UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
SECTION POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

METHODES MATHEMATIQUES DE LA PHYSIQUE (partim II)

Notes de l'ECUE

3ème année de Bachelier en Physique

par

Dr Thaddée BARANCIRA

Bujumbura, février 2025

2024-2025

Chapitre 1. Fonctions spéciales de la Physique Mathématique

Introduction

La théorie des fonctions spéciales qui est née dans les travaux d'Euler, Gauss, Laplace, Jacobi, Riemann et Tchebychev est de longue date une discipline classique des mathématiques, qui s'est profondément enracinée en analyse mathématique, en théorie des fonctions d'une variable complexe, en théorie des représentations des groupes, en physique théorique et mathématique, et qui, de par ses liens avec ces branches, possède un vaste champ d'applications. Les propriétés des fonctions spéciales ont fait l'objet de travaux fondamentaux.

Les fonctions spéciales sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans de nombreux problèmes de physique théorique et mathématique. Grâce à une généralisation assez évidente de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre, on a pu trouver une représentation intégrale unique pour toutes les fonctions spéciales. Ceci a permis de développer d'une façon naturelle et assez concise les principaux faits de la théorie des fonctions sphériques, cylindriques et hypergéométriques (ainsi que des généralités sur les polynômes orthogonaux classiques d'une variable continue et d'une variable discrète)

Les fonctions spéciales jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines de la physique. Voici quelques-uns des domaines d'application les plus importants :

1. Mécanique quantique :
- Les fonctions d'onde des systèmes quantiques, comme l'oscillateur harmonique, utilisent des polynômes d'Hermite ;
- Les fonctions de Bessel apparaissent dans la résolution des équations de Schrödinger pour des systèmes cylindriques.
2. Électromagnétisme :
- Les polynômes de Legendre sont utilisés pour résoudre des problèmes de potentiel dans des géométries sphériques, comme le champ électrique autour de charges ponctuelles.
3. Théorie des ondes :
- Les fonctions de Bessel sont essentielles dans l'analyse des ondes cylindriques et sphériques, notamment en acoustique et en optique.
4. Thermodynamique et statistique :
- La fonction Gamma est utilisée dans le calcul des intégrales et des distributions statistiques.
5. Relativité et cosmologie :
- Les fonctions spéciales apparaissent dans des solutions aux équations de champ d'Einstein et dans l'étude de modèles cosmologiques.
6. Mécanique des fluides :
- Les fonctions de Bessel et de Legendre sont souvent utilisées dans l'analyse de flux en coordonnées polaires ou sphériques.
7. Physique des particules :
- Les fonctions spéciales sont utilisées dans les calculs de section efficace et dans la théorie quantique des champs.
8. Ingénierie :
- Les fonctions spéciales apparaissent dans les analyses de vibrations, de résonance et dans les systèmes de contrôle.

2024-2025

Ces applications montrent l'importance des fonctions spéciales comme outils mathématiques pour résoudre des problèmes complexes en physique.

2024-2025

1. Fonction gamma

Les fonctions gamma apparaissent occasionnellement dans des problèmes de Physique comme la normalisation des fonctions d'onde de Coulomb et le calcul de probabilités en mécanique statistique. Son importance réside dans son utilité dans le développement d'autres fonctions qui ont des applications physique directes.

1.1. Définitions, quelques propriétés

Au moins trois différentes définitions pratiques sont couramment utilisées pour $\Gamma(z), z \in \mathbb{C}$.

1.1.1. Produit d'Euler

$$\boldsymbol{\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)} n^z} \tag{1}$$

Si l'on remplace z par $z+1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots\cdots(z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \; \frac{n!}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots\cdots(z+n)} n^z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \tag{2}$$

(2) est la relation fonctionnelle de base de la fonction gamma.

