

i.e la borne inférieure des distances de  $p$  aux points de  $A$ .

**Définition 5.1.3.** La distance de deux parties non vides  $A$  et  $B$  de  $X$  est notée  $d(A, B)$  et définie par

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

i.e la borne inférieure des distances des points de  $A$  aux points de  $B$ .

**Définition 5.1.4.** Le **diamètre** d'une partie non vide  $A$  de  $X$  est notée  $d(A)$  ou  $\text{diam}(A)$  et est définie par

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

Si la diamètre d'un ensemble  $A$  est fini alors  $A$  est dite borné.

**Exemple 5.1.1.** Si  $d$  est la métrique triviale d'un ensemble  $X$ . Alors pour  $p \in X, A, B \subset X$ , on a

$$d(p, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in A \\ 0 & \text{si } p \notin A \end{cases}$$

et

$$d(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

**Exemple 5.1.2.** Considérons les sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  suivants :  $A = [0, 1[$  et  $B = ]1, 2]$ . Si  $d$  est la métrique usuelle de  $\mathbb{R}$  alors  $d(A, B) = 0$  alors que si  $d$  est la distance triviale de  $\mathbb{R}$ ,  $d(A, B) = 1$  puisque  $A$  et  $B$  sont disjoints.

Des définitions ci-dessus découle la proposition

**Proposition 5.1.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un espace métrique  $X$  et  $p \in X$ . Alors on a

1.  $d(p, A)$ ,  $d(A, B)$  et  $\text{diam}(A)$  sont des réels non négatifs.
2. Si  $p \in A$ , alors  $d(p, A) = 0$ .
3. Si  $A \cap B$  est non vide, alors  $d(A, b) = 0$ .
4. Si  $A$  est fini, alors  $\text{diam}(A) < \infty$  i.e  $A$  est borné.

**Remarque 5.1.2.** La distance entre deux parties d'un espace topologique  $X$  n'est pas une distance sur l'ensemble des parties de  $X$ .

En effet,  $d(A, B) = 0$  n'entraîne pas que  $A = B$ . Un exemple est donné par  $X = \mathbb{R}$ ;  $A = [0, 2]$  et  $B = [2, 3]$ . Ici  $d(A, B) = 0$  mais  $A \neq B$ .

## 5.2 Topologie associée à une métrique

Soit  $(X; d)$  un espace métrique. On se propose de s'intéresser à la géométrie de  $X$ . Pour cela, nous allons définir les parties de  $X$  qui jouent un rôle important dans la topologie des espaces métriques. Notamment on verra que les boules ouvertes forment la base de la topologie. On montrera aussi que dans un espace métrique quelconque une boule n'est pas toujours ronde.

### 5.2.1 Boules ouvertes dans un espace métrique

**Définition 5.2.1.** Soient  $(X; d)$  est un espace métrique,  $a \in X$  et  $r > 0$ . On définit par :

1.  $B(a; r) = \{x \in X : d(a; x) < r\}$  la **boule ouverte** centrée en  $a$  et de rayon  $r$ .
2.  $B_f(a; r) = \{x \in X : d(a; x) \leq r\}$  la **boule fermée** centrée en  $a$  et de rayon  $r$ .
3.  $S(a; r) = \{x \in X : d(a; x) = r\}$  la **sphère** de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Remarque 5.2.1.** Si  $0 < r < s$  alors,  $B(a; r) \subseteq B_f(a; r) \subseteq B(a; s)$ .

**Exercice 5.2.1.** Pour  $n = 1, n = 2$  et  $n = 3$  définir les boules ouvertes et fermées ainsi que les sphères pour la distance euclidienne.

**Exercice 5.2.2.** Pour  $n = 1, n = 2$  et  $n = 3$  expliciter les boules ouvertes de rayons 1 et centrées à l'origine.

L'une des propriétés les plus importantes des boules ouvertes dans un espace métrique est donnée dans le lemme suivant

**Lemme 5.2.1.** Soit  $S$  une boule ouverte de centre  $p$  et de rayon  $\delta$ . Alors, pour tout point  $q \in S$ , il existe une boule ouverte  $T$  centrée en  $q$  et contenue dans  $S$ .

*Démonstration.* **Illustration par une figure pour plus de compréhension.**

Soit  $S$  une boule ouverte de centre  $p$  et de rayon  $\delta$ , i.e  $S = B(p; \delta)$ . Alors, on a  $d(p; q) < \delta$  puis que  $q \in S = B(p; \delta)$ . Ainsi

$$\varepsilon = \delta - d(p, q) > 0$$

Nous disons que la boule  $T = T(q, \varepsilon)$  de centre  $q$  et de rayon  $\varepsilon$  est contenue dans  $S$ . Soit  $x \in T = B(q, \varepsilon)$ . Alors  $d(x, q) < \varepsilon = \delta - d(q, p)$ . Donc, par inégalité triangulaire

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < [\delta - d(q, p) + d(q, p) = \delta]$$

Ainsi  $x \in S = B(p, \delta)$  puisque sa distance à  $p$  est inférieure à  $\delta$ . Ainsi  $x \in T$  implique  $x \in S$  i.e  $T$  est un sous-ensemble de  $S$ .  $\square$

