UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULRE DES SCIENCES

SECTION POLYTECHNIQUE

BAC I, Juin 2025

SYLLABUS DE GEOMETRIE II :

Théorie des Courbes et des Surfaces(60 heures)

Par :

Dr Rénovat NKUNZIMANA, Ph.D

Table des matières

Chapitre Un

Préambule

1.1 Présentation du contenu

Le présent cours traite la théorie des courbes et surfaces. Il s'agit d'un cours de 4 crédits(60 heures) dont 3à heures de cours magistral et 30 de TD et TP. Il est déstiné aux étudiants de Bac I Mathématiques et Physique de la Faculté des scieces à l'Université du Burundi. Le cours commence avec les rappels du calcul vectoriel et d'analyse vectorielle, un outil plus puissant pour aborder la géométrie des courbees et des surfaces dans l'espace. Ce cours est subdivisé en 5 chapitre dont le premier consiste à présenter le contenu du cours, les objectifs, la méthodologie d'enseignement ainsi que les méthodes d'évaluation. Le second chapitre nous parles des éléments du calcul vectoriel et d'analyse vectorielle. Dans le troisième chapitre nous étudions les courbes paramétrées dans leurs généralités et dans le troisième chapitre on analyse la géométrie des courbes planes. Le quatrième chapitre généralise le troisième en abordant la théorie des courbes spatiales et en fin le dernier chapitre nous parle des surfaces paramétrées de l'espace. Chaque chapitre est accompagné des exercices corrigés et non corrigés ains que les travaux dirigés et pratiques.

1.2 Objectifs du cours

1.2.1 Objectif général

L'objectif général de ce cours est d'étudier localement les propriétés géométriques des courbes et des surfaces.

1.2.2 Objectifs spécifiques

A la fin de ce cours, l'étudiant doit être capable de :

- distinguer les courbes planes des courbes spatiales ;
- différencier une courbe paramétrée d'une courbe géométrique ;
- reparamétriser une courbe par abscisse curviligne ;
- calculer la courbure et la torsion de n'importe quelle courbe et les utiliser pour classifier les courbes ;
- déterminer le trièdre de Frenet d'une courbe spaciale ;
- faire du calcul différential sur les surfaces paramétrées ;
- calculer les coubures usuelles des surfaces ;
- utiliser la courbure de Gauss pour classifier les surfaces.

1.3 Méthodologie d'enseignement

1.3.1 Cours magistral

Les grandes lignes de chaque chapitre seront présentées sur un beamer préparé en LateX. Celui ci sera accompagné par des explications et des interactions ainsi que des questions réponses. Ainsi, on explique brièvement le but de chaque chapitre et son utilité dans les autres domaines surtout en Physique et en dynamique des objets matériels. On combine diverses méthodes lors de l'enseignement. Il s'agit des méthodes interactive, participative et expositive. Au début du cours un syllabus éléctronique et support physique sera donné aux étudiants avec indication du lieu où on peut le trouver en ligne surn le site de l'Université du Burundi.

1.3.2 Mode d'évaluation

Conformément au règlement académique en vigueur l'évaluation des des apprentissages est constitué de l'évaluation formative sous forme d'interrogations, de devoirs à domicile ou de travaux pratiques et dirigés qui notés sur 40% des côtes et une évaluation sommative par un examen écrit à la fin du second semestre qui compte sur 60% des notes.

1.3.3 Des travaux pratiques et dirigés

On familialise les étudiants à faire des des calculs mathémmatiques avec une interprétation géométrique et physique. On leur demande de vérifier certaines assertions données dans le texte. On propose aussi des exercices corrigés et des exercices non corrigés. Des devoirs en classe et des devoirs de maisons seront donnés aux étudiants et seront corrigés pendant la séance suivante.

1.4 Prerequis

Pour pouvoir bien assimiler ce cours, l'étudiant doit maitriser le cours d'analyse multivariable et d'algèbre linéaire. Il faut aussi des notions de géométrie plane et spatiale. Le calcul différentie et intégral est aussi indispensable à la maîtrise de ce cours.

Chapitre Deux

Rappels d'analyse vectorielle

On rappelle ici quelques notions d'analyse vectoriel dans les espaces affines tridimentionnels.

2.1 Calcul vectoriel

2.1.1 Produit scalaire

Nous nous plaçons dans l'espace vectoriel euclidien à 3 dimensions rapporté à un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ des vecteurs de cet espace de coordonnées respectives

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$$

Définition 2.1.1. *On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ le scalaire*

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Interprétation géométrique :

$$\boxed{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \|\overrightarrow{b}\| \times \cos\alpha}$$

avec

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

En particulier si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, on a $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$

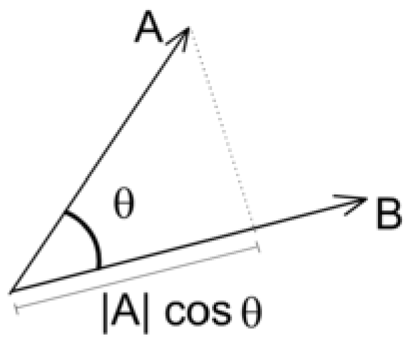

FIGURE 2.1 – Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est donc l'aire de la surface de longueur la norme du vecteur $\vec{b}$ et de largeur a', norme de la projection de $\vec{a}$ sur le support de $\vec{b}$.

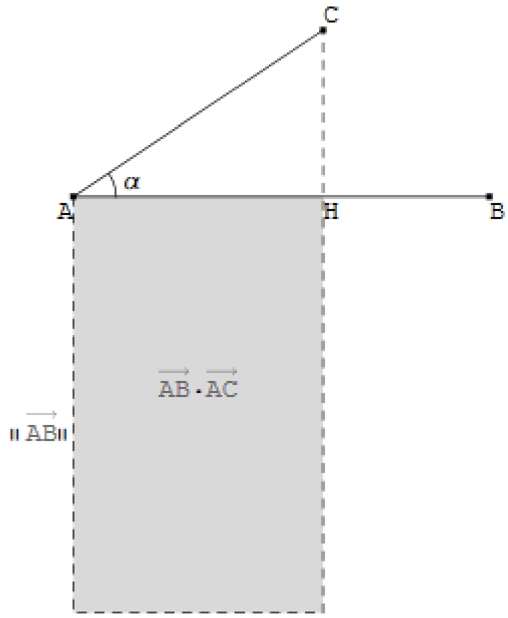

FIGURE 2.2 – Interprétation géométrique du produit scalaire

2.1.2 Produit vectoriel

Définition 2.1.2. *Le produit vectoriel de deux vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *est le vecteur noté* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ *et défini par*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$$

Propriétés :

1. Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$ et donc, en particulier $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
2. Déplacement des scalaires : $\forall \lambda$ scalaire , $\forall$ vecteur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, on a :

$$(\lambda\overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge (\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$$

3. Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition des vecteurs.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) &= \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \\ (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a} \wedge (\lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}) = \lambda\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \\ (\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} + \mu\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \end{cases}$$

2.1.3 Quelques théorèmes

Lemme 2.1.1. *Deux vecteurs sont parallèles si ils sont proportionnels ou si l'un des deux est le vecteur nul. Dès lors,* $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$

Démonstration. On le montre facilement par l'écriture de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ sous forme d'un déterminant. □

Lemme 2.1.2. *Si* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *sont orthogonaux , alors* $\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$

Démonstration. En effet ;

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &\quad - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= -a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\ &= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= -(\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b})^2 = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2$$

□

Lemme 2.1.3. *Le produit vectoriel de 2 vecteurs non parallèles est égal au produit vectoriel de l'un d'eux par la projection orthogonale de l'autre sur un plan perpendiculaire du premier.*

Démonstration. $\overrightarrow{a} \perp \pi$
$b' =$ projection orthogonale de $\overrightarrow{b}$ sur π
$b'' =$ projection orthogonale de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b}' + \overrightarrow{b}'') = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}' + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}'' = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}'$ □

Théorème 2.1.1. *Si $\overrightarrow{a}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{b}$ alors $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est un vecteur :*

1. *orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et à $\overrightarrow{b}$*
2. *tel que les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ forment une base directe c-à-d de même orientation que $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$*
3. *tel que $\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$*

Démonstration. 1. $\begin{cases} (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0 \\ (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3 = 0 \end{cases}$

2. Montrons que la matrice de passage entre $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ est d'un Jacobien positif. En effet ce Jacobien est le suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0$$

3. Par le lemme 3, on a : $\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}'\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}'\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}})$

$\sin(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}) = \dfrac{\|\overrightarrow{b}'\|}{\|\overrightarrow{b}\|}$

$\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}'\|$ (base $\times$ hauteur)

$=$ Aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

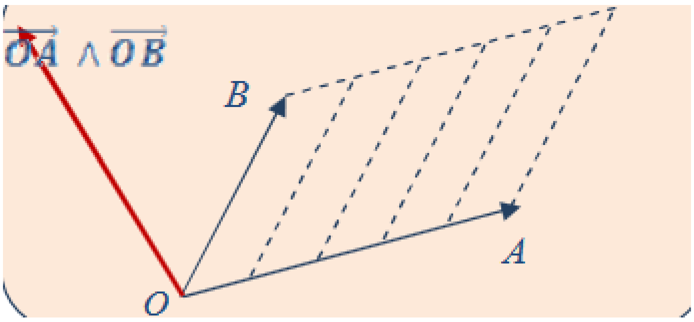

FIGURE 2.3 – Produit vectoriel

□

2.1.4 Produit mixte

Définition 2.1.3. *Le produit mixte de 3 vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ (dans l'ordre) est un réel noté $\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$ ou $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ et défini par*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.1.5 Conséquences immédiates

A partir des propriétés des déterminants , on établit aisément que :

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

Théorème 2.1.2. *La CNS pour que les trois vecteurs soient linéairement dépendants est que leur produit mixte soit nul.*

Démonstration. **CN** : Si les 3 vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement dépendants , le vecteur $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{b}$ et à $\overrightarrow{c}$, donc perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ et $\overrightarrow{a}$ est parallèle à ce plan. On effectue donc le produit scalaire des vecteurs orthogonaux qui est donc nul.

CS : Si $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$, on sait de part les propriétés des déterminants qu'il existe des combinaisons linéaires des lignes de ce déterminant et donc telles que : $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. □

2.1.6 Interprétation géométrique du produit mixte

La valeur absolue du produit mixte de 3 vecteurs est égal au volume du parallélépipède construit sur ces 3 vecteurs :

$$|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| = |\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})| = |\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\| \cos\varphi|$$
$$\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}})$$

$\|\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\| \equiv$ Aire de la base du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$
$\|\overrightarrow{a}\| \cos\varphi \equiv$ hauteur du parallélépipède.

2.2 Fonctions vectorielles

2.2.1 Définition, Limite, Continuité et Dérivabilité

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

Définition 2.2.1. *Une fonction vectorielle est une application qui à tout point $x \in \mathbb{R}^p$ associe un et un seul vecteur $\overrightarrow{F(x)}$ de V , par opposition d'une fonction prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction scalaire.*

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$$
$$\begin{cases} \overrightarrow{F(x)} = (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)) \\ \\ F_i(x) = F_i(x_1, x_2, \cdots, x_p) \end{cases}$$

Limite

On dit que la fonction $\overrightarrow{F}$ a pour limite $\overrightarrow{F(x_0)}$ pour $x \to x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} \|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}\| = 0$$

Continuité

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \overrightarrow{F(x)} = \overrightarrow{F(x_0)}$

Dérivée

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F(x)}$ est dérivable en x_0 par rapport à $x_k, 1 \leq k \leq p$, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{F}(x_0 + h\overrightarrow{e_k}) - \overrightarrow{F}(x_0)}{h}$$

existe, où

$$\overrightarrow{e_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} 1 \to (\text{a la } k^{\text{ieme}}\text{position})$$

Cette limite est notée par :

$$(D_{x_k}\overrightarrow{F})_{x_0}$$

et

$$x_0 + h\overrightarrow{e_k} = \begin{bmatrix} x_{0_1} \\ x_{0_2} \\ \vdots \\ x_{0_k} + h \\ \vdots \\ x_{0_p} \end{bmatrix}$$

La fonction $\overrightarrow{F(x)}$ est dite dérivable en x_0 si toutes les limites pour $k = 1, 2, \cdots, p$ existent.

Théorème 2.2.1. *La fonction $\overrightarrow{F(x)}$ possède une limite ou est dérivable en un point si et seulement si chacune des composantes de $\overrightarrow{F(x)}$ possède une limite ou est dérivable en ce point :*

si $\overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix}$ *avec* $F_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$D_{x_k}\overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} D_{x_k}F_1 \\ \vdots \\ D_{x_k}F_n(x) \end{bmatrix}$

Nous pouvons aussi généraliser aux fonctions vectorielles les notations utilisées pour les fonctions scalaires en écrivant : $\overrightarrow{F} \in C^0(U)$ ou $\overrightarrow{F} \in C^k(U)$ avec $U \subset \mathbb{R}^p$ pour les fonctions de classe C^k.

Propriétés de la dérivée

1. Si $\overrightarrow{F}(x)$ et $\overrightarrow{G}(x)$ sont dérivables alors leur produit scalaire $\overrightarrow{F}(x).\overrightarrow{G}(x)$ est dérivable et on a :
$$D_{x_k}[\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G}] = D_{x_k}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G} + \overrightarrow{F}.D_{x_k}\overrightarrow{G}$$
2. Si $\overrightarrow{F}(x)$ et $\overrightarrow{G}(x)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dérivable alors leur produit vectoriel $\overrightarrow{F}(x) \wedge \overrightarrow{G}(x)$ est dérivable et on a :
$$D_{x_k}[\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{G}] = D_{x_k}\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F} \wedge D_{x_k}\overrightarrow{G}$$
3. Si $\overrightarrow{F}(x), \overrightarrow{G}(x), \overrightarrow{H}(x)$ sont 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont dérivables, alors le produit mixte est dérivable (C_1) et on a :
$$D_{x_k}[\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}] = (D_{x_k}\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) + (\overrightarrow{F}, D_{x_k}\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) + (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, D_{x_k}\overrightarrow{H})$$
Conséquence de 1) et 2).

Démonstration. La démonstration des propriétés 1) et 2) se fait par passage aux composantes + Leibnitz
$$\begin{aligned} D_{x_k}[\overrightarrow{F}.(\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{H})] &= D_{x_k}\overrightarrow{F}.(\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{H}) + \overrightarrow{F}.D_{x_k}(\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{H}) \\ &= D_{x_k}\overrightarrow{F}.(\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{H}) + \overrightarrow{F}.[D_{x_k}\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{H}] + \overrightarrow{F}.[\overrightarrow{G} \wedge D_{x_k}\overrightarrow{H}] \end{aligned}$$
□

4. Si $\overrightarrow{F(x)}$ est normée et dérivable et si le vecteur $D_{x_k}\overrightarrow{F}$ est non nul alors $D_{x_k}\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{F}$.
En effet,
$$\overrightarrow{F}.\overrightarrow{F} = 1$$
$$\Rightarrow D_{x_k}(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{F}) = 0 \Leftrightarrow 2D_{x_k}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{F} = 0 \Longrightarrow D_{x_k}\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{F}$$

2.2.2 Opérateurs gradient, divergence et rotationel

1. Soit f une fonction scalaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \to f(x)$

On appelle **gradient** de f , la fonction vectorielle notée *gradf* ou $\overrightarrow{\nabla} f$
$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{bmatrix} D_{X_1} f \\ D_{X_2} f \\ \vdots \\ D_{X_n} f \end{bmatrix}$$
Ici $\overrightarrow{\nabla}$ se lie " nabla" et est donc l'opérateur différentiel :
$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_1} D_{X_1} + \overrightarrow{e_2} D_{X_2} + \cdots + \overrightarrow{e_n} D_{X_n}$$

2. Soit
$$\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n X \to \overrightarrow{F}(X)$$
une fonction vectorielle dérivable. On appelle **divergence** de $\overrightarrow{F}$, la fonction scalaire notée
$$div\overrightarrow{F} = D_{X_1}F_1 + D_{X_2}F_2 + \cdots + D_{X_n}F_n = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}$$

3. Soit $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$X \to \overrightarrow{F}(X)$, une fonction vectorielle dérivable. On appelle **rotationnel** de $\overrightarrow{F}$, la fonction vectorielle notée
$$rot\overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} D_{X_2}F_3 - D_{X_3}F_2 \\ D_{X_3}F_1 - D_{X_1}F_3 \\ D_{X_1}F_2 - D_{X_2}F_1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}$$

CHAPITRE TROIS

COURBES PARAMÉTRÉES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN $\mathbb{R}^n$

3.1 Introduction

Intuitivement, une courbe dans l'espace de dimension n est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. On dit d'un tel objet qu'il est 1-dimensionnel. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Quand le paramètre t parcourt l'intervalle I, le point $\gamma(t)$ parcourt la courbe. Une telle application γ est une courbe paramétrée. Dans ce chapitre, nous étudions les courbes paramétrées dans leur généralité etdans les deux chapitres qui suivent nous allons particulariser ces courbes dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.1.1. *Soit $d \in \{2, 3\}$. On appelle* ***courbe paramétrée*** *de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ une application de classe C^k $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

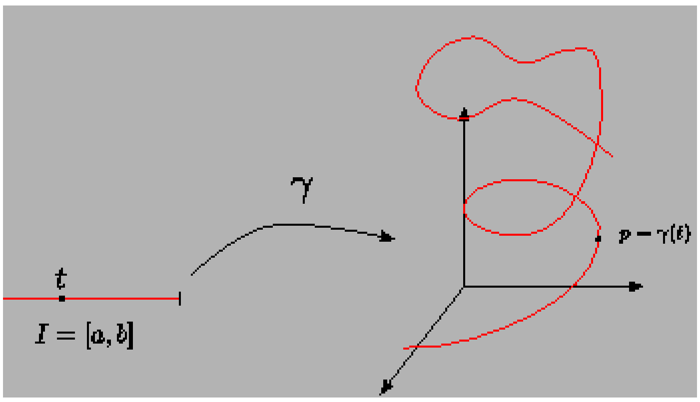

FIGURE 3.1 – Courbe paramétrée

L'ensemble $\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$ est appelé le support géométrique de $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. On dit que Γ est **courbe géométrique** et que γ est une **paramétrisation** de Γ. On peut remarquer que la courbe paramétrée comporte plus d'informations que la courbe géométrique : quand t parcourt l'intervalle I, le point $\gamma(t)$ parcourt Γ. Autrement dit, la courbe paramétrée donne non seulement le support géométrique, mais aussi une façon de le parcourir. Dans la suite, quand on considèrera la restriction d'une courbe γ à un intervalle fermé $[a, b] \subset I$, on écrira $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Si $n = 2$, on dit que la courbe est plane et si $n = 3$ on parle de courbe spaciale ou courbe gauche. Cette définition s'interprète comme suit : On considère un point se déplaçant dans le plan ou dans l'espace au cours du temps. A l'instant t, sa position est $\gamma(t)$ et le support de l'arc est la trajectoire complète du point.