A partir de la définition (1) nous pouvons calculer :

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n(n+1)} n = 1 \tag{3}$$

Avec (2) nous obtenons :

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots(n-1) = (n-1)! \tag{4}$$

1.1.2. Intégrale d'Euler

$$\boldsymbol{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \;, \forall\, Re(z) > 0} \tag{5}$$

La restriction sur z est nécessaire pour éviter la divergence de l'intégrale. Lorsque la fonction gamma apparaît dans des problèmes physiques, c'est souvent sous cette forme, ou sous une variante telle que :

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \;, \forall\, Re(z) > 0 \tag{6}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt \;, \forall\, Re(z) > 0 \tag{7}$$

Quand $z = 1/2$, (6) est la fameuse intégrale d'erreur de Gauss et nous avons le résultat intéressant suivant :

2024-2025

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{8}$$

Propriétés :

- $\Gamma(1) = 1$

En effet :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

En effet :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt\,; \quad u = t^z, d\mathrm{v} = e^{-t} dt$$

$$\overset{I.P.P}{\triangleq} [-e^{-t} t^z]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t}) z t^{z-1} dt = 0 + z \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt}_{\Gamma(z)}$$

- $\Gamma(0)$ a une singularité ponctuelle en 0.

En effet :

$$\Gamma(0) = \lim_{x\to 0} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

- $\Gamma(0) = \Gamma(-1+1) = -1\Gamma(-1)$

$$\Rightarrow \Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}$$

-1 est un pôle simple

$\Gamma(m) = \infty$ si m est un entier négatif ou nul

Chaque entier négatif est un pôle simple pour la fonction $\Gamma(x)$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = +\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

⋮

⋮

1.1.3. Produit de Weierstrass

La troisième définition est la suivante :

$$\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}} \tag{9}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma = 0{,}577215664901 \cdots \tag{10}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

1.2. Equivalence des 3 définitions

a) Pour montrer l'équivalence entre les deux premières définitions (équations (1) et (5)), considérons la fonction à 2 variables suivante :

$$F(z,n) \equiv \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{z-1} dt \,, Re(z) > 0 \tag{11}$$

avec $n \in \mathbb{N}$

On sait que :

$$e^1 \equiv \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad e^{-t} \equiv \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) \equiv F(z,\infty) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z) \tag{12}$$

Retournons à l'équation (11) et procédons à son intégration en posant $u = t/n$:

$$F(z,n) = n^z \int_0^1 \underbrace{(1-u)^n}_{f} \cdot \underbrace{u^{z-1} du}_{dg} \tag{13}$$

$$\overset{I.P.P.}{=} n^z \left\{ \underbrace{\left[(1-u)^n \frac{u^z}{z}\right]_0^1}_{0} + \int_0^1 \frac{u^z}{z} \cdot n(1-u)^{n-1} du \right\}$$

$$= \frac{n^{z+1}}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \cdot u^z du \tag{14}$$

(14) a la même forme que (11). En procédant à des intégrations successives par parties, nous aboutissons finalement à :

$$F(z,n) = n^z \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \underbrace{\int_0^1 u^{z+n-1} du}_{=\frac{1}{z+n}}$$

$$= n^z \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)} n^z \tag{15}$$

Cette expression ressemble au membre de droite de l'équation (1). Nous avons donc :

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = F(z,\infty) \equiv \Gamma(z) \tag{16}$$

ce qui complète la démonstration.

b) Equivalence entre la première (équation (1)) et la troisième (équation (9)) définition :

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{m}{z+m}\right) n^z$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} n^z \tag{17}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{m}\right) n^{-z} = z \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{-z\ln n} \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} \cdot e^{+\frac{z}{m}} \right\}$$

$$= z \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}-\ln n\right)} \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} \right\}$$

$$= \boldsymbol{z \cdot e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}}$$

Le dernier terme du membre de droite est identique à l'équation (9).

A partir de (9) on peut démontrer que :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{18}$$

où l'on a utilisé la relation :

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

1.3. Notation factorielle

Dans la deuxième définition, équation (5), le facteur -1 dans $z-1$ de l'exposant est souvent gênant ; par conséquent l'équation (5) est souvent réécrite comme suit, qui définit la fonction factorielle $z!$