**Lemme 5.2.2.** Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux réels tels que  $0 < r_1 \leq r_2$ . Alors la boule ouverte  $S(p, r_1) \subset S(p, r_2)$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in S(p, r_1)$ . Alors  $d(x, p) < r_1 \leq r_2$ . Ainsi  $x \in S(p, r_2)$  et donc  $S(p, r_1) \subset S(p, r_2)$ .  $\square$

**Lemme 5.2.3.** Si  $S$  et  $T$  sont deux boules ouvertes de même centre, alors l'une est contenue dans l'autre.

*Démonstration.* Supposons que  $S = B(p, r_1)$  et  $T = B(p, r_2)$  i.e  $S$  et  $T$  deux boules ouvertes de même centre  $p$  et de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$ . On a soit  $r_1 \leq r_2$ , soit  $r_2 \leq r_1$ . Ainsi d'après le lemme précédent, soit  $S \subset T$  soit  $T \subset S$ .  $\square$

En général, l'intersection des boules ouvertes n'est pas nécessairement une boule ouverte. Cependant, nous allons montrer que tout point de l'intersection de deux boules ouvertes appartient à une boule ouverte contenue dans l'intersection.

**Théorème 5.2.1.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux boules ouvertes et soit  $p \in S_1 \cap S_2$ . Alors il existe une boule ouverte  $S_p$  de centre  $p$  telle que  $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$ .

*Démonstration.* **Illustration à l'aide d'une figure pour plus de compréhension.**

Puisque  $p \in S_1$  et que  $S_1$  est une boule ouverte, il existe une boule ouverte  $S_1^*$  de centre  $p$  telle que  $p \in S_1^* \subset S_1$ . De même comme  $p \in S_2$  et que  $S_2$  est une boule ouverte, il existe une boule ouverte  $S_2^*$  de centre  $p$  telle que  $p \in S_2^* \subset S_2$ . Ainsi  $S_1^*$  et  $S_2^*$  sont toutes des boules ouvertes de même centre  $p$ , alors l'une d'entre elles est contenue dans l'autre. Admettons que c'est  $S_1^*$  qui est contenue dans  $S_2^*$ .

On a alors  $p \in S_1^* \subset S_1$  et  $p \in S_1^* \subset S_2^* \subset S_2$ . Par conséquent,  $p \in S_1^* \subset S_1 \cap S_2$ . On peut prendre alors  $S_p = S_1^*$ .  $\square$

**Corollaire 5.2.1.** Du théorème précédent, on déduit que les boules ouvertes d'un espace métrique  $(X, d)$  forment une base d'une topologie sur  $X$ .

**Définition 5.2.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. La topologie  $\tau_d$  sur  $X$  pour laquelle les boules ouvertes forment une base est appelée **topologie métrique** ou **topologie induite par une métrique**.

**Exemple 5.2.1.** La distance usuelle sur  $\mathbb{R}$  induit la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}$  dont les boules ouvertes sont les intervalles ouvertes bornés. De la même manière, la métrique usuelle sur  $\mathbb{R}^2$  induit la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 5.2.1.** Soit  $(X; d_X)$  un espace métrique et  $x; y \in X$ ;  $x \neq y$ , alors on peut toujours séparer  $x$  et  $y$  par des ouverts disjoints. Autrement dit, tout espace métrique est séparé.

*Démonstration.* Puisque  $x \neq y$  alors  $d(x; y) = r > 0$ . Posons  $U = B(x; r/3)$  et  $V = B(y; r/3)$  alors on a  $x \in U$ ;  $y \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

Les espaces métriques sont des espaces topologiques dans lesquels la topologie est induite par une métrique. Par conséquent, toutes les notions (ouvert, fermé, voisinage, adhérence, intérieur, densité, etc) vues sur les espaces topologiques peuvent être définies également pour les espaces métriques.

## 5.2.2 Adhérence, intérieur et extérieur

**Définition 5.2.3.** Soient  $(X; d)$  est un espace métrique et  $O; F; V_x \subset X$ , alors on dit que :

- (a)  $O$  est ouvert dans  $X$ , si pour tout  $x$  dans  $O$  il existe un  $r > 0$  tel que  $B(x; r) \subseteq O$ .
- (b)  $F$  est fermé dans  $X$ , si son complément  $X - F$ , est ouvert dans  $X$ .
- (c)  $V_x$  est un voisinage de  $x$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x; r) \subseteq V_x$ .

Les ouverts et fermés jouent un rôle très important dans les espace métriques.