3.2 Exemples de courbes paramétrées

Exemple 3.2.1. *Le support géométrique de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par*

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), t)$$

est une hélice.

Exemple 3.2.2. *Considérons la courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (Rt, R\sqrt{1-t^2}).$$

De l'équation $x^2(t) + y^2(t) = R^2$, on déduit que $\gamma(t)$ appartient au cercle de rayon R et de centre $(0, 0)$. Plus précisément, le support géométrique de γ est le quart de cercle entre les points $(R, 0)$ et $(0, R)$. Or ce support géométrique admet aussi une autre paramétrisation $\widetilde{\gamma} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\widetilde{\gamma}(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta)).$$

Exemple 3.2.3. ***Le segment de droite.*** *Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace . Soit $I = [0, 1]$ et $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ avec*

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_A + tx_B \\ y(t) = (1-t)y_A + ty_B \\ z(t) = (1-t)z_A + tz_B \end{cases}$$

φ est une paramétrisation du segment $[A, B]$ courbe géométrique associée tel que $\varphi[0, 1] = [A, B]$.
En effet,

$$\varphi(0) = (x_0, y_0, z_0) = (x_A, y_A, z_A) = A$$

et

$$\varphi(1) = (x_1, y_1, z_1) = (x_B, y_B, z_B) = B.$$

et $\forall t\ \in]0, 1[, \varphi(t)$ est le point du segment $[AB]$ dont le rapport de la distance à A par rapport à la longueur de $[AB]$ est t.
Notons que si on définit $\varphi_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$
avec

$$\begin{cases} x_2(t) = tx_A + (1-t)x_B \\ y_2(t) = ty_A + (1-t)y_B \\ z(t) = tz_A + (1-t)z_B \end{cases}$$

On obtient le même segment de droite $[AB]$ mais parcouru en sens inverse (de B a A). Ainsi on a deux paramétrisations différentes qui donnent la même courbe géométrique $C = \varphi([0, 1]) = [AB]$.

Exemple 3.2.4. ***Le cercle.*** *Soit $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $R > 0$ et $I = [0, 2\pi]$ et $\varphi(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t, z_0)$. On obtient comme courbe géométrique un cercle centre en P_0 et de rayon R. Notons que ce cercle est contenu dans le plan $z = z_0$. On a une courbe plane horizontale . Cette courbe n'est pas exactement un paramétrage du cercle car le point $(x_0 + R, y_0, z_0)$ correspond à deux temps 0 et 2π. En revanche la restriction de φ a $[0, 2\pi[$ est un paramétrage.*

Remarque 3.2.1. *A partir de ces exemples, nous remarquons qu'une même courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations.*

3.3 Reparamétrisation

Prenons une route allant de Bujumbura à Uvira et modélisons-la par une courbe géométrique Γ ! Prenons maintenant une voiture qui part de Bujumbura à un instant $t = 0$ et qui arrive à Uvira à un instant $t = 30$ minutes. Le trajet de cette voiture est naturellement modélisé par la courbe paramétrée $\gamma : [0, 30] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ qui à chaque instant t, donne la position $\gamma(t)$ de la voiture. Prenons maintenant un vélo qui va parcourir ce même trajet mais en mettant bien entendu un peu plus de temps, par exemple 80 minutes. Cela nous définit une autre paramétrisation $\widetilde{\gamma} : [0, 80] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ qui est différente de γ, mais qui a exactement le même support géométrique Γ.

Il est donc possible de reparamétrer une courbe géometrique. Avant de passer à la reparamétrisation, rappelons d'abord la notion de difféomorphisme.

Définition 3.3.1. *Soient U et V deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : U \to V$ est un C^1 difféomorphisme si :*

- *f est une bijection de U dans V.*
- *f et f^{-1} sont toutes les deux de classe C^1.*

Définition 3.3.2. *Prenons maintenant une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 et un difféomorphisme $\varphi : J \to I$ (avec J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). Alors $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée qui a exactement le même support géométrique que γ. On dit alors que φ est un* ***changement de variable admissible*** *et que $\gamma \circ \varphi$ est une* ***reparamétrisation*** *de γ.*

Il est donc important de distinguer les propiétés de Γ qui sont indépendantes de la paramétrisation. De fait si $f : J \to I$ est une application telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$, alors $\gamma \circ f : J \to \mathbb{R}^n$ définie une autre paramétrisation de la courbe Γ. Comme $f'(t) \neq 0$, alors $f'(t)$ est soit positive, soit négative. Si elle est positive les courbes γ et $\gamma \circ f$ ont la même orientation, sinon f change l'orientation de la courbe.

Exemple 3.3.1. *L'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donné par $\gamma(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique la parabole $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière. L'application $f(t) = t^3$ pour $t \in \mathbb{R}$ ne satisfait pas que $f'(t) \neq 0$, cela signifie que la courbe $\gamma \circ f(t) = (t^3, t^6)$ n'est pas une paramétrisation de la parabole. Le support reste la parabole, mais elle a par exemple un point singulier en $t = 0$.*

3.3.1 Arc régulier de courbes(A.R.C)

Définition 3.3.3. *On appelle* ***arc régulier des courbes (A.R.C)*** *l'ensemble des point $P(u)$ tel que ces points soient représentés par une fonction vectorielle $\overrightarrow{OP} = P(u)$ vérifiant :*

1. $P : I \subset \mathbb{R} \to E$
   $u \mapsto P(u)$; *avec* $E = \mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$
2. $P(u) \in C^1(U), U$ *ouvert d* $\mathbb{R}$
3. $D_u \overrightarrow{P}(u) \neq \overrightarrow{0}, \forall u \in U$

$P(u)$ *est appelé la représentation paramétrique ou le paramétrage de l'arc.*

Une courbe paramétrée peut être vue comme la réunion finie des arcs réguliers de courbes orientés $C_1, C_2, ..., C_r$ telle que l'extrémité de C_1 coïncide avec l'origine de C_2 etc.
On appelle origine de la courbe, l'origine de C_1 et l'extrémité de la courbe, l'extrémité de C_r.

Exemple 3.3.2. *On considère dans* $\mathbb{R}^2$ *le paramétrage* $P(u) = (u - sinu, 1 - cosu)$ *où* $u \in]0, 4\pi[$

i. $u \longrightarrow P(u)$ *est bijectif pp*

ii. $P(u) \in C^\infty(]0, 4\pi[)$

iii. $D_u \overrightarrow{p} = (1 - cosu, sinu) \neq \overrightarrow{0}$ *sauf en* $u = 2\pi$

Alors $P(u)$ *représente une courbe, union de 2 arcs* C_1 *et* C_2 *:*

$$C_1 = \{P(u) \in \gamma; u \in]0, 2\pi]\}$$

et

$$C_2 = \{P(u) \in \gamma; u \in [2\pi, 4\pi[\}$$

Soient (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrés. On dit qu'ils sont C^k-équivalents s'il existe un C^k-difféomorphisme φ de I sur J tel que l'on ait $g = f \circ \varphi$. On dit encore que (J, g) est un **paramétrage admissible** de l'arc (I, f). La relation être C^k-équivalent est une relation d'équivalence sur les arcs paramétrés de classe C^k. On appelle arc géométrique de classe C^k toute classe d'équivalence pour cette relation.

3.3.2 Longueur d'un A.R.C et abscisse curviligne

Comment mesurer la longueur d'une courbe ? Une façon naturelle de procéder consiste à approcher cette longueur par la longueur d'une ligne polygonale dont les sommets sont sur la courbe. La longueur de la ligne polygonale est clairement inférieure à celle de la courbe, mais on imagine bien que si on rajoute des sommets en diminuant la distance entre deux sommets consécutifs, la longueur de la ligne polygonale va tendre vers la longueur de la courbe. La définition de la longueur d'une courbe repose sur cette idée

Définition 3.3.4. *La longueur d'une courbe paramétrée* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *est donnée par :*

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<...<t_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \right\|,$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ *de l'intervalle* $[a, b]$*,* n *étant quelconque. De plus, si* $l(\gamma)$ *est fini, on dit que la courbe* γ *est rectifiable.*

Remarque 3.3.1. *La longueur ne dépend pas de la paramétrisation.*

Longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Si on augmente la densité des sommets de la ligne polygonale P_n le long de la courbe, alors la longueur de P_n approche celle de la courbe. La définition précédente est géométrique et correspond à l'intuition que l'on peut avoir de la longueur. Ceci dit, elle n'est pas forcément pratique pour effectuer des calculs. Le théorème suivant exprime la longueur d'une courbe paramétrée par une formule intégrale.

Théorème 3.3.1. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^1. Alors γ est rectifiable et on a :*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Démonstration. Considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$. Nous avons pour tout $i \in \{0, ..n-1\}$:

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Cela implique en sommant sur i :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \right\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

En passant maintenant au supremum sur toutes les subdivisions, on obtient que γ est rectifiable et vérifie :

$$l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Montrons maintenant l'égalité souhaitée. Pour cela, introduisons la fonction

$$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$$

qui donne la longueur de la courbe entre les paramètres a et t :

$$\forall t \in [a,b], \phi(t) = l\left(\gamma_{|[a,t]}\right).$$

Prenons $t \in [a,b]$ et h vérifiant $t + h \in [a,b]$. La longueur de la courbe entre les paramètres t et $t+h$ étant plus longue que la longueur du segment reliant $\gamma(t)$ à $\gamma(t+h)$, on a :

$$\frac{1}{|h|} \left\| \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+h)} \right\| \leq \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}.$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{|h|} \left\| \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+h)} \right\| \leq \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du.$$

Les membres de droite et de gauche ont la même limite $\|\gamma'(t)\|$, ce qui implique que ϕ est dérivable en t et que l'on a $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ $\square$

Exemple 3.3.3. *La longueur de l'hélice paramétrée par*

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), at)$$

avec

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

est donnée par :

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2} dt = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}.$$

Remarquons au passage que si $a = 0$, on retrouve que la longueur d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$

3.3.3 Paramétrisation par abscisse curviligne ou par la longueur d'arc

Maintenant que l'on sait calculer la longueur d'une courbe, il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation, on peut reprendre l'exemple de la courbe Γ qui modélise la route Bujumbura-Uvira.

Exemple 3.3.4. *On a déjà donné deux paramétrisations possibles de cette courbe, mais il est aussi possible d'en définir une troisième en repérant chaque point de Γ par sa distance au point d'origine, à savoir Bujumbura. La longueur du trajet étant de 20 kilomètres, cela nous définit naturellement la courbe paramétrée $\alpha : [0, 20] \to \mathbb{R}^2$ qui à chaque longueur $s \in [0, 20]$ associe le point $\alpha(s)$ sur la courbe Γ qui est à une distance s du point de départ. Cette paramétrisation est dite* ***normale*** *ou* ***par abscisse curviligne****. Elle est assez naturelle dans le sens où elle ne dépend pas de la vitesse d'un véhicule qui parcourt cette courbe (plus exactement, cette vitesse est constante).*

On peut formeliser cette définition :

Définition 3.3.5. *Une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ d'une courbe géométrique Γ est dite* ***normale*** *ou* ***par abscisse curviligne*** *si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$ la longueur de la courbe géométrique entre les points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ est exactement $t_2 - t_1$:*

$$l(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1.$$

En pratique, on n'a pas forcément une paramétrisation normale. Si on veut en avoir une, il faut reparamétrer la courbe. Pour cela, on a besoin de la notion d'abscisse curviligne.

Définition 3.3.6. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0 est la fonction $s_{t_0} : I \to \mathbb{R}$ donnée par :*

$$\forall t \in I \quad s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du.$$

Géométriquement, $s_{t_0}(t)$ est la longueur de la courbe géométrique $\Gamma = \gamma(I)$ entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. Le résultat suivant nous indique que toute courbe paramétrée régulière de classe C^1 peut être reparamétrée par abscisse curviligne.

Théorème 3.3.2. *Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne $s_{t_0}^{-1} : J \to I$ est un changement de variable admissible et $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ s_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que γ.*

Démonstration. Admis □

Corollaire 3.3.1. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 de support Γ. On note $l = l(\Gamma)$ la longueur de Γ. Alors la courbe $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ s_a^{-1} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ est une reparamétrisation normale de γ.*

Intuitivement, si on "déroule" une courbe géométrique Γ de longueur l le long d'une droite, on obtient un segment qui est aussi de longueur l et qui peut être identifié à l'intervalle $I = [0,l]$. La correspondance point par point entre I et Γ donne naturellement une paramétrisation normale $\widetilde{\gamma} : [0,l] \to \Gamma$. Par convention, on note souvent s le paramètre d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne et on note souvent t le paramètre dans le cas d'une paramétrisation quelconque.

Proposition 3.3.1. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. Alors la paramétrisation γ est normale si et seulement si pour tout $s \in I$ on a : $\|\gamma'(s)\| = 1$.*

Démonstration. Si la paramétrisation est normale, alors l'abscisse curviligne à partir du point t_0 de γ vérifie pour tout $t \in I$: $s_{t_0}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = t - t_0$. En dérivant, cela donne pour tout $t \in I$: $s'_{t_0}(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$. Réciproquement, si pour tout $s \in [I$ on a $\|\gamma'(s)\| = 1$, alors pour tout $[t_1, t_2] \subset I$:

$$l(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(s)\| ds = t_2 - t_1.$$

□

En général, nous ne pouvons trouver explicitement la paramétrisation par longueur d'arc, mais c'est un outil théorique important. Nous ferons des exemples et exercices fait sur mesure pour pouvoir la calculer.

Exemple 3.3.5. *On considère la courbe paramétrée γ $:]0,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. L'abscisse curviligne $s_0 :]0,1[\to \mathbb{R}$ est donnée par :*

$$s_0(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(t).$$

La fonction arcsin : $[0,1[\to]0,\pi/2[$ *est une bijection. La reparamétrisation $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ s_0^{-1} :]0,\pi/2[\to \mathbb{R}^2$ est donnée par :*

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\sin s) = \left(\sin s, \sqrt{1-\sin^2(s)}\right) = (\sin(s), \cos(s)).$$

On remarque que cela correspond à une paramétrisation du quart de cercle de rayon 1 entre les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$. Le paramètre s correspond à l'angle entre $\overrightarrow{0\gamma(s)}$ et le vecteur de coordonnées $(0,1)$

Exemple 3.3.6. *Le cercle dans le plan peut être paramétrée par l'application $\gamma(t) = (Rcos(t), Rsin(t))$. Sa La paramétrisation par longueur d'arc est donc*

$$\gamma(s) = (Rcos(\frac{s}{R}), Rsin(\frac{s}{R}))$$

Exemple 3.3.7. *L'hélice circulaire de $\mathbb{R}^3$ est la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ pour $t \in \mathbb{R}$. C'est une courbe tracée sur le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$. Sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par*

$$\gamma(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},)$$

3.4 Courbes régulières et vecteur tangent

Intuitivement, la tangente en un point $\gamma(t_0)$ à une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est la limite des droites passant par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ quand t tend vers t_0. Nous allons formaliser cette définition dans la suite. Notons que si I est un intervalle , un point $t \in I$ est dit **intérieur** s'il n'est pas une des extrémités de I.

Définition 3.4.1. *Un point $\gamma(t_0) \in \gamma(I)$ d'une courbe paramétrée γ est dit régulier si pour t_0 intérieur à I, on a $\overrightarrow{\gamma}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Sinon $\gamma(t_0)$ est appelé point singulier.*

Définition 3.4.2. *Un arc paramétré γ est dit régulier si tout $t \in I$ intérieur à I est régulier.*

Définition 3.4.3. *Un point $\gamma(t_0)$ est dit birégulier si $\gamma^{''}(t_0) \neq 0$ ou si les vecteurs $\overrightarrow{\gamma^{'}(t_0)}$ et $\overrightarrow{\gamma^{''}(t_0)}$ ne sont pas colinéaires.*

Pour les courbes spaciales, cela revient à dire que $\gamma'(t_0) \wedge \gamma^{''}(t_0) \neq 0$.

Définition 3.4.4. *On dit que $\overrightarrow{v_0}$ est est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0)$ si*

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda(t)\overrightarrow{v_0} + \lambda(t)\epsilon(t),$$

avec

$$\lambda(t) \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{t \to t_0} \epsilon(t) = (0, 0).$$

La droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_0}$ est alors appelée la droite tangente à γ en $\gamma(t_0)$.

La proposition suivante indique qu'une dérivée non nulle de la paramétrisation donne un vecteur tangent.

Proposition 3.4.1. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0)$.*

Démonstration. Comme γ est de classe C^1, on a :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\epsilon(t),$$

avec

$$\lim_{t \to t_0} \epsilon(t) = (0, 0),$$

ce qui permet de conclure. □

Ainsi donc une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est dite régulière si pour tout $t \in I$ $\gamma'(t) \neq 0$.

Exemple 3.4.1. *Pour le segment de droite $[AB]$, $\varphi^{'}(t_0) = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ la tangente est (AB).*

Exemple 3.4.2. *Pour le cercle de centre $C_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon $R > 0$ et $I = [0, 2\pi]$, on a*

$$\varphi(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t, z_0)$$

alors

$$\varphi^{'}(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

On obtient ainsi un vecteur contenu dans le plan $z = 0$.
Remarquons que le vecteur $\varphi^{'}(t_0)$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{C_0\varphi(t_0)} = (R\cos t_0, R\sin t_0, 0)$.