$$\int_0^\infty e^{-t} t^z dt \equiv z!\,, \forall\, Re(z) > -1 \tag{19}$$

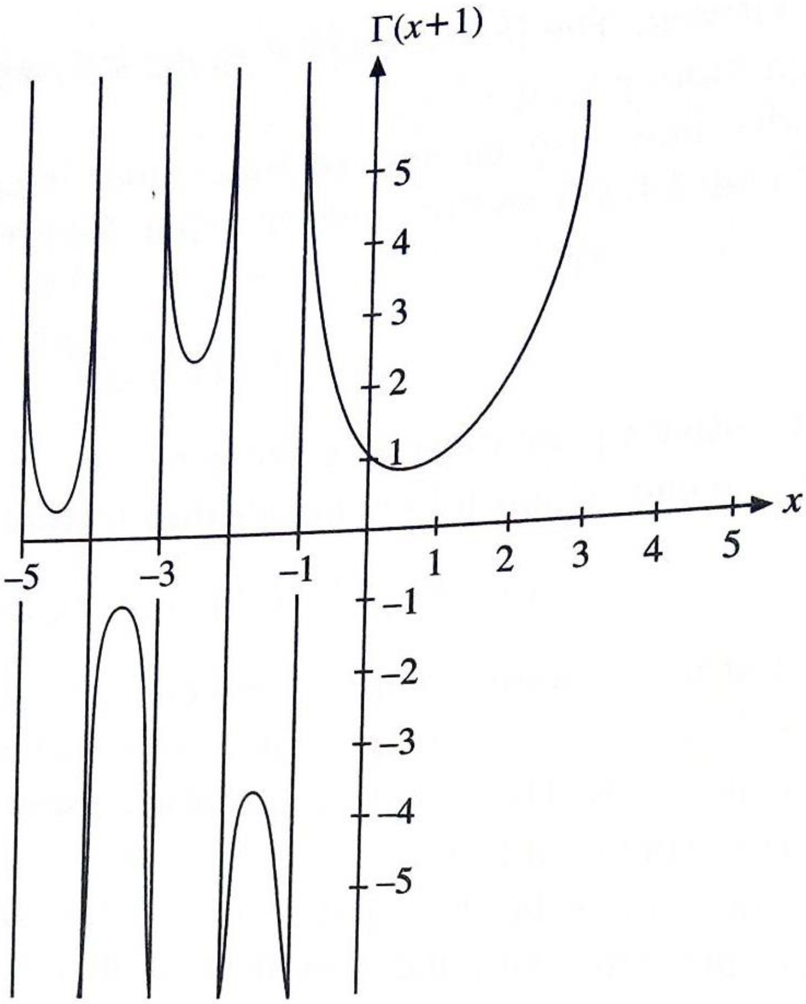
(5) et (19) montrent le lien entre la fonction gamma et la fonction factorielle :

$\Gamma(z) = (z-1)!$ ou $\Gamma(z+1) = z!$

Si $z = n$, un entier positif, $z! = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots n$ comme déjà vu (équation (4)).

2024-2025

(19) montre que la fonction factorielle n'est plus limitée aux valeurs positives de z.



De plus, la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nous donne :

$$(z-1)! = \frac{z!}{z} \text{ et donc } 0! = 1 \text{ et } z!\,(-z)! = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

En se limitant aux valeurs réelles de l'argument, on trouve que $\Gamma(x+1)$ définit la courbe montrée sur la figure ci-dessus.

Exercices

Arfken, de la page 506 à 510.

1.4. Fonctions digamma et polygamma

1.4.1. Fonction digamma

Il n'est pas pratique de traiter les dérivées de la fonction gamma à partir des 3 définitions. Au lieu de cela, il est d'usage de travailler avec le logarithme népérien de la fonction factorielle. Ainsi on définit la fonction digamma comme étant la dérivée logarithmique de la fonction gamma :

$$\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z+1) \qquad (20)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)} n^z$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)} n^z$$

$$\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} [\ln(n!) + z\cdot\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)]$$

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) \equiv \psi(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right]$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

En utilisant la définition de γ, on trouve :

$$\psi(z) + \gamma = -\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{z+1} - 1\right) + \left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{\psi(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)}} \qquad (21)$$

$$\psi(z+1) - \psi(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n}\right) + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z+1}$$

Cela nous permet de calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1}[\psi(k+1) - \psi(k)] = \psi(n) - \psi(0) = \psi(n) + \gamma$$