**Définition 5.2.4.** Soit  $(X; d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ .

1. On dit qu'un point  $a \in X$  est un **point intérieur** à  $A$  s'il existe une boule ouverte de centre  $a$  incluse dans  $A$ . L'ensemble de tous les points intérieurs de  $A$  est appelé l'intérieur ou l'ouverture de  $A$  et on le dénote par  $Int(A)$ .
2. On dit qu'un point  $a \in X$  est un **point extérieur** à  $A$  s'il existe une boule ouverte de centre  $a$  incluse dans  $X - A$ . L'ensemble de tous les points extérieurs de  $A$  est appelé l'extérieur de  $A$  et on le dénote par  $Ext(A)$ .
3. On dit qu'un point  $x \in X$  est un **point adhérent** à  $A$  si tout voisinage de  $x$  contient au moins un point de  $A$ . Autrement dit  $A \cap V_x \neq \emptyset$ . L'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble  $A$  s'appelle l'adhérence ou fermeture de  $A$  et on le dénote par  $Adh(A)$ .
4. On dit qu'un point  $x \in X$  est un **point d'accumulation** (valeur d'adhérence) de  $A$  si  $x$  est adhérent à  $A - \{x\}$ . Donc tout voisinage  $V_x$  de  $x$ , contient au moins un point de  $A$  autre que  $x$ . Autrement dit  $(A - \{x\}) \cap V_x \neq \emptyset$ .
5. On dit qu'un point  $x \in X$  est un **point frontière** de  $A$  s'il est adhérent à la fois à  $A$  et à  $X - A$ . L'ensemble de tous les points frontière de  $A$  est appelé frontière de  $A$  et on le dénote par  $Fr(A)$ .
6. On dit qu'un point  $a \in A$  est un **point isolé** de  $A$  s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que  $V_a \cap A = \{a\}$ . On dénote l'ensemble ses points isolés par  $Is(A)$ .

## 5.3 Continuité dans les espaces métriques

Le concept de continuité d'une fonction est l'un des concepts fondamentaux en analyse. Nous allons étendre ce concept des fonction numériques  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  vu dans le cours d'analyse élémentaire aux fonctions entre deux espaces métriques  $f : (X; d_X) \rightarrow (Y; d_Y)$ . La définition de la continuité des fonctions d'une variable réelle est en effet un cas très spécial de la continuité sur les espaces métriques. On établira que les ouverts (fermés) des espaces métriques jouent un rôle primordiale dans la continuité des fonctions entre ces espaces métriques. On verra que sur certains espaces métriques toute fonction est continue.

### 5.3.1 Continuité ponctuelle, séquentielle et globale

La généralisation de la continuité ponctuelle entre espaces métriques arbitraires est donnée par la définition suivante.

**Définition 5.3.1.** On dit que  $f : (X; d_X) \rightarrow (Y; d_Y)$  est **continue au point**  $a \in X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $d_X(x; a) < \delta \implies d_Y(f(x); f(a)) < \varepsilon$ .

**Définition 5.3.2.** On dit que  $f$  est **séquentiellement continue** en  $a$  si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $X$  telle que  $x_n \rightarrow a$  alors la suite  $(f(x_n))$  est telle que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

Le résultat suivant montre que sur les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité ponctuelle.

**Proposition 5.3.1.** Une application  $f : (X; d_X) \rightarrow (Y; d_Y)$  est continue en  $x = a$  si et seulement si lorsque  $x_n \rightarrow a$  dans  $X$ , alors  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  dans  $Y$ .

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est continue en  $x = a$  et  $x_n \rightarrow a$  dans  $X$ . Puisque  $f$  est continue en  $x = a$  alors pour  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $d_X(x; a) < \delta$  alors  $d_Y(f(x); f(a)) < \varepsilon$ . Puisque  $x_n \rightarrow a$ , soit  $N \geq 1$  tel que  $d_X(x_n; a) < \delta$  quand  $n > N$ . Donc,  $d_Y(f(x_n); f(a)) < \varepsilon$  quand  $n \geq N$ . Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, il s'en suit que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Pour montrer la réciproque, supposons que  $f$  n'est pas continue en  $x = a$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$  il existe au moins un  $x_n$  avec  $d_X(x_n; a) < \frac{1}{n}$ , mais  $d_Y(f(x_n); f(a)) \geq \varepsilon$ . Cela veut dire que  $x_n \rightarrow a$ , mais  $\{f(x_n)\}$  n'est pas convergente vers  $f(a)$ .  $\square$

Nous n'allons pas passer beaucoup de temps à étudier les fonctions continues à un seul point, mais nous aurons beaucoup à dire sur les fonctions continues sur l'espace métrique entier i.e **continuité globale**.

**Définition 5.3.3.** Une application  $f : (X; d_X) \rightarrow (Y; d_Y)$  est dite **continue sur**  $X$ , si elle est continue en tout point  $x$  de  $X$ .

**Proposition 5.3.2.** Si  $f : (X; d_X) \rightarrow (Y; d_Y)$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est continue sur  $X$ .
- (2) Si  $O$  est un ouvert de  $(Y; d_Y)$ , alors  $f^{-1}(O)$  est un ouvert de  $(X; d_X)$ .
- (3) Si  $F$  est un fermé de  $(Y; d_Y)$ , alors  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $(X; d_X)$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (2) et (3) est évidente par passage au complémentaire. (1)  $\implies$  (2). Soit  $a \in f^{-1}(O)$  alors  $f(a) \in O$ , et puisque  $O$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la boule ouverte  $B_{d_Y}(f(a); \varepsilon) \subset O$  qui entraîne que  $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$ . D'autre part puisque  $f$  est continue, alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(B_{d_X}(a; \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)$ , qui entraîne que  $B_{d_X}(a; \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \varepsilon))$ . En d'autres termes,

$$B_{d_X}(a; \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$$

Donc  $f^{-1}(O)$  est ouvert.