Remarque 3.4.1.
1. *Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est régulière et si $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est une reparamétrisation de γ, alors $\widetilde{\gamma}$ est aussi régulière. En effet, comme $\varphi : J \to I$ est un C^1-difféomorphisme, on a $\forall t \in J, \widetilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) \neq 0$.*
2. *Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point. La réciproque n'est pas vraie. Considérons la courbe paramétrée suivante : $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ avec $t \in \mathbb{R}$. La courbe géométrique associée est la parabole d'équation $y = x^2$ qui a un vecteur tangent horizontal au point $\gamma(0)$. Pourtant $\gamma'(0)$ est nul !*

3.5 Points multiples

Définition 3.5.1. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré. Un point M du support de γ est dit multiple s'il existe $t, t^{'} \in I$ tels que $t \neq t^{'}$ et $\gamma(t) = M = \gamma(t^{'})$.*

Exemple 3.5.1. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. On définit l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par*

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t) = (a, b) + R\cos t\,\overrightarrow{i} + R\sin\,\overrightarrow{j}$$

Il s'agit d'un arc de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l support est le cercle de centre (a, b) et de rayon R . Dans cet exemple , la fonction γ est 2π périodique . Elle repasse donc plusieurs fois par le même point du plan. Il s'agit d'un phénomène important.

Dans l'exemple précédent, tous les points sont multiples mais ceci n'est due qu'à la périodicité du paramétrage.
La restriction de γ à l'intervalle $[0, 2\pi[$, elle est injective et l'arc paramétré $\gamma|[0, 2\pi[$ n'a pas de point multiple . Le cercle est donc un exemple de courbe simple au sens suivant.

Définition 3.5.2. *Un arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est dit simple si γ est injective. Une courbe $\mathcal{C}$ est dite simple si elle admet un paramétrage simple.*
Il existe des courbes qui ne sont pas simples, c-à-d qui n'admettent pas de paramétrage injectif.

Exemple 3.5.2. *Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ l'arc paramétré de classe $\mathcal{C}^\infty$ défini par*

$$\gamma(t) = (\cos t + 2\cos t^2, \sin t + 2\cos t \sin t)$$

Alors

$$\gamma(\frac{2\pi}{3}) = (0, 0) = \gamma(\frac{4\pi}{3})$$

Courbes paramétrées planes

4.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous allons étudier les courbes planes, c'est-à-dire les courbes tracées dans un plan. La géométrie affine est donc le cadre naturel dans lequel nous allons travailler. C'est la raison pour laquelle nous rappelons quelques éléments concernant le plan affine. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 appelé plan vectoriel, ses éléments étant alors des vecteurs. Cependant, on peut également le voir comme un espace affine appelé plan affine. Dans ce cas, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des points. À deux points A et B du plan affine est associé un vecteur du plan vectoriel noté $\overrightarrow{AB}$. Réciproquement, si A est un point du plan affine et si $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel, il existe un unique point B du plan affine tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On pourra alors écrire

$$B = A + \overrightarrow{u}.$$

Pour décrire un vecteur, il suffit d'une base de l'espace vectoriel, qui sera constituée de deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non colinéaires. Pour repérer un point dans le plan affine, nous aurons besoin d'un repère constitué d'un point O et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ de l'espace vectoriel. Un tel repère sera en général noté $R = (O, i, j)$. Si A est un point du plan, ses coordonnées (x, y) dans le repère R vérifient $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Dans le plan vectoriel, on dispose de la norme euclidienne $||.||$ pour mesurer les vecteurs. Dans le plan affine, on utilise la distance euclidienne pour mesurer la distance entre deux points selon la formule suivante :

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$$

Si un repère orthonormé est fixé, la distance entre le point de coordonnées (x_1, y_1) et le point de coordonnées (x_2, y_2) est donc

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Une courbe paramétrée plane est une fonction vectorielle

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$

où x et y sont des fonctions réelles. Il est à noter que $x(t)$ ne peut exister que si $y(t)$ existe et vice versa, sinon un point $A(x(t), y(t))$ n'aura pas de sens.
Rappelons qu'il existe d'autres représentations des courbes plaanes à savoir la repprésentation cartésienne(explicite et implicite).

4.2 Tangentes en un point d'une courbe plane

4.2.1 Courbe définie par une fonction explicite

On appelle équation cartésienne **explicite** d'une courbe, une équation de la forme $y = f(x)$, $x \in]a, b[$. Cela correspond à la représentation paramétrique : $P(x) = (x, f(x))$, $x \in]a, b[$

1. $x \mapsto P(x)$ est bijective presque partout.
2. $P(x) \in C^1(]a, b[)$ si $f \in C^1(]a, b[)$.
3. $\overrightarrow{D_x P} = [1, D_x f] \neq (0, 0) \Longrightarrow$ il faut que $f \in C^1$.

Les équations symétriques de la tangente au point (x_0, y_0) de la courbe snt :

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{(D_x f)_{x_0}}$$

D'où l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) est donnée par :

$$\boxed{T_{(x_0,y_0)} : y - y_0 = (D_x f)_{x_0}(x - x_0)}$$

4.2.2 Courbe définie par une fonction implicite

On appelle équation cartésienne **implicite** d'une courbe, une équation de la forme : $F(x, y) = 0$. Ces équations sont moins faciles à manipuler, il faut alors étudier la fonction F et bien souvent découper la courbe en arc régulier. Cependant, si $F \in C^1$ et si $D_y F$ ou $D_x F$ diffèrent de 0 au voisinage d'un point, on peut tirer y en fonction de x ou x en fonction de y dans le voisinage de ce point.
Dans le premier cas on a donc :

$$F(x, y(x)) = 0; D_y F \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = D_x F + \frac{dy}{dx} D_y F :$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D_x F}{D_y F}$$

D'où l'équation de la tangente en $P_0(x_0, y_0)$ est :

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{(\frac{-D_x F}{D_y F})_{p_0}} = \frac{(D_y F)_{p_0}(y - y_0)}{(-D_x F)_{p_0}}$$

D'où l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) est donnée par :

$$\boxed{T_{(x_0,y_0)} : (D_x F)_{p_0}(x - x_0) + (D_y F)_{p_0}(y - y_0) = 0}$$

4.2.3 Tangente d'une courbe paramétrée quelconque

Soit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane paramétrée quelconque. En Mécanique, $\varphi(t)$ est la trajectoire d'une particule se déplaçant dans l'espace. Le vecteur dérivée $\varphi'(t) = \overrightarrow{v}(t)$ sera le vecteur vitesse à l'instant t du point mobile (ou vitesse instantanée) et pour une paramétrisation quelconque, il est donné par $\varphi^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t))$. Le vecteur dérivée seconde $\varphi^{''}(t) = (x^{''}(t), y^{''}(t)) = \overrightarrow{a}(t)$ est le vecteur accélération à l'instant $t^{'}$ (ou accélération instantanée).

Considérons l'arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ en coordonnées cartésiennes, nous commençons donc par écrire les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + x^{'}(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\xi_x(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y^{'}(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\xi_y(t - t_0) \end{cases}$$

avec $\xi_x(t), \xi_x(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Ces équations permettent d'obtenir un analogue du développement limité pour la fonction γ :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t_0), y(t_0)) + (t - t_0) \begin{pmatrix} x^{'}(t_0) + \xi_x(t - t_0) \\ y^{'}(t_0) + \xi_y(t - t_0) \end{pmatrix} \\ &= \gamma(t_0) + (t - t_0) \begin{pmatrix} x^{'}(t_0) \\ y^{'}(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} \xi_x(t - t_0) \\ \xi_y(t - t_0) \end{pmatrix} \\ &= \gamma(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\gamma}'(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\xi}(t - t_0) \\ &= \psi(t) + (t - t_0)\overrightarrow{\xi}(t - t_0) \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{\psi(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\gamma}'(t_0)} \quad \text{équation de la tangente}$$

Comme le suggère la notation, nous considérons désormais $\gamma^{'}(t_0)$ comme vecteur, appelé **vecteur tangent** à la courbe au point $\gamma(t_0)$. Supposons que $\gamma^{'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors le support de l'arc paramétré ψ est la droite dirigé par $\overrightarrow{\gamma^{'}}(t_0)$ et passant par $\gamma(t_0)$.
Comme la distance $d(\gamma(t), \psi(t)) = \|(t - t_0)\xi(t - t_0)\| \to 0$ pour $t \to t_0$, on peut dire que cette droite approche le support de γ au voisinage de t_0. Cette observation conduit à la définition suivante :

Définition 4.2.1. *Si $\overrightarrow{\gamma}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ la tangente à la courbe en ce point est la droite dirigée par $\overrightarrow{\gamma}'(t_0)$ et passant par $\overrightarrow{\gamma}(t_0)$.*

Exemple 4.2.1. *Considérons l'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (a, b) + t\overrightarrow{v}$ en posant $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, on a de façon immédiate*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = v_x \\ y^{'}(t) = v_y \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{v}$ est le support de γ est sa propre tangente en tout point.

Exemple 4.2.2. *Considérons l'arc paramétré*

$$\gamma : t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$$

on a

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -R\sin t \\ y^{'}(t) = R\cos t \end{cases}$$

Soit C le point de coordonnées (a, b). Alors , le vecteur $\overrightarrow{C\gamma(t)}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$

et donc $\langle\overrightarrow{C\gamma(t)}, \overrightarrow{\gamma'(t)}\rangle = 0$
Ainsi, le vecteur tangent au point $\gamma(t)$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{C\gamma(t)}$*, donc la tangente en ce point est bien la tangente usuelle au cercle.*

Exemple 4.2.3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et soit* $\gamma_f : I \to \mathbb{R}^2$ *l'arc paramétré défini par* $\gamma_f(t) = (t, f(t))$*. Le support de* γ_f *est le graphe de* f*. On a :* $\gamma_{f'}(t) = (1, f'(t))$ *et la tangente au point* $\gamma_f(t_0)$ *a pour paramétrage*

$$t \mapsto (t_0, f(t_0)) + (t - t_0)(1, f'(t_0)) = (t, f(t_0)) + (t - t_0)f'(t_0)$$

Proposition 4.2.1. *1. La tangente est invariante par un changement de paramétrage.*

2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *un arc paramétré de classe* $\mathcal{C}^1$ *et soit* $t_0 \in I$ *un paramètre d'un point régulier . Alors , la tangente au support de* γ *au point* $\gamma(t_0)$ *a pour équation*

$$\boxed{y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0}$$

Preuve : Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$, alors

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\gamma'(t_0)}\rangle = 0$$

Donc un point $M(x, y) \in$ la tangente à la courbe en $\gamma(t_0)$ ssi

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M\gamma(t_0)}\rangle = 0$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M\gamma(t_0)}\rangle \\ 0 &= -y'(t_0)(x(t_0) - x) + x'(t_0)(y(t_0) - y) \\ 0 &= y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) \end{aligned}$$

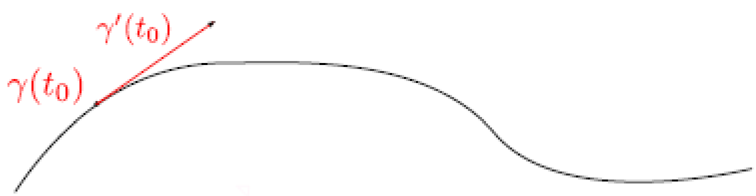

FIGURE 4.1 – Tangente

Remarque 4.2.1. *1. Si tout point de la courbe géométrique est un point régulier, on dit que la courbe est régulière.*

2. *Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point. Mais la réciproque n'est pas vraie.*
   En effet, considérons la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. La courbe géométrique associée est une parabole d'équation $y = x^2$ qui admet une tangente horizontal en $\gamma(0)$ pourtant $\gamma'(0) = 0$.

Exercice 4.2.1. *Montrer que la courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$ admet un point multiple. Puis déterminer l'équation de la tangente en $t = 0$.*

4.3 Courbure et repère de Frenet

Dans cette section, on s'intéresse à l'allure locale des courbes planes régulières. Une notion centrale pour connaître cette allure est la courbure. On verra que celle-ci est fortement liée à la dérivée seconde de la paramétrisation. Le repère de Frenet est défini en chaque point d'une courbe paramétrée régulière. Les formules de Serret-Frenet expriment la façon dont ce repère bouge le long de la courbe. Plus précisément, elles donnent les dérivées de ce repère dans la base de Serret-Frenet.

4.3.1 Cercle oscillateur

Au voisinage d'un point régulier , nous savons décrire la courbe en l'approchant par une droite. Cette droite nous donne des informations sur la vitesse et le sens de parcours. Toutefois, si la courbe n'est pas une droite , elle tourne dans le plan au cours du temps, et la tangente ne nous donne aucune information sur ce mouvement de rotation. Pour tenter de comprendre ce phénomène, nous allons essayer d'apprendre la courbe par un cercle.
Il est intuitif de constater qu'un cercle de rayon R nous parait d'autant plus "Courbe" que son rayon est petit ; ce qui nous conduit à poser $C = \dfrac{1}{R}$.
Un calcul simple montre alors que la courbure est reliée à la variation de l'angle θ et à la variation de l'abscisse curviligne par la relation $\dfrac{1}{R} = \dfrac{d\theta}{ds}$.
Le centre de courbure est confondu au centre du cercle oscillateur. C'est le point C tel que

$$C = P + R\overrightarrow{n}$$

Définition 4.3.1. *En tout point où la courbure n'est pas nulle, le rayon de courbure est $R = \dfrac{1}{C}$. Nous étendons cette définition en convenant que le rayon de courbure est infini en un point où la courbure est nulle.*

Remarque 4.3.1. *Sur tout sous-intervalle $J \subset I$ où la courbure ne s'annule pas, on peut considérer s comme une fonction de θ et on a $R = \dfrac{ds}{d\theta}$.*

4.3.2 Repère de Frenet

On définit tout d'abord le repère de Serret-Frenet. Il s'agit d'un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée.

Définition 4.3.2. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1. Le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(t)$ est le repère orthonormé : $(\gamma(t), T(t), N(t))$, où $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$ et $(T(t), N(t))$ est une base orthonormée directe du plan affine.*

Le vecteur $T(t)$ est vecteur unitaire tangent à la courbe au point $\gamma(t)$ et le vecteur $N(t)$ est un vecteur qui est normal à la courbe en $\gamma(t)$.

Remarque 4.3.2. *La droite tangente à la courbe γ au point $\gamma(t)$ ne dépend pas de la paramétrisation. Par contre, le vecteur $T(t)$ en dépend : si on change le sens de parcours de la courbe, alors ce vecteur sera remplacé par son opposé. Le repère de Serret-Frenet dépend ainsi du sens de parcours de la paramétrisation ainsi que de l'orientation du plan affine.*

Proposition 4.3.1. *Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2, alors $\gamma''(s)$ est un vecteur colinéaire à $N(s)$. En particulier, il existe une application continue $k : I \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall s \in I, \gamma''(s) = T'(s) = k(s)N(s)$.*

Démonstration. Pour tout $s \in I$, on a $T(s).T(s) = 1$. En dérivant, cela donne $T(s).T(s) = 0$. On pose alors $k(s) = \gamma''(s).N(s)$. □

Définition 4.3.3. *Si $\gamma(s)$ est une courbe régulière normale la fonction $k(s) = ||\gamma''(s)||$ est appelée **courbure** de γ au point $\gamma(s)$.*

Définition 4.3.4. *On définit alors le vecteur normal par $\gamma''(s)$ et le vecteur normal unitaire*

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

La courbure est vue comme une fonction définie le long de la courbe . Elle ne dépend pas du choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe. Comme l'abscisse curviligne n'est pas souvent calculable, il est utile d'exprimer la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque.

Proposition 4.3.2. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, une paramétrisation quelconque d'une courbe géométrique orientée $\Gamma = \gamma(I)$. Alors la courbure $k(t)$ de Γ au point $\gamma(t)$ est donnée par*

$$\boxed{k(t) = \frac{det(\overrightarrow{\gamma'(t)}, \overrightarrow{\gamma''(t)})}{\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\|^3}}$$

La valeur absolue de la courbure est invariante par les isométrie de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.3.1. *Montrer que la courbure de la parabole d'équation $y = x^2$, parcourue dans le sens des x croissant n'est pas constante. En déduire qu'elle vaut 2, au point $(0, 0)$. Existe t il une isométrie transformant la parabole en un cercle ? Justifiez vous !*

4.3.3 Formules de Frenet

Le repère de Serret Frenet est défini en chaque point d'une courbe paramétrée régulière. Les formules de Serret-Frenet expriment la façon dont ce repère bouge le long de la courbe. Plus précisément, elles donnent les dérivées de ce repère dans la base de Serret-Frenet.

Proposition 4.3.3. ***(Formules de Serret Frenet).*** *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2. Alors pour tout $s \in I$, on a :*

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) \end{cases}$$

Démonstration. La première formule a déjà été montrée. Le vecteur $N(s)$ étant unitaire, pour tout $s \in I$, on a : $N(s).N(s) = 1$. En dérivant, on a $N'(s).N(s) = 0$. Le vecteur $N'(s)$ est donc colinéaire à $T(s)$. Et comme $N(s).T(s) = 0$, en dérivant on obtient :

$$T'(s).N(s) + T(s).N'(s)$$

Et donc $k(s) = -N'(s).T(s)$, ce qui permet de conclure. □

4.3.4 Courbure d'une courbe polaire

De nombreuses courbes paramétrées sont exprimées en coordonnées polaires

$$\varphi(\theta) = f(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$$

où $f : I \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse qui représente la distance du point $\varphi(\theta)$ à l'origine.

$$\overrightarrow{O\varphi(\theta)} = f(\theta)\overrightarrow{e_\theta} \Rightarrow \varphi(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$$

On écrit brièvement $r = f(\theta) \equiv$ équation polaire.