A partir de (21) on trouve :

$$\psi(0) = -\gamma = -0{,}577215664901$$

$$\text{Pour 6 décimales}, \gamma \cong \frac{228}{395}$$

$$\psi(1) = -\gamma + 1\,;$$

$$\psi(2) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2}$$

$$\psi(3) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

1.4.2. Fonctions polygamma

La fonction trigamma est définie comme :

$$\frac{d}{dz}\psi(z) \equiv \psi'(z)$$

Après calcul on trouve (**exercice**) :

2024-2025

$$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}; \quad \psi'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les fonctions polygamma sont définies de la même façon :

$$\psi''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2!}{(z+n)^3}; \; \psi'''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{+3!}{(z+n)^4}; \; \cdots,$$

$$\psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}}; \; m = 1,2,3,\cdots$$

2. Théorie de Sturm-Liouville

2.1. Problèmes de valeurs limites du second ordre (rappels)

2.1.1. Forme standard

Un problème de valeur limite en forme standard se compose d'une équation différentielle du second ordre de la forme suivante :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \varphi(x) \tag{22}$$

et d'un ensemble de conditions aux limites (c.a.l.) :

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases} \tag{23}$$

où $P(x)$, $Q(x)$ et $\varphi(x)$ sont continus sur $[a,b]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et γ_2 sont des constantes réelles. De plus, on suppose que α_1 et β_1 ne sont pas toutes deux nulles ; il en est de même pour α_2 et β_2.

Le problème de valeur limite est dit **homogène** si l'équation différentielle et les c.a.l. sont toutes homogènes (i.e. si $\varphi(x) = 0$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). Autrement le problème est dit **non homogène**. Ainsi un problème de valeur limite homogène est de la forme suivante :

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Des problèmes de valeur limite homogène plus généraux que (24) sont ceux pour lesquels les coefficients de $P(x)$ et $Q(x)$ dépendent de plus d'une constante arbitraire λ. De tels problèmes s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} y'' + P(x,\lambda)y' + Q(x,\lambda)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Ces deux types de problèmes, (24) et (25), admettent toujours la solution triviale $y(x) = 0$.

2.1.2. Solutions

Un problème de valeur limite est résolu en obtenant d'abord une solution générale pour l'équation différentielle, en utilisant n'importe quelle méthode apprise en M.M.P. I, puis en appliquant les c.a.l. pour déterminer la valeur des constantes arbitraires.

Théorème 1 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'E.D. homogène :

2024-2025

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Il existe des solutions non triviales (i.e. non identiquement nulles) au problème de valeur limite homogène (24) si et seulement si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

Théorème 2 : Le problème de valeur limite défini par (22) et (23) possède une solution unique si et seulement si le problème de valeur limite homogène qui lui est associé (24) n'a qu'une solution triviale.

En d'autres termes, *un problème non homogène possède une solution unique si et seulement si le problème homogène qui lui est associé possède lui aussi une solution unique.*

2.1.3. Problèmes à valeur propre

Appliqué au problème de valeur limite (25), le théorème 1 montre qu'il peut exister des solutions non triviales pour certaines valeurs de λ mais pas pour d'autres. Les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions non triviales sont appelées **valeurs propres**. Les solutions non triviales qui leur sont associées sont appelées des **fonctions propres**.

2.2. Définitions et propriétés

2.2.1. Problèmes de Sturm-Liouville

Un problème de Sturm-Liouville du second ordre est un problème de valeur limite homogène de la forme suivante :

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \quad (27)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

où $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ et $w(x)$ sont continus sur $[a, b]$ et $p(x)$ et $w(x)$ sont positifs sur $[a, b]$.

L'équation (27) peut s'écrire sous forme standard (25) en divisant par $p(x)$. La forme (27), quand on peut l'obtenir, est à préférer car les problèmes de Sturm-Liouville possèdent des propriétés intéressantes que ne présentent pas en général les problèmes à valeur propre. L'équation différentielle du second ordre :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (29)$$

avec $a_2(x)$ non nul sur $[a, b]$, est équivalente à (27) si et seulement si $a_2'(x) = a_1(x)$ (**exercice**). $\boldsymbol{r(x)}$ **est appelée fonction de poids**. Cette condition peut toujours être remplie en multipliant (29) par un facteur adéquat.