(2)  $\implies$  (1). Si  $a \in X$  et  $\varepsilon > 0$ , alors  $B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)$  est un ouvert dans  $(Y; d_Y)$ ; donc par (2) on a que  $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \varepsilon))$  est un ouvert dans  $(X; d_X)$  qui contient  $a$ . Ce qui montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$B_{d_X}(a; \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)) \implies f(B_{d_X}(a; \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a); \varepsilon)$$

et donc  $f$  est continue au point  $a$ .  $\square$

### 5.3.2 Continuité uniforme

**Définition 5.3.4.** Soient  $(X; d_X)$  et  $(Y; d_Y)$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est **uniformément continue** si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x, y \in X$ , on a :  $d_X(x; y) < \delta \implies d_Y(f(x); f(y)) < \varepsilon$ .

**Définition 5.3.5.** On dit que  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne de rapport  $k > 0$  sur  $X$  si  $\forall x, y \in X$ ,  $d_Y(f(x); f(y)) \leq kd(x; y)$ .

**Remarque 5.3.1.** 1. Quelle est la différence entre continuité et continuité uniforme ?

Dans la définition de la continuité en un point  $x_0$ , le  $\delta$  dépend de  $x_0$ . Dans la définition de la continuité uniforme, ce  $\delta$  ne dépend plus de  $x_0$ . Il est le même quel que soit  $x_0$  dans  $X$ . Cette uniformité fait des fonctions uniformément continues des fonctions plus souples d'utilisation que les fonctions continues.

2. Toute fonction uniformément continue est continue, mais pas réciproquement.

On a les implications suivantes :  $(f \text{ Lipschitzienne}) \implies (f \text{ u-continue}) \implies (f \text{ continue})$ .

**Exemple 5.3.1.** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est continue mais n'est pas uniformément continue et n'est pas Lipschitzienne. En effet,  $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|$  où  $|x + y|$  est arbitrairement grand.

### 5.3.3 Métrique et applications sous additive

**Définition 5.3.6.** Une application  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est dite **sous-additive** si pour tout  $x; y \in \mathbb{R}^+$  on a :

$$g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

**Exemple 5.3.2.**

$$g(x) = |x|$$

$$g(x) = |\sin x|$$

$$g(x) = ax + b; b > 0$$

$$g(x) = \arctan(|x|)$$

$$g(x) = \ln(1 + x); x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{x}{1+x}; x \geq 0$$

**Proposition 5.3.3.** Si  $(X; d)$  est un espace métrique et  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction positive, croissante et concave, alors  $f(|x|)$  est sous-additive.

**Théorème 5.3.1.** Si  $(X; d)$  est un espace métrique et  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction croissante, sous-additive et ne s'annulant qu'en 0, alors  $(g \circ d)$  est une distance sur  $X$ .

**Corollaire 5.3.1.** Si  $(X, d)$  un espace métrique. Alors  $\forall x, y \in X$ ,  $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$  est une métrique équivalente à  $d$  sur  $X$  et  $d'(x, y) < 1$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction  $g(x) = \frac{x}{1+x}$  pour  $x \geq 0$ . La fonction  $g$  possède l'hypothèse de la proposition précédente. Donc  $d'(x; y) = \frac{d(x; y)}{1+d(x; y)}$  est une métrique sur  $X$ . Pour l'équivalence des métriques on note que  $d(x; y) = \frac{d'(x; y)}{1-d'(x; y)}$ , donc  $d(x_n; x) \rightarrow 0$  si et seulement si  $d'(x_n; x) \rightarrow 0$ .  $\square$

## 5.4 Compacité dans les espaces métriques

Notre motivation est le fameux théorème des valeurs extrêmes, rencontré dans le cours d'analyse élémentaire.

**Théorème 5.4.1.** *Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . Alors, ils existent  $x_m; x_M \in [a; b]$  tels que  $f(x_m)$  est le minimum de  $f$  et  $f(x_M)$  est le maximum de  $f$  sur  $[a; b]$ .*

Ce théorème est vraie seulement si l'intervalle est fermé et borné.

1. Si l'intervalle est ouvert le résultat est faux, par exemple

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \in ]0; 1[.$$

2. Si l'intervalle n'est pas borné le résultat est aussi faux, par exemple

$$f(x) = x; x \in [0; +\infty[.$$

L'explication topologique en est que les intervalles bornés et fermés ont une propriété spéciale, appelée la **compacité**, ce qui rend le théorème des valeurs extrêmes (et beaucoup d'autres résultats) valides.

**Théorème 5.4.2.** (Heine-Borel). *Toute partie  $K$  bornée et fermée de  $(\mathbb{R}; d_u)$  est compacte.*

En utilisant le théorème de Heine-Borel on peut avoir une version plus raffinée du théorème des valeurs extrêmes.