Tangente : On note $\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \\ \overrightarrow{v}(\theta) = u^{'}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta) \end{array}\right\} \overrightarrow{u}(\theta) \perp \overrightarrow{v}(\theta)$

Observer que :

$$v(\theta) = u^{'}(\theta) = u(\theta + \frac{\pi}{2})$$
$$v^{'}(\theta) = -u(\theta) = u(\theta + \pi)$$

Avec ces rotations , on a le vecteur tangent :

$$\varphi^{'}(\theta) = f^{'}(\theta)u(\theta) + f(\theta)v(\theta)$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= f(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta)u(\theta) \\ \varphi^{'}(\theta) &= f^{'}(\theta)u(\theta) + f(\theta)u^{'}(\theta) \\ \varphi^{'}(\theta) &= f^{'}(\theta)u(\theta) + f(\theta)v(\theta) \end{aligned}$$

La courbe γ est régulière si et seulement f et $f^{'}$ ne s'annule pas simultanément.

Abscisse Curviligne : La longueur de l'arc joignant $\varphi(\theta_1)$ à $\varphi(\theta_2)$ est donnée par

$$L(\delta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f^{'2}(\theta)}d\theta$$

C'est une conséquence directe de l'expression ci-dessus de $\varphi^{'}(\theta)$ dans la base orthonormée $\{u(\theta), v(\theta)\}$; dans cette base, $\varphi^{'}(\theta)$ a pour coordonnées $(f^{'}(\theta), f(\theta))$.

La courbure : La courbure de γ s'exprime en fonction de f par

$$\boxed{k(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f^{'2}(\theta) - f(\theta)f^{''}(\theta)}{\sqrt{f^2(\theta) + f^{'2}(\theta)}^3}}$$

Démonstration. Rappelons que $\varphi^{'} = f^{'}u + fv$ et observons que

$$\varphi^{''}(\theta) = [f^{''}(\theta) - f(\theta)]u(\theta) + 2f^{'}(\theta)v(\theta).$$

Il s'ensuit que

$$k(\theta) = \frac{det(\varphi^{'}(\theta), \varphi^{''}(\theta))}{\|\varphi^{'}(\theta)\|^3} = \frac{1}{\sqrt{f^2(\theta) + f^{'2}(\theta)}^3} \begin{vmatrix} f^{'} & f^{''} - f \\ f & 2f^{'} \end{vmatrix}$$

$\square$

Proposition 4.3.4. *Les seules courbes planes dont la courbure est constante sont les droites et les cercles.*

Théorème 4.3.1 (Fondamental)**.** *Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes géométriques régulières dans $\mathbb{R}^2$ qui ont la même courbure en valeur absolu. Alors il existe une isométrie du plan qui transforme Γ_1 en Γ_2*

Exemple 4.3.2. *Soit $\Gamma : \varphi(\theta) = (a\cos 2\theta, a\cos 2\theta \tan\theta), \theta \in] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$*

1. *Donner l'équation polaire de cette courbe*
2. *Calculer $k(\theta)$*

Solution 4.3.1.

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= a\cos 2\theta(1, \tan\theta) \\ &= \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= \frac{2a\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= 2a\sin\theta(\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(\theta) = 2a\sin\theta$; $f^{'}(\theta) = 2a\cos\theta$; $f^{''}(\theta) = -2a\sin\theta$ *et par conséquent,*

$$k(\theta) = \frac{1}{a}$$

La courbe est donc un cercle de rayon a.

Exercice 4.3.1. ***corrigé : Lemniscate de Bernoulli.*** *On donne une courbe*

$$\Gamma : (x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0$$

1. *Montrer que sa paramétrisation en en coordonnées polaires est*

$$f^2(\theta) = d\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}$$

2. *Montrer que $k(\theta) = \dfrac{3\sqrt{\cos(2\theta)}}{\sqrt{2}d}$ et déduire si la courbe est une droite ou un cercle.*

Solution 4.3.2. *En coordonnées polaires*

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[f^2(\theta)\right]^2 - 2d^2\left[f^2(\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right] = 0$$
$$\Rightarrow f^2(\theta) = 2d^2\left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right] \Rightarrow f^2(\theta) = 2d^2\cos 2\theta$$
$$\Rightarrow f(\theta) = \sqrt{2}d\sqrt{\cos 2\theta}$$

Et par conséquent

$$k(\theta) = \frac{3\sqrt{\cos(2\theta)}}{\sqrt{2}d}$$

La courbe n'est ni cercle ni droite.

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1. *On donne la courbe suivante :* $\gamma(t) = (t^2 + t^3, t^4)$

1. *Déterminer les points réguliers de* γ.
2. *Calculer la courbure de* γ *au point* $t = 1$.

Exercice 4.4.2. *On donne la courbe suivante :* $\gamma(t) = (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$

1. *Calculer les composantes du vecteur tangent en tout point* $t \in \mathbb{R}$.
2. *Déterminer les points réguliers de* γ.
3. *Calculer la courbure de* γ.

Exercice 4.4.3. *On donne la courbe polaire* γ *suivante :* $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *La courbe est-elle régulière ?*
2. *Calculer la courbure de* γ.

Exercice 4.4.4. *On donne la courbe polaire* γ *suivante :* $\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de la courbe puis l'ensemble des points pour lequel la courbe est régulière.*
2. *Calculer la courbure de* γ.

Exercice 4.4.5. *On définit une courbe plane paramétrée :*

$$M(t) = (t - sint, 1 - cost)$$

1. *Déterminer les points où le paramétrage est régulier.*
2. *Calculer la longueur de la courbe définie par* $M : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

Courbes paramétrées dans l'espace de dimension 3

5.1 Introduction

Une courbe gauche est une courbe de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas plane. Dans cette partie, on considère les courbes paramétrées régulières gauches de classe C^2 de la forme :

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

5.2 Equations des tangentes dans un espace affine de dimension 3

1) Equation cartésienne explicite d'une courbe :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

(courbe vue comme intersection de 2 surfaces).
conduisant au paramétrage

$$P(x) = [x, f(x), g(x)]$$

pour lequel on a toujours :

$$\overrightarrow{D_x P} = [1, D_x f, D_x g] \neq [0, 0, 0]$$

Les équations symétriques de la tangente sont alors données par :

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{(D_x f)_{x_0}} = \frac{z - z_0}{(D_x g)_{x_0}}$$

2) Equation cartésienne implicite

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Comme c'est une courbe, supposons que l'on tire x, y, z en fonction d'un paramètre u et soit donc

$$F[x(u), y(u), z(u)] = 0$$

et

$$G[x(u), y(u), z(u)] = 0$$

On a successivement :

$$0 = \frac{dF}{du} = D_u x D_x F + D_u y D_y F + D_u z D_z F$$
$$0 = \frac{dG}{du} = D_u x D_x G + D_u y D_y G + D_u z D_z G$$

Comme

$$\begin{cases} P(u) = [x(u), y(u), z(u)] \\ \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} D_x F \\ D_y F \\ D_z F \end{bmatrix} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_u P}.\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F} = 0 \\ \overrightarrow{D_u P}.\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{G} = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\overrightarrow{D_u P} \sim \overrightarrow{\nabla} F \wedge \overrightarrow{\nabla} G$$

D'où les équations symétriques de la tangente en $p_0(x_0, y_0, z_0)$ sont données par :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\begin{bmatrix} D_y F & D_z F \\ D_y G & D_z G \end{bmatrix}_{p_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{bmatrix} D_z F & D_x F \\ D_z G & D_x G \end{bmatrix}_{p_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{bmatrix} D_x F & D_y F \\ D_x G & D_y G \end{bmatrix}_{p_0}}}$$

5.3 Plan oscillateur, plan normal et plan rectifiant

Définition 5.3.1. *Le plan $(\gamma(t_0), \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est appelé plan oscillateur. Le plan oscillateur est un plan passant par $\gamma(t_0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$. Son équation est*

$$< \gamma(t) - \gamma(t_0), \overrightarrow{B} = 0 >$$

Définition 5.3.2. *Le plan $(\gamma(t_0), \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est appelé plan normal. Le plan normal est un plan passant par $\gamma(t_0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{B}$. Son équation est*

$$< \gamma(t) - \gamma(t_0), \overrightarrow{T} = 0 >$$

Définition 5.3.3. *Le plan $(\gamma(t_0), \overrightarrow{B}, \overrightarrow{T})$ est appelé plan rectifiant. Le plan rectifiant est un plan passant par $\gamma(t_0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{B}$. Son équation est*

$$< \gamma(t) - \gamma(t_0), \overrightarrow{N} = 0 >$$

Soit $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de support géométrique Γ. Les équations d'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ dépendent de quatre paramètres, par exemple $y = ax + b$ et $z = cx + d$. On peut choisir ceux-ci de sorte que la droite ait un contact d'ordre deux avec la courbe. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cela conduit aux équations suivantes pour la tangente à Γ :

Proposition 5.3.1. *La tangente en un point régulier (x, y, z) de Γ est donnée par les équations :*

$$y'(X - x) = x'(Y - y)$$

et

$$z'(Y - y) = y'(Z - z)$$

Proposition 5.3.2. *Le plan perpendiculaire à la tangente en un point régulier est appelé plan normal et a pour équation :*

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0$$

C'est le plan $\varphi(t) + Vect\{N(t), B(t)\}$ engendré par le vecteur normal et le vecteur binormal unitaire. L'équation d'un plan affine $ax + by + cz + d = 0$ dépend de trois paramètres (le plan reste inchangé si on multiplie l'équation définissante par une constante non nulle) qui peuvent être choisis de manière à avoir un ordre de contact au moins trois avec la courbe. Le plan correspondant (qui est déterminé de façon unique) s'appelle le **plan osculateur**.

Proposition 5.3.3. *Le plan osculateur est donné par l'équation*

$$det \begin{bmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix} = 0$$

C'est le plan $\varphi(t) + Vect\{T(t), N(t)\}$ engendré par le vecteur tangent et le vecteur normal unitaires.

Exercice 5.3.1. *Calculer la courbure du cercle paramétré par $\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t)$.*

Exercice 5.3.2. *Montrer que $k(0) = 2$ pour la parabole d'équation $y = x^2$*

Exercice 5.3.3. *Ellipse $\varphi(t) = (a\cos t, b\sin t)$. Montrer que $k(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^3}$*

Théorème 5.3.1. *Soit $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}$ des arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^2$ réguliers tels que $\forall t \in I, \|\overrightarrow{\gamma_1'}(t)\| = \|\overrightarrow{\gamma_2''}(t)\|$ et les courbures aux points $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont égales. Alors, il existe une isométrie directe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $F \circ \gamma_1 = \gamma_2$*

Démonstration. Voir [4] □

5.4 Courbure et torsion d'une courbe de l'espace

L'étude de l'allure locale est plus compliquée que pour les courbes planes. En effet, pour une courbe plane paramétrée régulière, il n'y a qu'une seule direction normale en chaque point de la courbe. Pour une courbe gauche, il y a tout un plan qui est orthogonal au vecteur tangent à la courbe en chaque point, ce qui complique un peu son étude et introduit une nouvelle notion, celle de torsion.
La torsion indique comment tourne le repère de Frenet autour de la tangente à la courbe.
Notons que le vecteur normal et le vecteur binormal ne sont définis que lorsque la courbure ne s'annule pas. Dans ce cas, la torsion est (identiquement) nulle si et seulement si la courbe est plane.

5.4.1 Normal principal et binormal

Dans le cas des courbes planes, le signe de la courbure algébrique est lié au sens de parcours de la courbe et à l'orientation du plan. Pour une courbe gauche, il n'est plus possible d'avoir un signe de courbure cohérent : intuitivement, quand on se promène sur la courbe, on ne peut pas de manière naturelle dire où est la droite, et où est la gauche. On ne définit donc pas de courbure algébrique, mais uniquement une courbure (qui est toujours positive).

Définition 5.4.1. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2.*

1. *La courbure de γ au point $\gamma(s)$ est $k(s) = ||\gamma''(s)||$.*
2. *Un point $\gamma(t_0)$ est dit birégulier si $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ ne sont pas colinéaires. Ce qui revient à dire que $\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \neq \vec{0}$ ou encore $\gamma''(s) \neq 0$.*
3. *Le normal principal de γ en un point birégulier $\gamma(s)$ est donné par*

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) = \frac{\gamma''(s)}{||\gamma''(s)||}$$

Comme dans le cas des courbes planes, le repère de Serret-Frenet est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée. Le vecteur $T(s)$ est unitaire tangent à la courbe, la normale principale $N(s)$ est orthogonale à $T(s)$. Il est naturel de compléter cela en une base orthonormée en posant :

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

Définition 5.4.2. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière normale. On appelle binormal ou vecteur binormal un vecteut unitaire perpendiculaire au plan oscillateur c-à-d défini par $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$. Il est donc donné par*

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

Torsion d'une courbe

On va maintenant étudier la torsion d'une courbe, autrement dit chercher à savoir comment "tourne" le repère de Serret-Frenet autour de la droite tangente à la courbe. Pour mesurer cela, on a besoin de la dérivée du vecteur binormal B . Comme B fait intervenir la dérivée seconde de la paramétrisation, on est obligé de considérer ici des paramétrisation de classe C^3. On considère ici une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée normale de classe C^3 et $\gamma(s)$ un point birégulier.

Proposition 5.4.1. *Le vecteur $B'(s)$ est colinéaire à $N(s)$. Autrement dit, il existe une application $\tau : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :*

$$\forall s \in I,\ B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

Démonstration. Comme B est unitaire, on a : $B(s).B(s) = 1$ et en dérivant on obtient : $B'(s).B(s) = 0$. De même, comme $B(s).T(s) = 0$, en dérivant on a :

$$B'(s).T(s) + B(s).T'(s) = 0 \Longrightarrow B'(s).T(s) + B(s).k(s)N(s) = 0 \Longrightarrow B'(s).T(s) = 0$$

Le vecteur $B'(s)$ est donc orthogonal à $B(s)$ et à $T(s)$. Il est donc colinéaire à $N(s)$. On pose $\tau(s) = -B'(s).N(s)$. □

Définition 5.4.3. *La torsion $\tau(s)$ de la courbe Γ paramétrée par sa longueur d'arc s au point $\gamma(s)$ est définie par*

$$\tau(s) = -\left\langle \overrightarrow{B}'(s), \overrightarrow{N}(s) \right\rangle$$

Définition 5.4.4. *On définit le repère de Frenet dans l'espace euclidien E_3 par $R = (p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ où $p = \gamma(t_0)$. C'est un repère orthogonal direct c-à-d de même orientation que $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est appelé trièdre de Frenet ou appareil de Frenet.*

Formules de Frenet

Comme pour les courbes planes, en chaque point d'une courbe gauche paramétrée régulière, on a un repère de Serret Frenet. Ce repère bouge avec le paramètre de la courbe. Les formules de Serret-Frenet expriment justement la dérivée de ce repère.

Théorème 5.4.1. ***(Formules de Frenet).*** *Les dérivées du repère de Frenet sont données par :*

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

Ce que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Démonstration. La première formule est évidente. En effet, si $\gamma(s)$ est un paramétrage de la courbe, on a :

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{||\gamma''(s)||} = \frac{\gamma''(s)}{k(s)} \Longrightarrow \gamma''(s) = k(s)N(s) \Longleftrightarrow [\gamma'(s)]' = k(s)N(s) \Longrightarrow T'(s) = k(s)N(s).$$

La troisième formule est déjà montrée dans la proposition précédente. Pour montrer la deuxième formule, on part du fait que $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ et en dérivant par rapport à s cette relation, on obtient :

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= -\tau N(s) \wedge T(s) + k(s)B(s) \wedge N(s) \\ &= \tau T(s) \wedge N(s) - k(s)N(s) \wedge B(s) \\ &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \end{aligned}$$

□

La proposition qui suit donne les conditions pour qu'une courbes dans $\mathbb{R}^3$ soit une courbe plane.

Proposition 5.4.2. *Une courbe gauche dont la courbure ne s'annule pas est incluse dans un plan si et seulement ssi sa torsion est identiquement nulle.*

5.4.2 Courbure et torsion pour une paramétrisation quelconque

Les proposition suivantes donnent donnent une façon de calculer la courbure et la torsion pour une courbe paramétrée quelconque.

Proposition 5.4.3. *Soit* Γ *une courbe géométrique régulière paramétré par* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*. La courbure au point* $g(t)$ *est donnée par*

$$\boxed{k(t) = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3}}$$

Démonstration. Tout d'abord rappelons que si les vecteurs $g'(t)$ et $g''(t)$ font un angle θ. On cherche d'abord $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction de l'abscisse curviligne.