L'équation (29) peut encore s'écrire sous une autre forme, en utilisant l'opérateur défini comme suit :

$$\mathcal{L}(x) \equiv a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

(29) se réécrit alors comme suit :

$$\mathcal{L}(x)y(x) = 0 \quad (30)$$

L'opérateur adjoint est défini comme suit :

$$\bar{\mathcal{L}}(x)y(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}[a_2(x)y(x)] - \frac{d}{dx}[a_1(x)y(x)] + [a_0(x)y(x)] \quad (31)$$

L'équation à résoudre est donc : $\bar{\mathcal{L}}(x)y(x) = 0$

Dans le **cas général**, les opérateurs $\mathcal{L}(x)$ et $\bar{\mathcal{L}}(x)$ sont définis comme suit :

$$\mathcal{L}(x)y(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} y(x)$$

$$\bar{\mathcal{L}}(x)y(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [a_{n-k}(x)y(x)]$$

Nous travaillerons uniquement dans le cas où $n = 2$, (équations différentielles linéaire d'ordre 2 – E.D.L.2).

Si $\mathcal{L}(x) = \bar{\mathcal{L}}(x)$, on parle d'un opérateur auto-adjoint et dans ce cas $a_2'(x) = a_1(x)$ et l'on note :

$\mathcal{L}(x) = \bar{\mathcal{L}}(x) \equiv \mathcal{L}_s(x)$ (s pour Sturm-Liouville).

$$\mathcal{L}_s(x)y(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) \tag{32}$$

$\mathcal{L}_s(x)$ est un opérateur linéaire et $a_2(x) \equiv p(x)$ et $a_0(x) = q(x)$

Remarque :

Le problème de Sturm-Liouville s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_s(x)y(x) = -\lambda r(x)y(x)}\ , r(x) > 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0} \\ \boldsymbol{\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0} \end{cases}$$

Ce problème n'a, en général, pas de solutions sauf pour des valeurs particulières de λ. ($\lambda_i \leftrightarrow y_i(x)$, valeurs propres et fonctions propres associées.

Les c.a.l. peuvent être particularisées :

$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0' \end{cases}$ sont des conditions initiales

$\begin{cases} y(a) = y_1 \\ y(b) = y_2 \end{cases}$ sont les conditions aux limites de Dirichlet

$\begin{cases} y'(a) = y_1 \\ y'(b) = y_2 \end{cases}$ sont les conditions aux limites de Von Neumann

2.2.2. Propriétés des problèmes de Sturm-Liouville

Nous passons de la résolution des équations au développement et à la compréhension des propriétés générales des solutions.

- Les valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville sont toutes réelles et positives ou nulles ;
- Les valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville s'ordonnent selon une suite infinie croissante, i.e. $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$. De plus, $\lambda_n \to \infty$ quand $n \to +\infty$;
- A chaque valeur propre d'un problème de Sturm-Liouville est associée une et une seule fonction propre linéairement indépendante ;

- L'ensemble des fonctions propres $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\}$ d'un problème de Sturm-Liouville satisfait la relation **d'orthogonalité** :

  $$\int_a^b w(x)\, f_n(x) f_m(x) dx = 0$$

  pour $n \neq m$, où $w(x)$ est donnée en (27).
  On dit que les fonctions $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\}$ sont orthogonales quand (ou par rapport) à la fonction de poids $w(x)$.

  Démonstration :

Considérons un problème de Sturm-Liouville, i.e. :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0, , r(x) > 0, \forall x \in [a,b]$$

avec $p(x), q(x), r(x)$: $[a,b] \to \mathbb{R}$, et $\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$

Alors

- c'est un problème aux valeurs propres, λ_k
- qui donne comme solutions des fonctions propres $y_k(x)$ orthogonales sur $[a,b]$ par rapport à $r(x)$ (elles peuvent être normées)
- ces fonctions $y_k(x)$ constituent un système complet (fermé), i.e. :

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x)\,, \forall f(x) \text{ continue ou continue par morceau dans } [a,b]$$

Soient $y_i(x)$ et $y_j(x)$ deux solutions linéairement indépendantes i.e. :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i(x)}{dx}\right] + q(x)y_i(x) = -\lambda_i r(x)y_i(x) \qquad (33)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\right] + q(x)y_j(x) = -\lambda_j r(x)y_j(x) \qquad (34)$$