**Théorème 5.4.3.** *Soient  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}$  et  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors,  $f(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .*

$f(K)$  étant une partie bornée et fermée de  $\mathbb{R}$  garantie que  $f$  atteint ses valeurs extrêmes. Il est facile de trouver des ensembles qui se sont pas compacts. Mais pour trouver des exemples non triviaux de compacts il faut penser à quelques résultats.

**Théorème 5.4.4.** *Soit  $(X; d)$  un espace métrique et  $F \subseteq K \subseteq X$ ,*

- (a) *Si  $K$  est compact dans  $(X; d)$ , alors  $K$  est borné dans  $(X; d)$ .*
- (b) *Si  $K$  est compact dans  $(X; d)$ , alors  $K$  est fermé dans  $(X; d)$ .*
- (c) *Si  $K$  est compact et  $F$  est fermé dans  $(X; d)$ , alors  $F$  est compact dans  $(X; d)$ .*
- (d) *Si  $f : (X; d) \rightarrow (X'; d')$  est une application continue et  $K$  une partie compacte dans  $(X; d)$ , alors l'image  $f(K)$  est compacte dans  $(X'; d')$*

*Démonstration.* Exercice [6]

□

La compacité dans un espace métrique s'interprète comme suit

**Proposition 5.4.1.** 1. *Dans un espace métrique compact, toute suite admet (au moins) un point d'accumulation.*

2. *Toute suite de  $(X, d)$  admet une sous-suite convergente.*

3. *Toute partie infinie de  $X$  possède un point d'accumulation.*

Le théorème de Heine peut aussi se généraliser dans les espaces métriques

**Théorème 5.4.5.** (Théorème de Heine). *Si  $f : (X; d) \rightarrow (X'; d')$  est continue et  $X$  est compact, alors  $f$  est uniformément continue.*

## 5.5 Espaces vectoriels normés

Dans cette section, nous allons étudier les espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On verra qu'il y a une différence fondamentale entre les espaces vectoriels normés de dimension finie et ceux de dimension infinie, ces derniers intervenant la plupart du temps comme espaces de fonctions. Les résultats de ce chapitre portant sur la dimension infinie peuvent être vu comme les premiers rudiments d'analyse fonctionnelle.

### 5.5.1 Norme et distance

**Définition 5.5.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel. On appelle **norme** sur  $E$  une application notée  $\| \cdot \|$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\forall v \in E, \|v\| \geq 0$  et  $\|v\| = 0$  ssi  $v = 0$ .
2.  $\forall v \in E, \forall k \in \mathbb{R}, \|kv\| = |k| \times \|v\|$ .
3.  $\forall v, w \in E, \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

**Définition 5.5.2.** Un espace vectoriel  $V$  muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** ou tout simplement **espace normé**. Le réel positif  $\|v\|$  est appelé norme de  $v$ .

**Théorème 5.5.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel normé. L'application  $d$  définie par

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

est une distance sur  $V$  appelée **distance induite** par la norme de  $V$ . De plus, la topologie ainsi définie est compatible avec la structure d'espace vectoriel i.e les applications

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (k, v) &\mapsto k.v \end{aligned}$$

sont continues

*Démonstration.* Exercice La continuité des deux applications ci-dessus vient des inégalités :

$$\|(x' + y') - (x + y)\| \leq \|x' - x\| + \|y' - y\|$$

et

$$\|\lambda'x' - \lambda x\| \leq |\lambda' - \lambda| \|x'\| + |\lambda'| \|x' - x\|$$

□

Ainsi tout espace vectoriel normé est un espace métrique et donc un espace topologique. En remarquant  $\|x\| = d(0, x)$ , on obtient que la norme est une application 1-Lipschitzienne.

### 5.5.2 Exemples

1. Les normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ . Comme pour les distances, on définit les 3 normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$  à savoir :
  - (i) La norme euclidienne  $\| \cdot \|_2$
  - (ii) La norme infinie  $\| \cdot \|_\infty$
  - (iii) La norme  $\| \cdot \|_1$
2. Dans  $M_n(\mathbb{R})$  la quantité

$$\| (a_{ij}) \|_\infty := \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$$

est une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Il en est de même avec les quantités

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

et

$$\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

## 5.6 Métriques équivalentes

**Définition 5.6.1.** Soient  $d$  et  $d'$  deux métriques de  $X$ .

1. On dit que  $d$  et  $d'$  sont **topologiquement équivalentes** si l'identité

$$Id : (X; d) \rightarrow (X; d')$$

est un homéomorphisme.

Il est donc indifférent, topologiquement parlant, de travailler avec l'une ou l'autre des distances. En particulier, deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.