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{g}(s)s'(t)$$

et

$$g''(t) = \frac{d}{dt}(\dot{g}(s)s'(t)) = \dot{g}(s)s''(t) + (s'(t))^2\ddot{g}(s)$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned} g'(t) \wedge g''(t) &= \dot{g}(s)s'(t) \wedge \Big(\dot{g}(s)s''(t) + (s'(t))^2\ddot{g}(s)\Big) \\ &= s'(t)s''(t)\,\underbrace{\dot{g}(s) \wedge \dot{g}(s)}_{=\overrightarrow{0}} + (s'(t))^3\dot{g}(s) \wedge \ddot{g}(s) \\ &= (s'(t))^3\dot{g}(s) \wedge \ddot{g}(s) \end{aligned}$$

Comme $s'(t) = \frac{ds}{dt} = ||g'(t)||$, on a :

$$||g'(t) \wedge g''(t)|| = ||g'(t)||^3||\dot{g}(s) \wedge \ddot{g}(s)|| = ||g'(t)||^3||\dot{g}(s)||||\ddot{g}(s)|| \sin\theta = ||g'(t)||^3 k(s)$$

Car θ est l'angle entre $\dot{g}(s)$ et $\ddot{g}(s)$ qui est droit et que $||\dot{g}(s)|| = 1$ et $||\ddot{g}(s)|| = k(s)$. Par conséquent,

$$||g'(t) \wedge g''(t)|| = ||g'(t)||^3 k(s) \Longrightarrow k(s) = \frac{||g'(t) \wedge g''(t)||}{||g'(t)||^3}$$

Comme le second membre ne dépend que de t, on a alors

$$k(t) = \frac{||g'(t) \wedge g''(t)||}{||g'(t)||^3}$$

□

Proposition 5.4.4. *La torsion de* Γ *au point* $g(t)$ *est donnée par*

$$\boxed{\tau(t) = \frac{det\big[g'(t), g''(t), g'''(t)\big]}{\|g'(t) \wedge g''(t)\|^2}}$$

Démonstration. On rappelle d'abord que

$$\Big[g'(t), g''(t), g'''(t)\Big] = g'(t).\Big(g''(t) \wedge g'''(t)\Big) = det\Big(g'(t), g''(t), g'''(t)\Big).$$

Pour démontrer notre formule, on procède en deux étapes :

Etape 1. On montre d'abord que

$$\Big[\dot{g}(s), \ddot{g}(s), \dddot{g}(s)\Big] = \frac{\big[g'(t), g''(t), g'''(t)\big]}{\|g'(t)\|^6}$$

Etape 2. On montre en suite que

$$\Big[\dot{g}(s), \ddot{g}(s), \dddot{g}(s)\Big] = k^2(s)\tau(s)$$

Pour montrer la première formule, soit $\dot{t}(s) = \frac{dt}{ds}$, on a :

$$\dot{g}(s) = \frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dt}.\frac{dt}{ds} = g'(t).\dot{t}(s).$$

Donc

$$\boxed{\dot{g}(s) = \dot{t}(s).g'(t)}$$

En dérivant cette équation par rapport à s, on a :

$$\ddot{g}(s) = \frac{d}{ds}\big(\dot{t}(s).g'(t)\big) = \ddot{t}(s).g'(t) + \big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t)$$

Donc

$$\boxed{\ddot{g}(s) = \ddot{t}(s).g'(t) + \big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t)}$$

En dérivant ensuite la précédente expression, on a :

$$\dddot{g}(s) = \frac{d}{ds}\Big(\ddot{t}(s).g'(t) + \big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t)\Big) = g'(t)\dddot{t}(s) + 3g''(t)\dot{t}(s)\ddot{t}(s) + g'''(t)(\dot{t}(s))^3$$

Donc

$$\boxed{\dddot{g}(s) = g'(t)\dddot{t}(s) + 3g''(t)\dot{t}(s)\ddot{t}(s) + g'''(t)(\dot{t}(s))^3}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\Big[\dot{g}(s), \ddot{g}(s), \dddot{g}(s)\Big] &= \Big(\dot{t}(s).g'(t)\Big).\Big[\Big(\ddot{t}(s).g'(t) + \big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t)\Big) \wedge \Big(g'(t)\dddot{t}(s) + 3g''(t)\dot{t}(s)\ddot{t}(s) + g'''(t)(\dot{t}(s))^3\Big)\Big] \\
&= \dot{t}(s).g'(t).\ddot{t}(s).g'(t) \wedge g'(t)\dddot{t}(s) + \dot{t}(s).g'(t).\ddot{t}(s).g'(t) \wedge 3g''(t)\dot{t}(s)\ddot{t}(s) \\
&+ \dot{t}(s).g'(t).\ddot{t}(s).g'(t) \wedge g'''(t)(\dot{t}(s))^3 + \dot{t}(s).g'(t).\big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t) \wedge g'(t)\dddot{t}(s) \\
&+ \dot{t}(s).g'(t).\big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t) \wedge 3g''(t)\dot{t}(s)\ddot{t}(s) + \dot{t}(s).g'(t).\big(\dot{t}(s)\big)^2.g''(t) \wedge g'''(t)(\dot{t}(s))^3 \\
&= \dot{t}(s)\ddot{t}(s)\dddot{t}(s).g'(t).\big(g'(t) \wedge g'(t)\big) + 3\dot{t}(s)\ddot{t}(s)\dot{t}(s)\ddot{t}(s).g'(t).\big(g'(t) \wedge g''(t)\big) \\
&+ \dot{t}(s)\ddot{t}(s)(\dot{t}(s))^3.g'(t)\big(g'(t) \wedge g'''(t)\big) + \dot{t}(s)\big(\dot{t}(s)\big)^2\dddot{t}(s).g'(t).\big(g''(t) \wedge g'(t)\big) \\
&+ 3\dot{t}(s)\big(\dot{t}(s)\big)^2\dot{t}(s)\ddot{t}(s).g'(t).\big(g''(t) \wedge g''(t)\big) + \dot{t}(s)\big(\dot{t}(s)\big)^2(\dot{t}(s))^3g'(t).\big(g''(t) \wedge g'''(t)\big) \\
&= (\dot{t}(s))^6g'(t).\big(g''(t) \wedge g'''(t)\big)
\end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième formule, on part de $\ddot{g}(s) = \dot{t}(s) = k(s)n(s)$ et par dérivation, on montre que

$$\dddot{g}(s) = -k^2(s)t(s) + \dot{k}(s)n(s) + \tau(s)(s)b(s)$$

avec (t, n, b) le trièdre de Frenet. En effet,

$$\begin{aligned}
\dddot{g}(s) &= \frac{d}{ds}(k(s)n(s)) \\
&= k(s)\dot{n}(s) + \dot{k}(s)n(s) \\
&= k(s)\frac{d}{ds}(b(s) \wedge t(s)) + \dot{k}(s)n(s) \\
&= k(s)\dot{b}(s) \wedge t(s) + k(s)b(s) \wedge \dot{t}(s) + \dot{k}(s)n(s) \\
&= k(s)[-\tau(s)n(s) \wedge t(s)] + k(s)b(s) \wedge k(s)n(s) + \dot{k}(s)n(s) \\
&= k(s)\tau(s)b(s) - k^2(s)t(s) + \dot{k}(s)n(s) \\
&= -k^2(s)t(s) + \dot{k}(s)n(s) + k(s)\tau(s)b(s)
\end{aligned}$$

Calculons ensuite,

$$\ddot{g}(s) \wedge \dddot{g}(s) = k^3(s)b(s) + k^2(s)\tau(s)t(s)$$

et par la suite, en multipliant scalairement l'expression précédente par $\dot{g}(s) = t(s)$

$$\dot{g}(s).(\ddot{g}(s) \wedge \dddot{g}(s)) = k^2(s)\tau(s)$$

Ainsi donc

$$\begin{aligned}
\left[\dot{g}(s), \ddot{g}(s), \dddot{g}(s)\right] = k^2(s)\tau(s) &= \frac{\left[g'(t), g''(t), g'''(t)\right]}{\|g'(t)\|^6} \\
\Longrightarrow k^2(t)\tau(t) &= \frac{\left[g'(t), g''(t), g'''(t)\right]}{\|g'(t)\|^6} \\
\Longrightarrow \tau(t) &= \frac{\left[g'(t), g''(t), g'''(t)\right]}{\left[\|g'(t)\|^3 k(t)\right]^2}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
k(t) = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3} &\Rightarrow k(t)\|g'(t)\|^3 = \|g'(t) \wedge g''(t)\| \\
&\Longrightarrow \tau(t) = \frac{\left[g'(t), g''(t), g'''(t)\right]}{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}
\end{aligned}$$

□

Théorème 5.4.2. ***(Théorème fondamental).*** *Soient Γ_1 et $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux courbes géométriques paramétrées par leur abscisse curviligne . Si elles ont même courbure et torsion et si la courbure ne s'annule pas , alors il existe un isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ qui envoie une courbe sur l'autre. Rappelons que les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont engendrées par les translations et les matrices orthogonales.*

Démonstration. Voir [4] □

5.4.3 Les hélices

Nous avons rencontré dans un exemple la notion d'hélice traçée sur un cylindre. Nous étudions dans cette section une classe légèrement plus large d'exemples afin de mettre en pratique les notions que nous avons rencontrées jusqu'ici.

Définition 5.4.5. *Une hélice généralisée de $\mathbb{R}^3$ est une courbe dont la tangente fait un angle constant avec une direction fixe.*

Exemple 5.4.1. *L'hélice circulaire de $\mathbb{R}^3$ est la courbe paramétrée $\varphi(t) = (acost, asint, bt)$, $t \in \mathbb{R}$. C'est une courbe tracée sur le cylindre*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par (à vérifier) :

$$\varphi(s) = (acos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, asin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Sa courbure et sa torsion (à vérifier) :

$$k(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad et \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

sont donc constantes. Les droites tangentes à cette hélice font toutes un angle constant par rapport à l'axe $(0z)$ du cylindre. En effet, l'axe (oz) est dirigé par un vecteur $V = (0, 0, 1)$. En calculant le produit scalaire

$$\langle T(s), V\rangle = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or $\langle T(s), V\rangle = \cos\theta$; avec θ l'angle entre le vecteur tangent unitaire $T(s)$ et le vecteur V (car les deux vecteurs sont unitaires). Donc

$$\cos\theta = \frac{b}{a^2+b^2} \Longrightarrow \theta = arc\cos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = constante.$$

Exemple 5.4.2. *On considère ici la courbe Γ paramétrée par*

$$\varphi(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

Un calcul direct permet de trouver :

$$\varphi'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \Longrightarrow \| \varphi^{'}(t) \| = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

Et par conséquent,

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1)$$

On reconnaît les formules classiques de la trigonométrie. En posant $\boxed{t = \tan(\frac{\theta}{2}) \Longrightarrow \theta = 2arc\tan t}$, *lorsque $t \in \mathbb{R}$, et $\theta \in]-\pi, \pi[$, on obtient :*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad et \quad \boxed{\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}}$$

Soit alors $\varphi(\theta)$ la paramétrisation par longueur d'arc, elle vérifie :

$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$
$$\Rightarrow \varphi'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$
$$\Rightarrow \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, \theta)$$
$$\Longrightarrow \varphi''(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Et par la suite

$$k(\theta) = ||\varphi''(\theta)|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Or

$$\varphi^{''}(\theta) = k(\theta)N(\theta) \Longrightarrow N(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Calculons à présent le vecteur binormal $B(\theta) = T(\theta) \wedge N(\theta)$. Il vient

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$

et sa dérivée donne

$$B'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, 1) \Longrightarrow \tau(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il s'agit bien d'une hélice généralisée car le vecteur tangent $T(t)$ fait un angle constant $\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur unitaire $V_0 = (0,0,1)$,

$$\langle T(t), V_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

On remarque que le rapport entre la courbure et la torsion est constant :

$$\frac{k(\theta)}{\tau(\theta)} = -1$$

Dans l'exemple précédent, le quotient de la courbure par la torsion est constant. Cette propriété caractérise les hélices généralisées :

Proposition 5.4.5. *Une courbe gauche est une hélice généralisée si et seulement si le quotient de sa courbure par sa torsion est constant.*

Démonstration. Supposons que la courbe est paramétrée par sa longueur d'arc $\varphi(s)$. Soit $T(s) = \varphi'(s)$ le vecteur tangent unitaire. Supposons qu'il existe un vecteur fixe unitaire V_0 tel que $\langle T(s), V_0\rangle = \cos\theta$ est constant. En dérivant cette équation, on obtient $k(s)\langle N(s), V_0\rangle = 0$. En dérivant à nouveau, il vient d'après les formules de Frenet,

$$\langle k(s)T(s) + \tau(s)B(s), V_0\rangle = 0$$

Comme V_0 est orthogonal à $N(s)$, il appartient au plan engendré par $T(s)$ et $B(s)$. Puisqu'il est unitaire on a $\langle B(s), V_0\rangle = \pm \sin\theta$ et l'équation précédente montre donc que

$$\frac{k(s)}{\tau(s)} = \pm \tan(\theta)$$

est constant.
Réciproquement supposons que $\frac{k(s)}{\tau(s)} = \tan(\theta)$ est constant et posons

$$V(s) := \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

On obtient en dérivant

$$V_0(s) = (k(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta)N(s) = 0$$

donc $V(s) = V_0$ est un vecteur unitaire constant et la tangente $T(s)$ fait un angle constant avec V_0 puisque $\langle T(s), V_0\rangle = \cos\theta$. □

De l'exemple 1, on tire une caractérisation des hélices circulaires :

Proposition 5.4.6. *Les seules courbes dont la courbure et la torsion sont constantes sont les hélices circulaires.*

Démonstration. Voir [4] □

5.5 Exercices

Exercice 5.5.1. *On donne l'hélice circulaire dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la longueur d'arc, comme suit :*

$$\varphi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$k(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad et \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Exercice 5.5.2. *Calculer la courbure de la tronchoide :*

$$\varphi(t) = (at - b\sin t, a - b\cos t)\,, t \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 5.5.3. *1. Montrer que la paramétrisation par longueur d'arc de l'hélice circulaire est*

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \mapsto \varphi(t) = (a\cos t, b\sin t, bt)$ *est donne par*

$$\varphi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

2. Calculer sa courbure et sa torsion.

3. *Calculer la tangente à l'hélice au point $\varphi(t)$ et montrer qu'elle fait un angle constant avec l'axe (OZ).*

Exercice 5.5.4. *Calculer "l'appareil de Frenet", la courbure k et la torsion τ de la courbe paramétrée*

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, t, ln(t+\sqrt{1+t^2})\right), t \in \mathbb{R}$$

Exercice 5.5.5.
1. *Déterminer la courbure et la torsion ainsi que l'appareil de Frenet de la courbe paramétrée*
$$\gamma(t) = (4cost, -5sint, -3cost)$$
avec $t \in [0, 2\pi]$. Peut on déduire la nature exacte de cette courbe ?
2. *Idem avec $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$*

Exercice 5.5.6.
1. *Calculer la courbure de la* ***spirale*** *logarithmique $\varphi(t) = (ae^{bt}sint, ae^{bt}cost)$, $t \in \mathbb{R}$.*
2. *Calculer la courbure de la cardioïde définie en coordonnées polaires pour $r(\theta) = 2a(1 + cos\theta)$, où $a > 1$.*

3. *Donner une paramétrisation de la cubique nodale $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | y^2 = x^3 + x^2\}$ calculer sa courbure K.*

4. *Montrer que la paramétrisation pour longueur d'arc de l'hélice circulaire $\varphi(t) = (acost, asint, bt)$, $t \in \mathbb{R}$ est donnée par :*
$$\psi(s) = (acos.\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, asin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$$
Calculer sa courbure et sa torsion ; et puis montrer que $\frac{K(s)}{\tau(s)} = cte$.

Exercice 5.5.7. *On considère la courbe géométrique Γ définie par le paramétrage*

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}\sin s, \left(\sin\frac{s}{2}\right)^2, \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)$$

où $s \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. *Montrer que γ est une courbe régulière.*
2. *Montrer que cette paramétrisation est une paramétrisation par longueur d'arc.*
3. *Calculer la courbure $k(s)$ de γ en tout point $s \in \mathbb{R}$.*
4. *Calculer la torsion $\tau(s)$ de γ en tout point $s \in \mathbb{R}$.*
5. *Quelle est la nature de la courbe géométrique Γ.*

Chapitre Six

Théorie des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés métriques des surfaces de $\mathbb{R}^3$. On peut définir celles-ci à l'aide d'une **paramétrisation** ou **par une équation implicite**, comme dans le cas des courbes. Le cas modèle est celui des surfaces définies comme le graphe d'une fonction de deux variables réelles. Lorsque la surface est régulière, toutes ces définitions sont équivalentes comme le montrent les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale. Il est cependant important de permettre l'existence des points singuliers, ils existent naturellement dans de nombreuses constructions géométriques. Nous passons en revue les différents façons de définir une surface dans un premier temps, étudions la notion de plan tangent dans la suite, et la 1 ère forme fondamentale. Cette dernière n'est rien d'autre que la restriction de la structure euclidienne de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$. Nous définissons ensuite l'application de Gauss qui joue un rôle fondamental. Nous calculons sa différentielle, obtenant ainsi une nouvelle forme quadratique sur l'espace tangent. C'est la 2 ème forme fondamentale. Nous étudions également la courbure de Gauss.

6.2 Définition et exemples

Définition 6.2.1. *Une* ***surface paramétrée*** *de classe $C^k(k \geq 1)$ est la donnée d'une application de classe $C^k(k \geq 1)$*

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $S = f(U) = \{f(u, v), (u, v) \in U\}$ est appelé le ***support géométrique*** *de la surface paramétré f.*

Définition 6.2.2. *On appelle portion régulière de surface (P.R.S) l'ensemble des points P de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OP} = P(u, v)$ soit une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ satisfaisant :*

1. *L'application $(u, v) \longmapsto P(u, v)$ est bijective presque partout.*
2. *$P(u, v) \in C^1(\Omega)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.*
3. *$D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$, où $D_u\overrightarrow{P}$ et $D_v\overrightarrow{P}$ désignent les dérivées partielles de $\overrightarrow{P}$ par rapport à u et v respectivement.*

Une surface est donc une union des portions régulières de surfaces telle que l'intersection de deux quelconques d'entre elles soit une sous-portion régulière de surface de chacune d'entre elles qu'on peut alors rapporter indifféremment aux paramètres de l'une ou de l'autre. Ce qui revient donc à dire qu'une surface est une partie de $\mathbb{R}^3$ qui est, au voisinage de chacun de ses points, une PRS.

Exemple 6.2.1. *La sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon r notée et définie par*

$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = r\sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \qquad \textit{avec} \quad 0 < u < \pi \quad \textit{et} \quad 0 < v < 2\pi \\ z = r\cos u \end{cases}$$

Donc

$$P(u,v) = (r\sin u \cos v, r\sin u \sin v, r\cos u).$$

Exemple 6.2.2. *Le plan euclidien π est paramétrée par : $P(u,v) = P_0 + u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$, avec $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 6.2.3. *L'ellipsoide E d'équation $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dont un paramétrage est*

$$P(u,v) = [a\ sinu\ cosv, b\ sinu\ sinv, c\ cosu]$$

Exemple 6.2.4. *L'hyperboloide H d'équation $H :\equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ paramétrage est*

$$P(u,v) = [a\ cosu\ chv, b\ shv, c\ sinu\ chv]$$

6.2.1 Reparamétrisation

Comme dans le cas des courbes, il est possible de reparamétrer les surfaces par des applications (difféomorphismes).

Définition 6.2.3. *On dira que deux paramétrage (Ω, P) et (Ω', P') sont équivalents s'il existe un changement de variables régulier d'ordre k entre Ω et Ω' tel que $P'(u',v') = P(u(u',v'), v(u',v'))$.*

Soit une surface paramétrée $P : U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto U \subset \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme (c'est-à-dire $J_\varphi \neq 0$). Alors $P \circ \varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que P.
On dit que φ est un changement de variable admissible et que $P \circ \varphi$ est une reparamétrisation de P.