Multiplions (33) par $y_j(x)$ et (34) par $-y_i(x)$ et faisons la somme des deux équations obtenues :

$$y_j(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i(x)}{dx}\right] - y_i(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\right] = -r(x)\left(\lambda_i - \lambda_j\right)y_i(x)y_j(x) \qquad (35)$$

Intégrons (35) de a à b :

$$\int_a^b \left\{y_j(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i(x)}{dx}\right] - y_i(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\right]\right\} dx$$

$$= \left(\lambda_j - \lambda_i\right)\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx \qquad (36)$$

Intégrons par parties les 2 termes du membre de gauche :

$$(i): \int_a^b y_j(x) \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i(x)}{dx}\right]dx = y_j(x)p(x)\frac{dy_i(x)}{dx}\bigg|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\frac{dy_i(x)}{dx}dx$$

$$(ii): \int_a^b y_i(x) \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\right]dx = y_i(x)p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\bigg|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\frac{dy_i(x)}{dx}dx$$

Avec (i) e (ii) (36) devient :

$$\left[p(x)\left(y_j(x)\frac{dy_i(x)}{dx} - y_i(x)\frac{dy_j(x)}{dx}\right)\right]\bigg|_a^b = (\lambda_j - \lambda_i)\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx \qquad (37)$$

Le membre de gauche dépend des c.a.l. imposées aux fonctions propres et à leurs dérivées (et des propriétés de $p(x)$). Si ce terme s'annule, alors :

$$(\lambda_j - \lambda_i)\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx = 0$$

Ce qui nous mène à la propriété énoncée pour $\lambda_j \neq \lambda_i$:

$$\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx = 0, \text{c. q. f. d.}$$

Nous sommes maintenant confrontés à la question suivante : quels types de conditions aux limites entraîneront des fonctions propres orthogonales ? La relation suivante peut être satisfaite pour une variété de conditions :

$$p(b)\left[y_j(b)\frac{dy_i(b)}{dx} - y_i(b)\frac{dy_j(b)}{dx}\right] - p(a)\left[y_j(a)\frac{dy_i(a)}{dx} - y_i(a)\frac{dy_j(a)}{dx}\right] \overset{?}{=} 0 \qquad (38)$$

En effet (38) est nul si :

- $\begin{cases} y_j(a) = 0 \\ y_j(b) = 0 \end{cases}$, appelés c.a.l. (homogènes) de Dirichlet ;
- $\begin{cases} y_j'(a) = 0 \\ y_j'(b) = 0 \end{cases}$ = c.a.l. (homogènes) de Von Neumann ;
- $\begin{cases} \alpha_1 y_j(a) + \beta_1 y_j'(a) = 0 \\ \alpha_2 y_j(b) + \beta_2 y_j'(b) = 0 \end{cases}$ où les coefficients sont les mêmes pour toutes les fonctions propres
- Une des conditions ci-dessus en $x = a$ et l'autre en $x = b$

Toutes ces conditions sont dites **non mélangées** car les valeurs de $y_j(x)$ et $y_j'(x)$ en $x = a$ ne sont pas liées à celles en $x = b$.

Des conditions mixtes sont également possibles ; la plus courante est peut-être l'exigence selon laquelle $y_j(a) = y_j(b)$ et $y_j'(a) = y_j'(b)$ couplée avec $p(a) = p(b)$, appelée aussi la condition de périodicité.

Une autre condition se présente quand $p(a) = 0$ ou $p(b) = 0$ (ou les deux) .

2024-2025

A première vue, cela semble n'imposer aucune restriction sur les fonctions propres et leurs dérivées. Cependant, notez que l'ED peut s'écrire sous la forme :

$$p(x)y'' + p'(x)y(x) - q(x)y(x) - \lambda r(x)y(x) = 0$$

et les zéros de $p(x)$ tels que les points a et b sont des points singuliers de l'équation.

Il est possible de construire des conditions aux limites encore plus compliquées mais la liste ci-dessus inclut les types les plus fréquents.