2. On dit que les distances  $d$  et  $d'$  sont **Lipschitz-équivalentes** s'ils existent des constantes positives  $h$  et  $k$  tel que pour tout

$$x, y \in X; hd'(x; y) \leq d(x; y) \leq kd'(x; y)$$

3. Si  $X$  est un espace vectoriel, on dit que les normes  $N$  et  $N'$  sont deux normes équivalentes s'ils existent des constantes  $h, k > 0$  tel que pour tout

$$x \in X, hN'(x) \leq N(x) \leq kN'(x)$$

**Proposition 5.6.1.** 1. Les métriques Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

2. Deux normes sont équivalentes si et seulement si leurs distances correspondantes sont équivalentes.

3. Si  $d$  et  $d'$  sont équivalentes, alors  $(X; d)$  et  $(X; d')$  ont la même topologie.

**Exemple 5.6.1.** 1. Dans  $X = \mathbb{R}^2$  on a

$$\max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 2 \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

donc  $d_1$  et  $d_\infty$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Généralement si  $X = \mathbb{R}^n$  et  $d_1; d_2; d_\infty$  sont les distances usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$d_\infty(x; y) \leq d_2(x; y) \leq d_1(x; y) \leq n d_\infty(x; y).$$

Donc  $d_1; d_2; d_\infty$  sont des métriques équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 5.6.2.** Dans un espace vectoriel de dimension finie  $E$  :

1. Toutes les normes sont équivalentes.
2. Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés.
3. Si  $F$  est un autre  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé (dimension quelconque), toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

Le résultat suivant dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé n'est jamais compacte en dimension infinie.

**Théorème 5.6.1. (Riesz).** Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, on a équivalence entre :

1.  $B_f(0, 1)$  est compacte.
2.  $E$  est de dimension finie.

## 5.7 Exercices

**Exercice 5.7.1.** Soit  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par

$$d(x, y) = |x - y|; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $d$  est une métrique sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.7.2.** Soit  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|; \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Montrer que  $d$  est une métrique sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

**Exercice 5.7.3.** Soit  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $d$  est une métrique sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.7.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On pose

$$\forall x, y \in X, d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Démontrer que  $(X, d_1)$  est aussi un espace métrique.

**Exercice 5.7.5.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On pose

$$\forall x, y \in X, d_1(x, y) = \frac{2d(x, y)}{1 + 2d(x, y)}.$$

Démontrer que  $(X, d_1)$  est aussi un espace métrique.

**Exercice 5.7.6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On pose

$$\forall x, y \in X, d'(x, y) = \frac{3d(x, y)}{2 + 3d(x, y)}.$$

Démontrer que  $(X, d')$  est aussi un espace métrique.

**Exercice 5.7.7.** Soit  $C[a, b]$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé  $X = [a, b]$ . Considérons les distances  $d$  et  $e$  définies sur  $C[a, b]$  par

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

et

$$e(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Montrer que la topologie  $\tau_e$  induite par  $e$  est moins fine que la topologie  $\tau_d$  induite par  $d$  i.e  $\tau_e \subset \tau_d$ .

**Exercice 5.7.8.** Soit  $I = [0, 1]$ . Montrer que

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\}$$

est une norme sur  $C[0, 1]$ .

---

# ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

---

Jusqu'à présent on pouvait parler de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait a priori la limite. La complétude qui est une notion métrique permet de prédire l'existence d'une limite à partir de propriétés de la suite. Dans tout ce chapitre on se placera dans le cadre d'un espace métrique  $(X, d)$ .

## 6.1 Les suites dans un espace métrique

Dans cette section, nous allons discuter les suites numériques comme une extension du même concept rencontré dans le cours d'analyse élémentaire. Rappelons la définition d'une suite

**Définition 6.1.1.** Une suite  $(x_n)$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R} : n \mapsto x_n$ .

**Définition 6.1.2.** Une suite  $(x_n)$  dans  $\mathbb{R}$  converge vers  $x$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un nombre naturel  $n_0$  tel que si  $n \geq n_0$ , alors  $|x_n - x| < \varepsilon$ .

On note  $x_n \rightarrow x$  ou bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . L'extension de cette définition sur un espace métrique  $(X; d)$  devient ;

**Définition 6.1.3.** On dit que la suite  $(x_n)$  est convergente de limite  $l$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon$$

Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  la suite  $x_n = \frac{1}{n}$  est convergente de limite  $l = 0$ .

## 6.2 Suite de Cauchy et complétude

L'intérêt des suites de Cauchy est que dans des espaces métriques convenables (les espaces complets), on peut vérifier la convergence de certaines suites sans avoir à connaître a priori la limite. On cherchera donc à exhiber le plus possible d'espaces complets.

**Définition 6.2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une suite  $(x_n)$  dans  $X$  est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

**Proposition 6.2.1.** Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.

---

*Démonstration.* En effet, supposons que  $x_n \rightarrow x$ . Alors, on a  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > n_0 \implies d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Or d'après l'inégalité triangulaire

$$n, m > n_0 \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

**Remarque 6.2.1.** Notons que la réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie. En effet, en considérant, sur  $]0, 1[, d_u$ , la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ; on voit que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy car

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0,$$

mais  $x_n \rightarrow 0 \notin ]0, 1[$ .

**Définition 6.2.2.** Un espace métrique  $(X, d)$  est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans  $X$  converge vers un élément de  $X$ .

**Définition 6.2.3.** Un espace vectoriel normé complet est dit **espace de Banach**.

Dans tel espace pour montrer qu'une suite est convergente il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy, qui ne demande pas la connaissance de la limite.