Théorème 6.2.1. *Deux paramétrages d'un même PRS d'un même plan sont équivalents s'il existe un changement de variables régulier d'ordre 1 entre les paramètres.*

6.2.2 Coubes sur une surfaces

Définition 6.2.4. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1. Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U$ est une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres U, alors l'application $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support $S = f(U)$.*

Soit un point $p = f(u, v)$ de la surface et considérons deux intervalles I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ tels que $(u, v) \in I_1 \times I_2 \subset U$. On peut considérer la courbe γ_u (avec $u \in I_1$) :

$$\gamma_u : v \in I_2 \mapsto f(u, v).$$

Clairement, γ_u est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $S = f(U)$. Si cette courbe est régulière en v cela signifie que le vecteur $\gamma_u'(v)$ est tangent à la courbe γ_u au point $p = \gamma_u(v)$. De même, on peut considérer la courbe coordonnées γ_v (avec $v \in I_2$) :

$$\gamma_v : u \in I_1 \mapsto f(u, v).$$

Si cette courbe est régulière en u cela signifie que le vecteur $\gamma_v'(u)$ est tangent à la courbe γ_v au point $p = \gamma_v(u)$. Or, par définition des dérivées partielles, nous avons :

$$\gamma_u'(v) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \quad et \quad \gamma_v'(u) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$$

6.3 Espace tangent et vecteur normal à une surface

Définition 6.3.1. *Considérons S une P.R.S paramétrée par $P(u, v)$. On appelle* ***plan tangent*** *au point P_0 à Σ, le plan déterminé par*

$$(P_0, \overrightarrow{D_uP}, \overrightarrow{D_vP}).$$

On le note

$$T_{p_0}S = (P_0, \overrightarrow{D_uP}, \overrightarrow{D_vP})$$

Il est parfaitement définie puisque $\overrightarrow{D_uP}$ et $\overrightarrow{D_vP}$ sont linéairement indépendants :

$$(\overrightarrow{D_uP} \wedge \overrightarrow{D_vP} \neq \overrightarrow{0}).$$

Proposition 6.3.1. *Le plan tangent est indépendant du paramétrage choisi.*

Démonstration. En effet, si $P'(u', v')$ est un autre paramétrage équivalent de Σ c'est-à-dire

$$P'(u', v') = P[u(u', v'), v(u', v')]$$

On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_{u'}P'} = D_{u'}u.\overrightarrow{D_uP} + D_{u'}v.\overrightarrow{D_vP} \\ \overrightarrow{D_{v'}P'} = D_{v'}u.\overrightarrow{D_uP} + D_{v'}v.\overrightarrow{D_vP} \end{cases}$$

$\Longrightarrow (\overrightarrow{D_{u'}P'}, \overrightarrow{D_{v'}P'})$ et $(\overrightarrow{D_uP}, \overrightarrow{D_vP})$ déterminent le même plan tangent. □

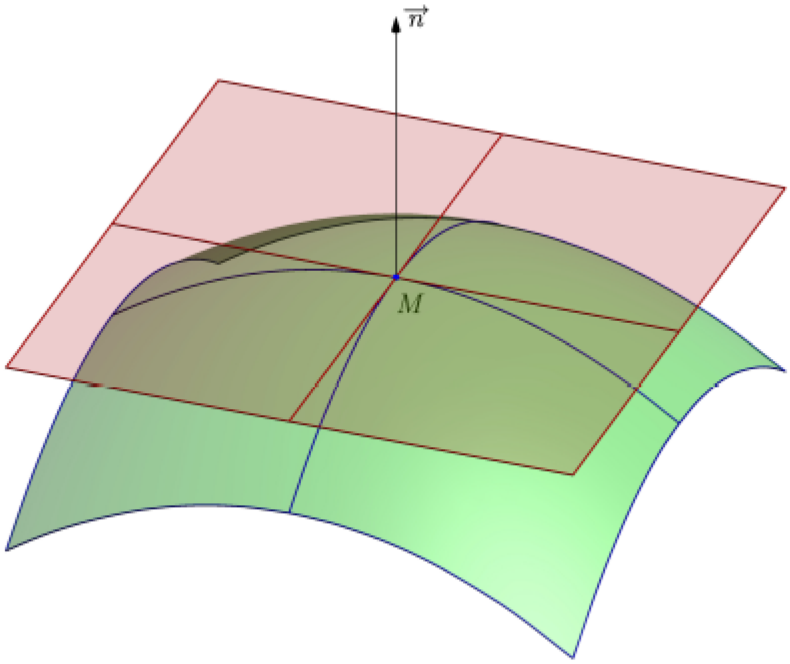

FIGURE 6.1 – Plan tangeant

Exemple 6.3.1. *Soit* $\Omega =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ *et* $P(u, v)$ *définie par*

$$P(u, v) = (sinu\ cosv, sinu\ sinv, cosu)$$

On a

$$D_u P = (cosu\ cosv, cosu\ sinv, -\ sinu)$$
$$D_v P = (-\ sinu\ sinv, sinu\ cosv, 0)$$

et

$$D_u P \wedge D_v P = (sin^2 u\ cosv, sin^2 u\ sinv, sinu\ cosu) \neq (0, 0, 0)$$

6.3.1 Détermination de l'équation du plan tangent à une surface

Si $P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est un paramétrage de Σ, l'équation paramétrique vectorielle du plan tangent est :

$$M(u, v) = P_0(u, v) + \lambda \overrightarrow{D_u P} + \mu \overrightarrow{D_v P}$$

Si

$$M(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad \text{et} \quad P_0(u, v) = (x_0(u, v), y_0(u, v), z_0(u, v)),$$

alors

$$\begin{cases} X(u, v) = x_0(u, v) + \lambda D_u x + \mu D_v x \\ Y(u, v) = y_0(u, v) + \lambda D_u y + \mu D_v y \\ Z(u, v) = z_0(u, v) + \lambda D_u z + \mu D_v z \end{cases}$$

En éliminant les paramètres λ et μ, on obtient :

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & (D_u x)_{P_0} & (D_v x)_{P_0} \\ Y - y_0 & (D_u y)_{P_0} & (D_v y)_{P_0} \\ Z - z_0 & (D_u z)_{P_0} & (D_v z)_{P_0} \end{vmatrix} = 0$$

Définition 6.3.2. *On appelle la **normale** à la surface Σ en un point P, la droite perpendiculaire au plan tangent passant par P.*

Ainsi $\overrightarrow{D_u P} \wedge \overrightarrow{D_v P}$ est une direction de la normale.
On se sert souvent de vecteur normal unitaire

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{D_u P} \wedge \overrightarrow{D_v P}}{\|\overrightarrow{D_u P} \wedge \overrightarrow{D_v P}\|}$$

L'équation vectorielle paramétrique de la normale est :

$$M(u, v) = P_0(u, v) + \lambda \overrightarrow{D_u P} \wedge \overrightarrow{D_v P}$$

Et en composantes, on a les équations cartésiennes paramétriques de la normale suivante :

$$\begin{cases} X(u, v) = x_0(u, v) + \lambda(D_u y\ D_v z - D_v y\ D_u z) \\ Y(u, v) = y_0(u, v) + \lambda(D_u z\ D_v x - D_v z\ D_u x) \\ Z(u, v) = z_0(u, v) + \lambda(D_u x\ D_v y - D_v x\ D_u y) \end{cases}$$

En éliminant λ, on obtient les équations cartésiennes sous forme symétrique :

$$\boxed{\frac{X - x_0}{D_u y\ D_v z - D_v y\ D_u z} = \frac{Y - y_0}{D_u z\ D_v x - D_v z\ D_u x} = \frac{Z - z_0}{D_u x\ D_v y - D_v x\ D_u y}}$$

6.3.2 Cas particuliers

1. Si la surface est définie par une fonction implicite : $\Sigma \equiv F(x, y, z) = 0$, on a :

$$\begin{cases} 0 = -D_u F = \overrightarrow{D_u P}.\overrightarrow{\nabla} F \\ 0 = -D_v F = \overrightarrow{D_v P}.\overrightarrow{\nabla} F \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\nabla} F \perp \overrightarrow{D_u P} \\ \overrightarrow{\nabla} F \perp \overrightarrow{D_v P} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\nabla} F$ est le vecteur normal à Σ donc au plan tangent.
En effet, si

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$$

$$0 = D_u F = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$0 = D_v F = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{D_u P}.\overrightarrow{\nabla} F = 0 \\ \overrightarrow{D_v P}.\overrightarrow{\nabla} F = 0 \end{cases} .$$

De là, on déduit que :

– En coordonnées cartésiennes si Σ est définie par son équation implicite : $\Sigma \equiv F(x, y, z) = 0$, alors le plan tangent en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au gradient

$$\nabla F(P_0) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0), \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\Big).$$

Un point

$$P \in T_{P_0}\Sigma \Leftrightarrow \Big\langle \nabla F(P_0), \overrightarrow{P_0 P} \Big\rangle = 0.$$

L'équation du plan tangent est alors donnée par :

$$\boxed{T_{P_0}\Sigma : (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0}$$

– L'équation symétrique de la normale :

$$\boxed{\frac{X - x_0}{D_x F} = \frac{Y - y_0}{D_y F} = \frac{Z - z_0}{D_z F}}$$

2. Si la surface est définie par une fonction explicite $\Sigma : z = f(x, y)$, on a un paramétrage

$$P(x, y) = [x, y, f(x, y)]$$

et on a :

$$\overrightarrow{D_x P} = (1, 0, D_x f)$$
$$\overrightarrow{D_y P} = (0, 1, D_y f)$$
$$\overrightarrow{D_x P} \wedge \overrightarrow{D_y P} = [-D_x f, -D_y f, 1]$$

L'équation du plan tangent est alors :

$$\boxed{\begin{vmatrix} X - x_0 & 1 & 0 \\ Y - y_0 & 0 & 1 \\ Z - z_0 & D_x f & D_y f \end{vmatrix} = 0}$$

$$\Rightarrow -D_x f(X - x_0) + (-D_y f)(Y - y_0) + 1.(Z - z_0) = 0$$

Et l'équation de la normale :

$$\boxed{\frac{X - x_0}{-D_x f} = \frac{Y - y_0}{-D_y f} = \frac{Z - z_0}{1}}$$

6.3.3 Plan tangent à une sphère

L'équation du plan tangent au point $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de la sphère centrée en l'origine et de rayon r est : $x_0x + y_0y + z_0z = r^2$

En effet, un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_pS^2$ ssi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PM} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{PM} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = 0 \\
&\Rightarrow -\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = 0 \\
&\Rightarrow -\|\overrightarrow{OP}\|^2 + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = 0 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OP}\|^2 = r^2 \\
&\Rightarrow (x_0, y_0, z_0).(x, y, z) = r^2 \Rightarrow x_0x + y_0y + z_0z = r^2
\end{aligned}$$

6.3.4 Exercices

Exercice 6.3.1. *Déterminer l'équation du plan tangent et de la normale des surfaces suivantes aux points indiqués :*

1. *Sphère unité* $\mathbb{S}^2 \equiv P(u,v) = \begin{cases} x = sinu\ cosv \\ y = sinu\ sinv \\ z = cosu \end{cases}$
   - *au point* $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
   - *Au pôle nord* $P(u_0, v_0) = (0, 0, 1)$.
2. *Tore* $\mathbb{T}^2 \equiv P(u,v) = \begin{cases} x = (a + r\ cosu)cosv \\ y = (a + r\ cosu)sinv \\ z = r\ sinu \end{cases}$ $u, v \in [0, 2\pi]$ *au point* $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{9})$

Exercice 6.3.2. *On considère la sphère* $\mathbb{S}^2$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de centre* $O(0,0,0)$ *et de rayon* $r > 0$, *définie par le paramétrage*

$$P(u,v) = \Big(r \sin u \cos v, r \sin u \cos v, r \cos u\Big)$$

avec $u \in]0, \pi[$ *et* $v \in]0, 2\pi[$

1. *Montrer que cette surface est régulière.*
2. *Calculer la matrice de la première forme fondamentale.*
3. *Calculer la matrice de la deuxième forme fondamentale.*
4. *En déduire la matrice de Weingarten* W *associée à cette surface.*
5. *Déterminer la courbure de Gauss* k_G *de cette surface.*

6.4 Quelques surfaces particulières

6.4.1 Surfaces cylindriques

Définition 6.4.1. *On appelle surface cylindrique, un ensemble de droites de même direction s'appuyant sur une courbe γ.*

C'est une famille de droites parallèles dépendants d'un paramètre. Les droites s'appellent les génératrices, la direction s'appelle la direction des génératrices, la courbe s'appelle la courbe directrice .
Si $T(u)$ est un paramétrage de la directrice γ et $\vec{e}$ la direction des génératrices, alors un paramétrage de la surface est donnée par :

$$\boxed{P(u,v) = T(u) + v\overrightarrow{e}}$$

Pour qu'il s'agisse d'une P.R.S, il faut que :

1. $P(u,v)$ soit bijection p.p.(à cause de $T(u)$).
2. $P(u,v) \in C^1$.
3. $\overrightarrow{D_uP} \wedge \overrightarrow{D_vP} \neq \vec{0}$ c'est-à-dire les tangentes à la directrice et aux génératrices ne doivent pas avoir même direction. En effet, $\begin{cases} \overrightarrow{D_uP} = \overrightarrow{D_uT} \\ \overrightarrow{D_vP} = \overrightarrow{e} \end{cases}$ Et donc $\overrightarrow{D_uP} \wedge \overrightarrow{D_vP} = \overrightarrow{D_uT} \wedge \overrightarrow{e} \neq \vec{0}$.

Propriétés

1. Le plan tangent à une surface cylindrique est invariant le long d'une génératrice.
   En effet, son équation est :

$$\begin{aligned} M(u,v) &= P(u,v) + \lambda\overrightarrow{D_uP} + \mu\overrightarrow{D_vP} && (6.1)\\ &= T(u) + v\overrightarrow{e} + \lambda\overrightarrow{D_uT} + \mu\overrightarrow{e} && (6.2)\\ &= T(u) + \mu'\overrightarrow{e} + \lambda\overrightarrow{D_uT} && (6.3) \end{aligned}$$

   avec $\mu^{'} = v + u$.
   Cette équation ne dépend plus du paramètre v, donc de la position du point P sur la génératrice.
2. Si $T(u) = [t_1(u), t_2(u), t_3(u)]$, $\overrightarrow{e} = [e_1, e_2, e_3]$ et $P(u,v) = [X, Y, Z]$, on a les équations cartésiennes paramétriques de la surface cylindrique :

$$\begin{cases} X = t_1(u) + ve_1 \\ Y = t_2(u) + ve_2 \\ Z = t_3(u) + ve_3 \end{cases}$$

   Et en éliminant v, on obtient les équations symétriques :

$$\boxed{\frac{X - t_1(u)}{e_1} = \frac{Y - t_2(u)}{e_2} = \frac{Z - t_3(u)}{e_3}}$$

   L'équation cartésienne de la surface cylindrique s'obtient en éliminant u entre ces équations.

3. L'équation cartésienne de la surface cylindrique dont la directrice a pour équation

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

et dont les génératrices sont parallèles à $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les vecteurs :

$$\begin{cases} f_1(x+\lambda e_1, y+\lambda e_2, z+\lambda e_3)=0 \\ f_2(x+\lambda e_1, y+\lambda e_2, z+\lambda e_3)=0 \end{cases}$$

En effet, un point quelconque de la directrice peut s'écrire :

$$\begin{cases} X = x+\lambda e_1 \\ Y = y+\lambda e_2 \\ Z = z+\lambda e_3) \end{cases}$$

4. La C.N.S pour qu'une surface soit une surface cylindrique est que son équation cartésienne ait la forme $f(\pi_1, \pi_2)=0$ où la direction de génératrice est :

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

avec π_1 et π_2 sont les premiers membres des équations de deux plans.

En effet,
CN : Toute génératrice d'une surface cylindrique peut admettre une équation cartésienne du type

$$\begin{cases} \pi_1 = \alpha \\ \pi_2 = \beta \end{cases}$$

Elles sont ainsi toutes parallèles à l'intersection de deux plans $\pi_1 = 0$ et $\pi_2 = 0$.
Puisque ces deux génératrices ne dépendent que d'un paramètre, il doit y avoir une relation entre α et β soit $f(\alpha, \beta)=0$ ou $f(\pi_1, \pi_2)=0$.
D'autre part,
CS : Si la surface s'écrit sous forme $f(\pi_1, \pi_2)=0$, une droite d'équation

$$\begin{cases} \pi_1 = \alpha \\ \pi_2 = \beta \end{cases}$$

ne peut appartenir à la surface que si elle vérifie l'équation $f(\alpha, \beta)=0$ c'est-à-dire qu'on a une famille des droites dépendant d'un paramètre et de même direction que $\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$. C'est donc une surface cylindrique.

Exemple 6.4.1. $(x-y)^2+z^2=0$; $\pi_1=x-y=0$; $\pi_2=z=0$, *direction* $(1,1,0)$.

Exercice 6.4.1. *Ecrire l'équation de la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles au vecteur* $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$ *et de la courbe* $\gamma=\begin{cases} y^2-2px=0 \\ z=0 \end{cases}$

6.4.2 Surfaces coniques

Définition 6.4.2. *On appelle surface conique, un ensemble de droites (famille de droites) concourantes s'appuyant sur une courbe.*

Les droites s'appellent les <u>génératrices</u>. Le point où elles concourent s'appelle le <u>sommet</u> et la courbe s'appelle la <u>directrice</u>.
Si $T(u)$ est une représentation paramétrique de la directrice, $S=(s_1,s_2,s_3)$ le sommet, on peut représenter la surface par :

$$\boxed{P(u,v)=S+v\overrightarrow{ST(u)}}, \quad \text{avec}, \quad u\in]a,b[, v\in]0,g(u)[$$

Il s'agit bien d'une PRS car :

1. $P(u,v)$ est bijective p.p à cause de $T(u)$.
2. $P\in C^1$ car C^1 en u et C^∞ en v.
3. Normale à la surface conique : $\overrightarrow{D_uP}\wedge\overrightarrow{D_vP}=v\overrightarrow{D_uT}\wedge\overrightarrow{ST}\neq 0$ (les génératrices ne peuvent pas être tangentes à la directrice).