Exemple : équation de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y(x) = 0$$

$$\mathcal{L}_s(x) \equiv \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]$$

$$p(x) = (1-x^2)$$

$$[a,b] = [-1,+1]$$

$$q(x) = 0$$

$$r(x) = 1$$

Cette équation admet des solutions pour des valeurs particulières de $\lambda = -\ell(\ell+1), \ell = 0,1,2,3,\cdots$. Les fonctions propres $y_j(x)$ associées aux λ_j sont les polynômes de Legendre. Ces fonctions sont déterminées à une constante multiplicative près et peuvent être normées.

Une fonction quelconque, $f(x)$ définie de $[-1,+1] \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire sur les polynômes de Legendre (voir aussi plus tard) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)\,;\text{avec }\; a_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)y_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}|y_n(x)|^2 dx}$$

3. Polynômes orthogonaux

3.1. Théorie générale

3.1.1. Construction de fonctions et polynômes orthogonaux

La construction de fonctions orthogonales se fait de plusieurs façons, dont la procédure de Gram-Schmidt (voir un cours d'Algèbre).

A partir d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes $\{\varphi_n(x)\}$ sur $[a,b]$, on construit les fonctions orthogonales une par une :

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{i} c_{ki}\varphi_k(x)$$

(1) $\psi_0(x) = c_{00}\varphi_0(x)$, qui doit être normée : $(\psi_0,\psi_0) = 1 \Longrightarrow (c_{00})^2(\varphi_0,\varphi_0) = 1$

$$\Longrightarrow c_{00} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi_0,\varphi_0)}}$$

2024-2025

(2) $\psi_1(x) = c_{01}\varphi_0(x) + c_{11}\varphi_1(x)$ tel que : $\begin{cases}(\psi_1,\psi_0) = 0\\(\psi_1,\psi_1) = 1\end{cases} \Longrightarrow c_{01}$ et c_{11} peuvent être calculés

(3) $\psi_2(x) = c_{02}\varphi_0(x) + c_{12}\varphi_1(x) + c_{22}\varphi_2(x)$ tel que : $\begin{cases}(\psi_2,\psi_0) = 0\\(\psi_2,\psi_1) = 0\\(\psi_2,\psi_2) = 1\end{cases} \Longrightarrow c_{02}, c_{12}$ et c_{22} peuvent être calculés ;

(4) $\cdots\cdots$

Toutes les fonctions trouvées seront des polynômes orthogonaux. On aura l'ensemble $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots\}$ avec $\psi_k(x)$= polynôme de degré k.

Exercice :

Construire une série de fonctions orthonormées à partir des fonctions $\varphi_n(x) = x^n; n = 0,1,2,\cdots$. L'intervalle est $[-1,+1]$ et la fonction de poids est $r(x) = 1$.

3.1.2. Propriétés générales des polynômes orthogonaux

(1) Relation de récurrence entre 3 polynômes consécutifs

Etant donné :

- un système de polynômes orthogonaux $\{p_n(x)\}$ sur un intervalle $[a,b]$ par rapport à la fonction de poids $r(x)$.
- $p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots$, avec $a_n \neq 0$ (39)
- $d_n^2 = \int_a^b |p_n(x)|^2 r(x)dx$

Alors :

$$\boxed{\boldsymbol{x \cdot p_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} p_{n-1}(x)} \qquad (40)}$$

Démonstration

- ✓ $x \cdot p_n(x)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de polynômes linéairement indépendants :

$$x \cdot p_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_{mn} \cdot p_m(x) \qquad (41)$$

- ✓ Ces polynômes sont orthogonaux.

Multiplions (41) par $p_k(x), 0 \leq k \leq n+1$ et par $r(x)$, puis procédons à une intégration dans l'intervalle $[a,b]$:

$$\int_a^b p_k(x) \cdot x \cdot p_n(x) \cdot r(x)dx = \sum_{m=0}^{n+1} c_{mn} \cdot \underbrace{\int_a^b p_k(x) \cdot p_m(x) \cdot r(x)dx}_{=0\ si\ m\neq k} = c_{kn}d_k^2$$

$$\Rightarrow c_{mn} = \frac{1}{d_m^2}\int_a^b p_m(x) \cdot x \cdot p_n(x) \cdot r(x)dx \qquad (42)$$

De même, on peut calculer c_{nm} :

$$c_{nm} = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b p_n(x)\cdot x\cdot p_m(x)\cdot r(x)dx \tag{43}$$