**Exemple 6.2.1.** 1.  $(\mathbb{R}; |\cdot|)$  est complet car toute suite réelle de Cauchy est convergente dans  $\mathbb{R}$ .

2.  $A = ]0; 1[$  n'est pas complet car la suite de Cauchy  $x_n = \frac{1}{n}$  ne converge pas dans  $A$ .

3.  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet car la suite définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right); x_1 = 2$$

est une suite de  $\mathbb{Q}$  qui converge vers  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 6.2.1.** Montrer qu'une suite de Cauchy dans un espace métrique  $(X, d)$  qui admet une sous-suite convergente dans  $X$  est elle-même convergente dans  $X$ .

**Proposition 6.2.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $(x_n)$  une suite dans  $X$ , et  $\sum \varepsilon_k$ , une série à termes strictement positifs convergente. Si  $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , alors  $(x_n)$  est de Cauchy.

Observons que l'intérêt de cette proposition réside dans le fait qu'elle utilise un seul indice et non deux.

*Démonstration.* Soit

$$(p, q) \in \mathbb{N}^2, d(x_p, x_q) \leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=p}^{q-1} \varepsilon_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} \varepsilon_k \rightarrow 0$$

□

**Remarque 6.2.2.** La suite  $x_n = \ln(n)$ , montre que la condition  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$  ne suffit pas pour impliquer que  $(x_n)$  est de Cauchy.

### 6.3 Caractérisation des espaces métriques complets

**Définition 6.3.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On appelle **diamètre** d'une partie  $A$  non vide de  $X$ , le réel noté  $\text{diam}(A)$  défini par  $\text{diam}(A) := \sup_{a, b \in A} d(a, b)$ .

**Théorème 6.3.1.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $(X, d)$  est complet.
2. Toute suite décroissante de fermés non vide  $(F_n)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$  a une intersection non vide  $(\bigcap_n F_n = \{x\})$ .

*Démonstration.* Supposons que  $(X, d)$  soit complet et soit  $(F_n)$  vérifiant la condition 2) du théorème. Prenons  $x_n$  dans chaque  $F_n$ . On définit ainsi une suite  $(x_n)$  vérifiant

$$d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_p); q > p.$$

La suite  $(x_n)$  est donc de Cauchy. Soit  $x$  sa limite  $\forall p$ ,  $x$  est aussi la limite de la sous suite  $(y_k)$  définie par  $y_k = x_{p+k}$ .  
 $x$  est donc limite d'une suite dans  $F_p$  et par conséquent

$$x \in \overline{F_p} = F_p.$$

En conclusion, on a  $x \in (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n)$ . Comme

$$\text{diam}(\bigcap F_n) = 0$$

on a :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = x$$

Réciproquement, supposons (1)

Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy. Posons

$$A_n = x_n, x_{n+1}, \dots$$

et

$$F_n = \overline{A_n}$$

tel que

$$F_{n+1} \subset F_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$$

car  $(x_n)$  est de Cauchy. □

**Proposition 6.3.1.** Un espace vectoriel normé  $E$  est complet ssi toute série d'éléments de  $E$  absolument convergente est convergente.

## 6.4 Exemples d'espaces complets

1. Tout espace métrique dont toutes les boules fermées sont compacts est complet.  
En effet, une suite de Cauchy  $(x_n)$  est toujours bornée, donc contenue dans une boule fermée.  
Par compacité, on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite qui converge. Donc  $(x_n)$  converge.  
En particulier :
2. Tout espace métrique compact est complet.
3.  $(\mathbb{R}, d_u)$  est complet i.e  $\mathbb{R}$  est complet pour la distance usuelle.
4. Tout produit fini d'espaces complets muni de la topologie produit est complet.
5. L'intersection ou la réunion de sous-espaces complets d'un espace métrique est complète.
6.  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet pour la distance usuelle. En effet, si  $(r_n)$  est une suite de nombres rationnels convergeant vers  $\sqrt{2}$  alors  $(r_n)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$  mais ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 6.4.1.** *Tout sous espace complet d'un espace métrique est fermé.*

*Démonstration.* Soit  $F$  un sous-espace complet d'un espace métrique  $(X, d)$ . Soit  $x \in \overline{F}$ . Alors  $x$  est la limite d'une suite d'éléments de  $F$ . La suite étant convergente, elle est de Cauchy.  $F$  étant complet et  $x \in F$ , on a donc  $\overline{F} \subset F$ . D'où  $\overline{F} = F$ .  $\square$

## 6.5 Théorème du point fixe de Banach et applications

On donne ici un énoncé très général, qui se décline dans de nombreuses situations et qui conduit à des résultats très profonds (par exemple pour la résolution des équations différentielles).