Propriétés

1. Le plan tangent est invariant le long d'une génératrice.
   Son équation est en effet donnée par :
   $$\begin{aligned} M(u,v) &= S+v\overrightarrow{ST(u)}+\lambda v\overrightarrow{D_uT}+\mu\overrightarrow{S}T(u) \\ &= S+v^{'}\overrightarrow{ST(u)}+\lambda v\overrightarrow{D_uT} \end{aligned}$$
   avec
   $$v^{'}=\mu+v$$
2. Si on pose $\overrightarrow{T}(u)=[t_1(u),t_2(u),t_3(u)]$, $S=[s_1,s_2,s_3]$ et $P(u,v)=[X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)]$. On a les équations paramétriques cartésiennes suivantes :
   $$\begin{cases} X-s_1=v(t_1(u)-s_1) \\ Y-s_2=v(t_2(u)-s_2) \\ Z-s_3=v(t_3(u)-s_3) \end{cases}$$
   En éliminant le paramétre v entre ces équations, nous obtenons les équations symétriques :
   $$\frac{X-s_1}{t_1(u)-s_1}=\frac{Y-s_2}{t_2(u)-s_2}=\frac{Z-s_3}{t_3(u)-s_3}$$
   Et l'équation cartésienne s'obtient en éliminant le paramètre u entre ces équations.

3. L'équation cartésienne de la surface conique de sommet $S = (s_1, s_2, s_3)$ et de directrice

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

s'obtient en éliminant λ entre les équations :

$$\begin{cases} f_1(\frac{X+\lambda s_1}{1+\lambda}, \frac{Y+\lambda s_2}{1+\lambda}, \frac{Z+\lambda s_3}{1+\lambda}) = 0 \\ f_2(\frac{X+\lambda s_1}{1+\lambda}, \frac{Y+\lambda s_2}{1+\lambda}, \frac{Z+\lambda s_3}{1+\lambda}) = 0 \end{cases}$$

En effet de (1), avec $\overrightarrow{T}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$, on a :
$\begin{cases} X(u,v) = s_1 + v(x - s_1) \\ Y(u,v) = s_2 + v(y - s_2) \\ Z(u,v) = s_3 + v(z - s_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = vx + (1-v)s_1 \\ Y = vy + (1-v)s_2 \\ Z = vz + (1-v)s_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X-(1-v)s_1}{v} \\ y = \frac{Y-(1-v)s_2}{v} \\ z = \frac{Z-(1-v)s_3}{v} \end{cases}$ et le résultat s'obtient en posant $\lambda = v - 1 \Leftrightarrow v = \lambda + 1$

4. La CNS pour qu'une surface soit une surface conique est que son équation cartésienne ait la forme : $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$, f étant une **fonction homogène** en π_1, π_2 et π_3 et où π_1, π_2, π_3 représentent les premiers membres des équations de 3 plans.
Le sommet est alors le point donné par

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases}$$

Exemple 6.4.2. *Soit la surface définie par :* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. *On pose*

$$\pi_1 \equiv x = 0, \quad \pi_2 \equiv y = 0, \quad \textit{et} \quad \pi_3 \equiv z = 0$$

Considérons la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ *qui est homogène car*

$$f\big(2(x, y, z)\big) = 4(x^2 + y^2 - z^2) = 2^2 f(x, y, z)$$

On a en plus $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

6.4.3 Enveloppe d'une famille de plans dépendant d'un paramètre

Définition 6.4.3. *On appelle* ***surface enveloppe*** *d'une famille de plans dépendant d'un paramètre une surface qui admet comme plan tangent en un point quelconque un des plans de la famille.*

Théorème 6.4.1. *Soit* $\alpha(u)x + \beta(u)y + \gamma(u)z + \delta(u) = 0$ *l'équation cartésienne du plan de la famille dépendant du paramètre* u.
La surface dont l'équation cartésienne s'obtient en éliminant u *entre les équations*

$$\begin{cases} \alpha(u)x + \beta(u)y + \gamma(u)z + \delta(u) = 0 \\ (D_u\alpha)x + (D_u\beta)y + (D_u\gamma)z + D_u\delta = 0 \end{cases}$$

est l'enveloppe de la famille des plans donnés.

6.5 Surfaces réglées - Surfaces développables

Définition 6.5.1. *On appelle* ***surface réglée*** *une surface par chaque point de laquelle passe une droite, appelée génératrice contenue dans la surface .*

On peut décrire une surface réglée S en la considérant comme la réunion d'une famille de droites $D(u)$ dépendant d'un paramètre u parcourant une partie $I \subset \mathbb{R}$. Il suffit pour cela de se donner pour chaque $u \in I$ un point $P(u)$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{V}(u)$ de $D(u)$. On obtient alors une représentation paramétrique de la surface S :

$$M \in S \Leftrightarrow \exists u \in I, \exists v \in \mathbb{R}, M(u,v) = P(u) + v\overrightarrow{V}(u)$$

L'arc paramétré $u \in I \to P(u) \in \mathbb{R}^3$ est appelé une **courbe directrice** de S.

Exemple 6.5.1. $P(u) = (u, -u^2, u^3)$ *et* $\overrightarrow{V}(u) = (-u^2, 1, u)$
$\Rightarrow S \equiv \{M(u,v) \in \mathbb{R}^3 / M(u,v) = (u, -u^2, u^3) + (-u^2v, v, uv) = (u(1-uv), -u^2+v, u(u^2+v))\}$.

Exemple 6.5.2. *Outre le plan qui est une surface réglée évidente, les surfaces réglées les plus connues sont :*
- le cône,dont toutes les génératrices ont un point commun, appelé sommet du cône ;
- le cylindre, dont les génératrices sont parallèles ;
- le paraboloïde hyperbolique, qui possède deux familles de génératrices,
- l'hyperboloïde à une nappe, qui possède également deux familles de génératrices,
- hélicoïde, la seule surface minimale réglée, avec le plan ;
- le ruban de Möbius, surface réglée non orientable ;
- le conoïde, dont les génératrices sont parallèles à un plan donné (plan directeur) et passant par une droite (axe du conoïde).

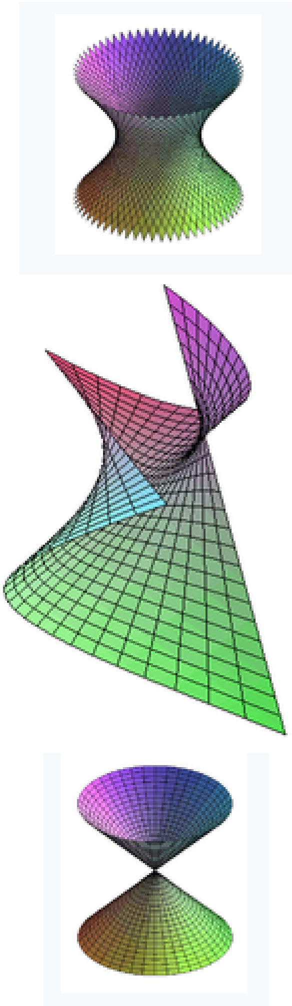

FIGURE 6.2 – Quelques Surfaces réglées

6.5.1 Plan tangent à une surface réglée

En tout point d'une surface réglée, le plan tangent contient la génératrice qui passe par ce point. En effet,la représentation paramétrique donne une base du plan tangent en $M(u,v)$, constitué des vecteurs

$$M_u = \frac{\partial M(u,v)}{\partial u}$$

et

$$M_v = \frac{\partial M(u,v)}{\partial v} = \overrightarrow{V}(u).$$

Ce dernier vecteur dirige la génératrice $D(u)$.

Remarque 6.5.1. *1. Si par un point passent deux génératrices distinctes, celles-ci y engendrent le plan tangent. C'est le cas notamment des surfaces doublement réglées, comme l'hyperboloïde à une nappe ou le paraboloïde hyperbolique.*

2. *Si, pour toute valeur de $u \in I$, en deux points quelconques de la génératrice $D(u)$ les plans tangents sont confondus, on dit que la surface est développable.*

6.5.2 Surfaces développables

Intuitivement, une surface développable est une surface réglée que l'on peut faire rouler sans glisser sur un plan, le contact se faisant le long d'une droite, comme pour un cylindre ou un cône.

Définition 6.5.2. *Une surface développable est une surface réglée telle que le plan tangent est le même le long d'une génératrice.*

On peut caractériser les surfaces développables a l'aide d'un invariant appelé courbure de Gauss.

Remarque 6.5.2. *Les surfaces développables sont des surfaces applicables sur le plan, et réciproquement, toute surface applicable sur le plan de classe $\mathcal{C}^2$ est incluse dans une surface développable. Lorsqu'on applique la surface sur le plan, on dit qu'on la développe. D'où l'appelation de surface développable.*

Les surfaces réglées sont les surfaces engendrées par le mouvement d'une famille à un paramètre de droites (dites alors ses génératrices).

Définition 6.5.3. *Soient $\alpha, \beta : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ deux courbes paramétrées avec $\beta(u) \neq 0, \forall u$. La surface paramétrée $f(u,v) = \alpha(u) + v\beta(u), \forall u \in I$ et $v \in \mathbb{R}$, s'appelle surface réglée de directrice la courbe $]\alpha$ et de génératrice la droite D_u passant par $\alpha(u)$ et de vecteur générateur $\beta(u)$.*

Définition 6.5.4. *Soit L une droite et P un plan fixe sécant a L. On appelle conoïde d'axe L et de plan directeur P la surface réglée dont la directrice est la droite L et la génératrice est toujours parallèle au plan P. Si L est orthogonal à P , on dit qu'on a un conoïde droit. Un tel conoïde est définie par le vissage d'une droite orthogonale à l'axe de vissage.*

Proposition 6.5.1. *Une surface réglée $M(u,v) = P(u) + v\overrightarrow{e}(u)$ est développable si*

$$det(D_u\overrightarrow{P}, D_u\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e}) = 0.$$

Exemple 6.5.3. *Montrer que S paramétré par* $\left\{\begin{array}{r} x = cosu + sinu - v\ sinu \\ y = sinu - cosu + v\ cosu \\ z = v\ e^u \end{array}\right.$ *est réglée et en déduire qu'elle est développable.*

6.6 Première forme fondamentale

Soit $P(u,v)$ un paramétrage d'une P.R.S. On rappelle que différentielle de P notée dP l'expression

$$dP = D_uPdu + D_vPdv.$$

Définition 6.6.1. *On appelle alors la première forme fondamentale la quantité*

$$I(du,dv) = \langle dP, dP\rangle = \|dP\|^2$$

C'est une forme quadratique définie sur le plan tangent.

La première forme fondamentale reflète de quelle façon la surface $\mathcal{E}$ hérite de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Cela va nous permettre de mesurer la longueur des arcs traces sur $\mathcal{E}$, ainsi que les angles entre les vecteurs tangents et l'aire des domaines sur $\mathcal{E}$, sans faire référence a l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.
Déterminons l'expression explicite de la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= \langle D_uPdu + D_vPdv, D_uPdu + D_vPdv\rangle \\ &= \langle D_uPdu, D_uPdu\rangle + \langle D_uPdu, D_vPdv\rangle + \langle D_vPdv, D_uPdu\rangle + \langle D_vPdv, D_vPdv\rangle \\ &= \langle D_uP, D_uP\rangle du^2 + \langle D_uP, D_vP\rangle dudv + \langle D_vP, D_uP\rangle dvdu + \langle D_vP, D_vP\rangle dv^2 \\ &= \langle D_uP, D_uP\rangle du^2 + 2\langle D_uP, D_vP\rangle dudv + \langle D_vP, D_vP\rangle dv^2 \end{aligned}$$

On note traditionnellement :

$$\boxed{I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

ou

$$\boxed{I(du, dv) = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}$$

Proposition 6.6.1. *La première forme fondamentale $I(du, dv)$ ne dépend pas du paramétrage choisi.*

Démonstration. Si $P(u, v)$ et $Q(x, y)$ sont deux paramétrages équivalents i.e

$$P(u, v) = Q\left(x(u, v), y(u, v)\right),$$

on a :

$$\begin{aligned} I^*(dx, dy) &= \langle dQ, dQ\rangle = \|dQ\|^2 \qquad (6.4) \\ &= \langle D_xQdx + D_yQdy, D_xQdx + D_yQdy\rangle \\ &= \Big\langle D_xQ(D_uxdu + D_vxdv) + D_yQ(D_uydu + D_vydv), D_xQ(D_uxdu + D_vxdv) \\ &+ D_yQ(D_uydu + D_vydv)\Big\rangle \\ &= \Big\langle \left(D_xQD_ux + D_yQD_uy\right) du + \left(D_xQD_vx + D_yQD_vy\right) dv, \left(D_xQD_ux + D_yQD_uy\right) du \\ &+ \left(D_xQD_vx + D_yQD_vy\right) dv\Big\rangle \\ &= \|\left(D_xQD_ux + D_yQD_uy\right) du + \left(D_xQD_vx + D_yQD_vy\right) dv\|^2 \\ &= \|D_uPdu + D_vPdv\|^2 = I(du, dv). \end{aligned}$$

□

Remarque 6.6.1. *Par contre les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariants par cette transformation.*

Exemple 6.6.1. *Considérons la surface définie par :*

$$P(u, v) = (u + v)e_1 + (u - v)e_2 + uve_3$$

$$I(du, dv) = \langle D_uPdu + D_vPdv, D_uPdu + D_vPdv\rangle$$

$$I(du, dv) = \|D_u P du + D_v P dv\|^2$$
$$I(du, dv) = \|D_u P\|^2 du^2 + 2\langle D_u P, D_v P\rangle dudv + \|D_v P\|^2 dv^2$$
$$\|D_u P\|^2 = 2 + v^2; \|D_v P\|^2 = 2 + u^2; \langle D_u P, D_v P\rangle = uv$$
$$I(du, dv) = (2 + v^2)du^2 + (2 + u^2)dv^2 + 2uvdudv$$

Faisons un changement de variables de la forme :

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = u^2 + v^2 + 2uv \\ y^2 = u^2 + v^2 - 2uv \end{cases}$$

$$Q(x, y) = xe_1 + ye_2 + \frac{1}{4}(x^2 - y^2)e_3$$

Calculons $I^*(dx, dy)$ *:*

$$I^*(dx, dy) = (1 + \frac{x^2}{4})(dx)^2 - \frac{1}{2}xydxdy + (1 + \frac{y^2}{4})(dy)^2$$

Au point $(u, v) = (1, 1)$ *par exemple,* $(x, y) = (2, 0)$*, on a :*

$$E = 3, F = 1, G = 3, E^* = 2, F^* = 0, G^* = 1$$

Applications : Avec la première forme fondamentale, on peut calculer les 3 quantités suivantes :

1. La longueur d'une courbe tracée sur une surface
2. L'angle entre deux courbes tracées sur une surface i.e l'angle entre $D_u P$ et $D_v P$
3. L'aire d'une surface

6.6.1 Calcul de la première forme fondamentale avec l'abscisse curviligne

Soit $\mathcal{E}$ une PRS d'équation $P(u, v)$ et soit Γ une courbe tracée sur $\mathcal{E}$ d'équation $P(t) = [u(t), v(t)]$. L'abscisse curviligne de Γ est donnée par :

$$s(t) = \int_a^t \|D_t \overrightarrow{P}\| dt$$

avec

$$D_t s = \|D_t \overrightarrow{P}\|$$
$$\frac{ds}{dt} = \|D_t \overrightarrow{P}\|$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = D_t \overrightarrow{P}.D_t \overrightarrow{P} = \left(D_u \overrightarrow{P} D_t u + D_v \overrightarrow{P} D_t v\right).\left(D_u \overrightarrow{P} D_t u + D_v \overrightarrow{P} D_t v\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ds^2}{(dt)^2} = \left(D_u \overrightarrow{P}\frac{du}{dt} + D_v \overrightarrow{P}\frac{dv}{dt}\right).\left(D_u \overrightarrow{P}\frac{du}{dt} + D_v \overrightarrow{P}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ds^2}{(dt)^2} = \left(D_u \overrightarrow{P}.D_u \overrightarrow{P}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(D_u \overrightarrow{P}.D_v \overrightarrow{P}\right)\frac{du}{dt}.\frac{dv}{dt} + \left(D_v \overrightarrow{P}.D_u \overrightarrow{P}\right)\frac{du}{dt}.\frac{dv}{dt} + \left(D_v \overrightarrow{P}.D_v \overrightarrow{P}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \|D_u \overrightarrow{P}\|^2 \frac{du^2}{(dt)^2} + 2\langle D_u \overrightarrow{P}, D_v \overrightarrow{P}\rangle \frac{dudv}{(dt)^2} + \|D_v \overrightarrow{P}\|^2 \frac{dv^2}{(dt)^2}$$

$$\Longrightarrow ds^2 = \|D_u \overrightarrow{P}\|^2 du^2 + 2\langle D_u \overrightarrow{P}, D_v \overrightarrow{P}\rangle dudv + \|D_v \overrightarrow{P}\|^2 dv^2$$

Exemple 6.6.2. 1. *Soit P le plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par un point P_0 et dont la partie vectorielle est engendrée par une base orthonormée $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \mathbb{R}^3$. Il admet la paramétrisation :*

$$P(u,v) = P_0 + u\overrightarrow{w_1} + v\overrightarrow{w_2} \Longrightarrow P(u,v) = (u,v,0)$$

$$D_u\overrightarrow{P} = w_1, D_v\overrightarrow{P} = w_2$$
$$\langle D_u\overrightarrow{P}, D_u\overrightarrow{P}\rangle = \langle w_1, w_1\rangle = \|\overrightarrow{w_1}\|^2 = 1$$
$$\langle D_v\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{P}\rangle = \langle w_2, w_2\rangle = \|\overrightarrow{w_2}\|^2 = 1$$
$$\langle D_u\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{P}\rangle = \langle w_1, w_2\rangle = 0$$
$$ds^2 = 1.du^2 + 2 \times 0 \times dudv + 1.dv^2$$

Donc $E = 1, F = 0, G = 1$.