**Définition 6.5.1.** *Une application  $f : (E, d) \rightarrow (F, d')$  est dite **contractante** si elle est Lipschitzienne de rapport  $k$ , avec  $0 < k < 1$  c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), 0 < k < 1$$

**Définition 6.5.2.** *Soit  $f : (E, d) \rightarrow (E, d)$  une application. Un **point fixe** de  $f$  est un point  $x \in E$  tel que  $f(x) = x$ .*

**Proposition 6.5.1.** *Toute contraction sur un espace métrique  $X$  est uniformément continue.*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ . Pour tout  $x, y \in X$  tel que  $d(x, y) < \delta$ , on a  $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < \varepsilon$ .  $\square$

Le théorème qui suit est très important et est un des théorèmes qui a le plus d'applications en Analyse.

**Théorème 6.5.1. (Banach, 1922).** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet. Soit  $f : E \rightarrow E$  une application contractante (i.e que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ). Alors  $f$  possède un et seul point fixe  $l \in E$  (i.e qu'il existe un et un seul  $l \in E$  tel que  $f(l) = l$ ). De plus, si  $x_0 \in E$  et si  $(x_n)$  est la suite donnée par la relation de récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente et converge vers  $l$ .

*Démonstration.* On vérifie d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts  $l, l' \in E$  i. e tel que  $f(l) = l, f(l') = l'$ , on a :

$$\begin{aligned} d(l, l') &= d(f(l), f(l')) \leq kd(l, l') \\ &\Rightarrow (1 - k)d(l, l') \leq 0 \end{aligned}$$

Comme  $(1 - k) > 0$ , alors

$$d(l, l') \leq 0 \implies d(l, l') = 0 \implies l = l'.$$

On montre ensuite l'existence. Soit  $x_0 \in E$  et soit  $(x_n)$  la suite de récurrence définie par

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$$

Par une récurrence immédiate, on a pour tout  $n \geq 0$  on a

$$d(x_{n+1}; x_n) = d(f(x_n); f(x_{n-1})) \leq kd(x_n; x_{n-1}) \leq k^n d(x_1; x_0)$$

On en déduit que si  $m = n + p$ ,

$$d(x_m; x_n) = d(x_{n+p}; x_n) \tag{6.1}$$

$$= d(x_{n+p}; x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}; x_{n+p-2}) \cdots + d(x_{n+1}; x_n) \tag{6.2}$$

$$\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n)d(x_1; x_0) \tag{6.3}$$

$$\leq k^n d(x_1; x_0) \sum_{i=0}^{p-1} k^i \tag{6.4}$$

$$\leq \frac{k^n(1 - k^p)}{1 - k} d(x_1, x_0) \quad \text{puisque } 1 - k^p < 1 \text{ on obtient} \tag{6.5}$$

$$< \frac{k^n}{1 - k} d(f(x_0), x_0) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \text{ puisque } k \in ]0, 1[ \tag{6.6}$$

La suite  $(x_n)$  est donc de Cauchy, et comme  $X$  est complet, il existe  $a \in X$  tel que  $x_n \rightarrow a$ . Or  $f$  est uniformément continue (car Lipschitzienne) donc  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

Mais  $x_{n+1} = f(x_n)$  Comme  $f$  est continue, en passant à la limite, on obtient  $a = f(a)$  et donc  $a$  est un point fixe de  $f$ .  $\square$

**Remarque 6.5.1.** Le théorème du point fixe de Banach est un outil très utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les problèmes de Cauchy associés à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou même à des équations aux dérivées partielles (EDP).

## 6.6 Espaces de Banach

**Définition 6.6.1.** On appelle *espace de Banach* un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé complet.

**Proposition 6.6.1.** Les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.

**Exemple 6.6.1.** L'espace  $C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$  muni de  $\| \cdot \|_\infty$  est un espace de Banach. En revanche  $C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  n'est pas complet. On prend la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0 \\ 1 - (n+1)x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{pour } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On a alors

$$\| f_n - f_m \|_1 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(m+1)} \leq \varepsilon$$

pour  $m, n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy mais ne peut pas converger dans  $C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$  pour la norme  $\| \cdot \|_1$ . Une fonction qui vaut 1 sur  $[-1, 0[$  et 0 sur  $]0, 1]$  n'est pas continue.

## 6.7 Exercices

**Exercice 6.7.1.** Soit  $X = \mathbb{R}$  avec les métriques suivantes :

1.  $d(x; y) = |x^3 - y^3|$
2.  $d(x; y) = |e^x - e^y|$
3.  $d(x; y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$

Pour qu'elles de ces métriques  $(X; d)$  est-t-il complet ?

---

---

# Bibliographie

---

- [1] SEYMOUR LIPSCHUTZ, *TOPOLOGIE : Cours et Problèmes*, SERIE SCHAUM.
  - [2] Alain Faisant, *TP et TD de Topologie Générale*, Hermann, 4ème Edition (1991)
  - [3] JAMES R. MUNKRES, *Topology*, Second Edition, Pearson Education International (2000).
  - [4] S. Kumaresan, *Topology of Metric Spaces*, Alpha Science International LTD (2005).
  - [5] Pierre MATHONET, *Topologie générale : Notes de Cours*, Université de Liège 2013-2014.
  - [6] El Bachir Yallaoui, *Topologie générale élémentaire. Licence de Mathématiques LMD*, Université Ferhat Abbas sétif1. Deuxième Édition 2016
-