2. *Le cylindre droit*
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$$
admet une paramétrisation
$$P(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$
$$D_u\overrightarrow{P} = (-\sin u, \cos u, 0), D_v\overrightarrow{P} = (0,0,1)$$
$$E = \|D_u\overrightarrow{P}\|^2 = 1$$
$$F = D_u\overrightarrow{P}.D_v\overrightarrow{P} = 0$$
et
$$G = \|D_v\overrightarrow{P}\|^2 = 1$$

Remarquons que le plan et le cylindre droit ont même première forme fondamentale(dans ces paramétrisations), on dit qu'ils sont localement isométriques.

Définition 6.6.2. *Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces de $\mathbb{R}^3$.*
- *On dit qu'elles sont isométriques s'il existe une application lisse $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ qui préserve les distances intrinsèques (on dit que f est une isométrie).*
- *On dit qu'elles sont localement isométriques si tout point de $\mathcal{E}_1$ admet un voisinage isométrique à un sous ensemble de $\mathcal{E}_2$ et tout voisinage de $\mathcal{E}_1$ admet un voisinage isométrique à un sous ensemble de $\mathcal{E}_1$*

Théorème 6.6.1. *Deux surfaces sont localement isométriques ssi elles ont la même première forme fondamentale.*

Exercice 6.6.1. *Calculer ds^2 pour $\mathcal{E} : P(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$.*

Exercice 6.6.2. *L'hélicoïde est une surface paramétrée par $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$ où $a > 0$ est un paramètre fixé. Montrer que les coefficients de la première forme fondamentale sont : $E = v^2+a^2, F = 0$ et $G = 1$.*

6.6.2 Quelques applications de la première forme fondamentale

1. **Calcul de la longueur d'un arc tracée sur une surface**
Soit Γ une courbe tracée sur une surface régulière $\mathcal{E}$.
Soit
$$\begin{aligned} P : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto P(u,v) \end{aligned}$$
une paramétrisation de $\mathcal{E}$ et
$$\begin{aligned} \gamma : \qquad [a,b] \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = P(u(t), v(t)) \end{aligned}$$
une paramétrisation de Γ. La longueur de la courbe Γ est
$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E.[u'(t)]^2 + 2F.u'(t)v'(t) + G.[v'(t)]^2} dt}$$
La distance intrinsèque sur une surface est
$$\boxed{d_{\mathcal{E}}(p,q) = \inf\{l(\gamma)\ :\ \gamma \,\text{est une courbe tracée sur}\, \mathcal{E}\, \text{avec}\, \gamma(0) = p\, \text{et}\, \gamma(1) = q}\}$$
Exemple 6.6.3. *Calculer la longueur de l'hélice $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ tracée sur un cylindre de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1. On rappelle que $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.*

2. **Calcul des angles**
L'angle α dans lequel deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathcal{E}$ s'intersectent en $t = t_0$ est l'angle entre les deux vecteurs tangents $\overrightarrow{\gamma'}_1(t_0)$ et $\overrightarrow{\gamma'}_2(t_0)$. Il est déterminé par
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{\gamma'}_1(t_0), \overrightarrow{\gamma'}_2(t_0)\rangle}{\|\overrightarrow{\gamma'}_1(t_0)\|.\|\overrightarrow{\gamma'}_2(t_0)\|}}$$
où $\|\overrightarrow{w}\|$ désigne la longueur du vecteur tangent $w \in T_p\mathcal{E}$ avec $p = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ i.e $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{I_p(w)}$. En particulier
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle D_u\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{P}\rangle}{\|D_u\overrightarrow{P}\|.\|D_v\overrightarrow{P}\|}}$$
Donc l'angle entre $D_u\overrightarrow{P}$ et $D_v\overrightarrow{P}$ est donnée par :
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}}$$
Définition 6.6.3. *On dit qu'une paramétrisation $\varphi(u,v)$ est conforme si les angles dans le plan (u,v) sont les mêmes que les angles correspondants dans $T_p\mathcal{E}$ pour tout point p.*

Proposition 6.6.2. *Une paramétrisation est conforme ssi $E = G$ et $F = 0$.*

3. **Calcul d'aire d'une PRS**
Soit $f(u;v) = (x(u;v); y(u;v); z(u;v))$ les coordonnées locales d'une surface Σ de classe C^1.

Définition 6.6.4. *Soit D un domaine d'une surface régulière Σ. Supposons que D est contenu dans l'image d'une paramétrisation $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ i.e $D \subset f(U) \Leftrightarrow f^{-1}(D) \subset U$. On veut mesurer l'aire de D en faisant les calculs dans U. On appelle* ***aire*** *de D l'intégrale*

$$\boxed{Aire(D) = \int\int_{f^{-1}(D)} \|D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}\| dudv}$$

La quantité $\|D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}\|$ mesure l'aire d'un parallélogramme engendré par les vecteurs tangents $D_u\overrightarrow{P}$ et $D_v\overrightarrow{P}$.

Proposition 6.6.3. *La quantité $\|D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}\|$ est invariante par changement de variable.*

Cela résulte du fait que dans la formule de changement de variables, le jacobien du difféomorphisme envoyant une paramétrisation sur l'autre intervient dans un sens pour $dudv$, et par son inverse pour l'aire du parallélogramme. Rappelons l'identité de Lagrange :

$$\|v \wedge w\|^2 = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$$

$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2.\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$$

Ce qui donne dans notre cas :

$$\|D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}\|^2 = \|D_u\overrightarrow{P}\|^2.\|D_v\overrightarrow{P}\|^2 - \langle D_u\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{P}\rangle^2$$

Il s'ensuit que l'aire peut s'exprimer en termes des notations précédentes :

$$\boxed{Aire(D) = \int\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} dudv}$$

Exemple 6.6.4. *Calculons l'aire d'un tore T^2 de revolution paramétré par*

$$\varphi(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

avec $R > r > 0$ et $u, v \in [0, 2\pi]$

Solution : $E = r^2, F = 0, G = (r\cos u + R)^2$
Il s'en suit que Aire$(T^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r\cos u + R)dudv = 4\pi^2 rR$

Exemple 6.6.5. *Calculons l'aire de la sphere unité.*

$$f(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

On a

$$E = \sin^2 v; F = 0; G = 1$$

Exercice 6.6.3. *Calculer l'aire de la portion latérale D de la sphere unité limitée par*

$$\begin{cases} v_0 \le v \le v_1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Solution : Puisque $EG - F^2 = \sin^2 v$, on a $\int_D\int \sin v dudv = 2\pi(\cos v_0 - \cos v_1)$. L'aire de (D) est identique à celle du cylindre de même hauteur que D.

6.7 Seconde forme fondamentale

Soit $P(u, v)$ une représentation paramétrique d'une surface Σ de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 2$. Alors en tout point (u, v) de Σ, on peut faire correspondre un vecteur normal unitaire

$$\overrightarrow{N} = \frac{D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}}{\|D_u\overrightarrow{P} \wedge D_v\overrightarrow{P}\|}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au moins.

Définition 6.7.1. *On appelle* ***deuxième forme fondamentale*** *au point $p \in \Sigma$, et on note II_p, la forme bilinéaire(symétrique)* $\boxed{II(du, dv) := -\langle \overrightarrow{dP}, d\overrightarrow{N}\rangle}$ *où $\overrightarrow{dN} = D_uNdu + D_vNdv$ est différentielle de $\overrightarrow{N}$.*

Cette quantité est bien définie car

$$\overrightarrow{dN} \in T_{P_0}\Sigma.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}\rangle &= 1 \\
\Rightarrow d\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}\rangle &= 0 \\
\Rightarrow d(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N}) &= 0 \\
\Rightarrow d\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}.d\overrightarrow{N} &= 0 \\
2d\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N} &= 0 \\
\Rightarrow d\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N} &= 0 \\
\Rightarrow d\overrightarrow{N} &\perp \overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

Au point (u, v) la différentielle de $\overrightarrow{N}$ est dans le plan tangent. Calculons maintenant les coefficients de la seconde forme fondamentale :

$$\boxed{II(du, dv) := -\langle \overrightarrow{dP}, d\overrightarrow{N}\rangle}$$

$$II(du, dv) = -\langle D_u\overrightarrow{P}du + D_v\overrightarrow{P}dv, D_u\overrightarrow{N}du + D_v\overrightarrow{N}dv\rangle$$

$$II(du, dv) = -\langle D_uP, D_uN\rangle du^2 - (\langle D_uP, D_vN\rangle + \langle D_vP, D_uN\rangle)\, dudv - \langle D_vP, D_vN\rangle dv^2$$

Posons

$$\boxed{L = -\langle D_u\overrightarrow{P}, D_u\overrightarrow{N}\rangle = b_{11}}$$

$$\boxed{M = -\frac{1}{2}\left(\langle D_u\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{N}\rangle + \langle D_v\overrightarrow{P}, D_u\overrightarrow{N}\rangle\right) = 2b_{12}}$$

$$\boxed{N = -\langle D_v\overrightarrow{P}, D_v\overrightarrow{N}\rangle = b_{22}}$$

On obtient la quantité

$$\boxed{II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}$$

appelée **seconde forme fondamentale**. L, M et N sont appelés les **coefficients de la 2ème forme fondamentale**.

Proposition 6.7.1. *Les coefficients de la 2 ème forme fondamentale peuvent également être obtenus par les formules suivantes :*

$$L = \overrightarrow{N}.D^2_{uu}\overrightarrow{P}, \quad M = \overrightarrow{N}.D^2_{uv}\overrightarrow{P}, \quad et \quad N = \overrightarrow{N}.D^2_{vv}\overrightarrow{P}$$

Démonstration. En effet, partant du fait que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} \perp D_u\overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{N} \perp D_v\overrightarrow{P} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P} = 0 & (*) \\ \overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} = 0 & (**) \end{cases}$$

Et en dérivant les relations $(*)$ et $(**)$ respectivement par à u et v, on a :

$$D_u\overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}.D^2_{uu}\overrightarrow{P} = 0$$

$$\Longrightarrow L = -D_u\overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P} = \overrightarrow{N}.D^2_{uu}\overrightarrow{P}$$

Et

$$D_v\overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}.D^2_{vv}\overrightarrow{P} = 0$$

$$\Longrightarrow N = -D_v\overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} = \overrightarrow{N}.D^2_{vv}\overrightarrow{P}$$

Et en dérivant les relations $(*)$ et $(**)$ respectivement par à v et u, on :

$$\left.\begin{array}{l} D_v\overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}.D^2_{uv}\overrightarrow{P} = 0 \\ D_u\overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}.D^2_{uv}\overrightarrow{P} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D_u\overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} + D_v\overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P} = -2\overrightarrow{N}.D^2_{uv}\overrightarrow{P}$$

$$\Longrightarrow M = -\frac{1}{2}\Big(D_u\overrightarrow{N}.D_v\overrightarrow{P} + D_v\overrightarrow{N}.D_u\overrightarrow{P}\Big)\overrightarrow{N}.D^2_{uv}\overrightarrow{P}$$

□

Propriétés

1. La seconde forme fondamentale est indépendante du paramétrage choisi.
2. La seconde forme fondamentale peut s'écrire sous la forme matricielle par :

$$II(du, dv) = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

3. La seconde forme fondamentale est aussi une forme quadratique sur le plan tangent.

6.8 Courbures des surfaces

Nous nous intéressons à présent aux propriétés métriques des surfaces euclidiennes et rappelons les notions de courbure sur les surfaces vues en Géométrie 2.

6.8.1 Courbure normale

Définition 6.8.1. *On appelle la **courbure normale** le scalaire*

$$\boxed{K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II(du;dv)}{I(du;dv)}}$$

Par exemple la courbure normale de la sphère de rayon a est $K_n = \frac{1}{a}$

6.8.2 Courbures principales, courbure de Gauss et courbure moyenne

Définition 6.8.2. *On appelle les **courbures principales** k_1 et k_2 les valeurs propres de la matrice*

$$\boxed{W = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}}$$

*La matrice W s'appelle la **matrice de Weingarten***

Définition 6.8.3. *On appelle **courbure de Gauss** le scalaire*

$$\boxed{K_G(p) = detW = \frac{detII}{detI} = k_1(p) \times k_2(p)}$$

où k_1 et k_2 sont les courbures principales.

La courbure de Gauss est la plus utilisée surtout pour la classification des surfaces : surfaces à courbure constante(nulle,positive ou négative).

Exemple 6.8.1.
1. *La courbure de Gauss du plan paramétré par $\varphi(u,v) = (u,v,0)$ est constante égale à 0.*
2. *La courbure de Gauss du cylindre paramétré par $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ est constante égale à 0.*
3. *La courbure de Gauss de la sphère unité paramétrée par $\varphi(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ est égale à $+1$.*
4. *La pseudo-sphère paramétrée par*

$$\varphi(u,v) = (a\frac{\cos v}{\cosh u}, a\frac{\sin v}{\cosh u}, a(u - \tanh u))$$

fournit un exemple de surface (de révolution) à courbure de Gauss constante égale à -1

Théorème 6.8.1. ***(Theorem d'Egregium (Gauss, 1827)).*** *Soient*

$$f_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

et

$$f_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

deux surfaces paramétrées de classe C^3. Si f_1 et f_2 sont isométriques alors elles ont même courbure de Gauss.

Exemple 6.8.2. 1. *On a constaté le théorème précédent pour le cas du plan et du cylindre : ces deux surfaces paramétrées sont isométriques (même première forme fondamentale) et leur courbure de Gauss est effectivement la même (nulle). En revanche, les courbures moyennes sont différentes.*

2. *Le plan et la sphère n'ont pas la même courbure de Gauss (l'une est nulle, l'autre non), donc les deux surfaces ne sont pas isométriques.*

Remarque 6.8.1. *La réciproque du théorème d'Egregium est fausse. Deux surfaces paramétrées peuvent avoir la même courbure sans être isométriques.*

Exemple 6.8.3. *Les courbes*

$$\varphi(u,v) = (usin(v), ucos(v), \ln(u))$$

et

$$\psi(u,v) = (ucos(v), usin(v), v)$$

ont même courbure de Gauss mais qu'elles ne sont pas isométriques.

Définition 6.8.4. *On appelle* **courbure moyenne** *le scalaire noté K_m ou H défini par*

$$\boxed{K_m(p) = \frac{traceW}{2} = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}}$$

6.8.3 Surface minimale

Définition 6.8.5. *On appelle surface minimale une surface régulière de courbure moyenne nulle ($H = 0$).*

Remarque 6.8.2. *Une surface minimale ne minimise pas forcément l'aire .*

Exemple 6.8.4. *On considère la surface S définie par le paramétrage*

$$f :]0;1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (u;v) \mapsto (ucosv; usinv; v)$$

Calculons les différentes courbures et déduire qu'il s'agit d'une surface minimale. On donne ici une

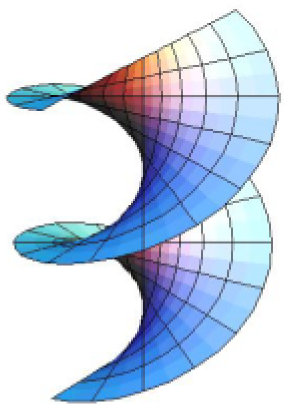

FIGURE 6.3 – Morceau d'hélicoïde

caractérisation des surfaces développables à l'aide de la courbure de Gauss.

Théorème 6.8.2. *La courbure de Gauss d'une surface développable est nulle. Elle ne l'est pas pour une surface réglée quelconque.*

Exemple 6.8.5. *Montrer que S paramétré par*

$$\left\{\begin{array}{r} x = cosu + sinu - v\ sinu \\ y = sinu - cosu + v\ cosu \\ z = v\ e^u \end{array}\right.$$

est réglée et en déduire qu'elle est développable.

6.9 Exercices

Exercice 6.9.1. *Déterminer l' équation de l'espace tangent aù point $(1, 1, 3)$ à la surface paramétrée par les équations*

$$(u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \\ z = u + 2v \end{cases}$$

Exercice 6.9.2. *Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamendale de la courbe paramétrée par $P(u, v) = \big(u, v, u(u^2 - 3v^2)\big)$.*

Exercice 6.9.3. *La paraboloïde hyperbolique est une surface réglée définie par l'équation $z = xy$.*

1. *Paramétrer la paraboloïde hyperbolique comme surface réglée.*
2. *Calculer la première et la seconde forme fondamentale.*
3. *Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne.*
4. *Montrer que la paraboloïde hyperbolique est un conoïde.*

Exercice 6.9.4. *H_1 est la surface définie par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.*

1. *Paramétrer H_1 comme une surface réglée.*
2. *Calculer I et II.*
3. *Calculer les courbures principales , la courbure de Gauss et la courbure moyenne.*
4. *H_1 est-elle une surface développable ?*

Exercice 6.9.5. *Les courbes*

$$\varphi(u, v) = (u \sin(v), u \cos(v), \ln(u))$$

et

$$\psi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$$

ont même courbure de Gauss mais qu'elles ne sont pas isométriques.

Exercice 6.9.6. *Soit $\Sigma = \mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Trouver le plan tangent et la normale au point $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.*
2. *Calculer l'aire de la surface de la sphère de rayon R.*

Exercice 6.9.7. *Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2 + y^2) = 0$.*

1. *La surface S est-elle reguliere ?*
2. *Parametrer la surface S (de maniere polynomiale) en prenant les parametres u et v parmi les variables x, y et z.*
3. *Determiner une base de l'espace tangent a la surface S en $A(-6, 1, -1)$.*
4. *Calculer un vecteur normal a la surface S en $A(-6, 1, -1)$.*
5. *Le vecteur $V = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6, 1, -1)$.*

Exercice 6.9.8. *Calculer l'aire de l'ellipsoïde S d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.*

Exercice 6.9.9. *Calculer une application de Weingarten du paraboloïde hyperbolique S d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p(0, 0, 0)$. En deduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.*

Bibliographie

[1] M. Spivak, *Differential Geometry*, vol II, Publish or perish Inc (1979) .

[2] J. Ndimubandi, *Cours de Géométrie I, Poly I MP 2017*, (BMP,UB).

[3] Manfredo Pedrigo do Carmo, *Differential Geometry of curves and surfaces.*

[4] Vincent GUEDJ, *Cours de Géométrie différentielle*, université Paul Sabatier, France (2013-2015)

[5] M. Berger et B. Gaustiaux, *Géométrie différentielle : courbes et surfaces*, PUF, (BMP,UB).