(42) et (43) donnent :

$$c_{mn}\cdot d_m^2 = c_{nm}\cdot d_n^2 \tag{44}$$

$\begin{cases} c_{mn} = 0 \text{ pour } m > n+1 \\ c_{nm} = 0 \text{ pour } m < n-1 \end{cases}$. On ne peut donc avoir que 3 coefficients $c_{n-1,n}$, $c_{n,n}$, $c_{n+1,n}$

(39) devient alors :

$$x\cdot p_n(x) = c_{n+1,n}\cdot p_{n+1}(x) + c_{nn}\cdot p_n(x) + c_{n-1,n}\cdot p_{n-1}(x) \tag{45}$$

Avec (39), (45) devient :

$$a_n x^{n+1} + b_n x^n + \cdots = c_{n+1,n}\cdot a_{n+1}x^{n+1} + c_{n+1,n}\cdot b_{n+1}x^n + \cdots + c_{nn}\cdot a_n x^n + \cdots$$

Ceci n'est possible que si le coefficient de chaque puissance de x du membre de gauche est égal à celui du membre de droite :

$$\boldsymbol{c_{n+1,n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}} \tag{46}$$

$$b_n = c_{n+1,n}b_{n+1} + c_{nn}\cdot a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}b_{n+1} + c_{nn}\cdot a_n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c_{nn} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} \tag{47}$$

De (44) on tire :

$$c_{n-1,n} = c_{n,n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2},$$

ce qui nous donne, à partir de (46), en diminuant chaque indice d'une unité ($n+1$ par n et n par $n-1$), la relation suivante :

$$\boldsymbol{c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}} \tag{48}$$

Avec (45), (46) et (47), (45) nous donne alors la relation de récurrence (40).

(2) Formule de Christoffel-Darboux

A partir de la relation (40), nous pouvons écrire :

$$x\cdot p_k(x) = \frac{a_k}{a_{k+1}}p_{k+1}(x) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)p_k(x) + \frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}p_{k-1}(x) \tag{i}$$

$$\xi\cdot p_k(\xi) = \frac{a_k}{a_{k+1}}p_{k+1}(\xi) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)p_k(\xi) + \frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}p_{k-1}(\xi) \tag{ii}$$

$\frac{(\text{i})\times p_k(\xi)}{d_k^2} - \frac{(\text{ii})\times p_k(x)}{d_k^2}$ donne :

$$\frac{(x-\xi)p_k(x)p_k(\xi)}{d_k^2} = \overbrace{\frac{a_k}{a_{k+1}}\frac{p_{k+1}(x)p_k(\xi)-p_{k+1}(\xi)p_k(x)}{d_k^2}}^{\varphi(k+1)}$$
$$-\underbrace{\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{p_k(x)p_{k-1}(\xi)-p_k(\xi)p_{k-1}(x)}{d_{k-1}^2}}_{\varphi(k)} = \varphi(k+1)-\varphi(k)$$

Faisons une sommation sur k variant de 1 à n :

$$(x-\xi)\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k(x)p_k(\xi)}{d_k^2} = [\varphi(2)-\varphi(1)] + [\varphi(3)-\varphi(2)] + \cdots + [\varphi(n+1)-\varphi(n)]$$
$$= [\varphi(n+1)-\varphi(1)]$$
$$= \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(\xi)-p_{n+1}(\xi)p_n(x)}{d_n^2} - \frac{a_0}{a_1}\frac{1}{d_0^2}[\,p_1(x)p_0(\xi)-p_1(\xi)p_0(x)]$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = a_0 = p_0(\xi) \\ p_1(x) = a_1x + b_0 \\ p_1(\xi) = a_1\xi + b_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ \varphi(1) = \frac{a_0}{a_1}\frac{1}{d_0^2}\cdot a_0a_1(x-\xi) = \frac{a_0^2}{d_0^2}(x-\xi) = \boldsymbol{(x-\xi)\frac{p_0(x)p_0(\xi)}{d_0^2}}$$

On aboutit donc à :

$$(x-\xi)\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k(x)p_k(\xi)}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(\xi)-p_{n+1}(\xi)p_n(x)}{d_n^2} - (x-\xi)\frac{p_0(x)p_0(\xi)}{d_0^2}$$

En transférant le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche, on aboutit à la **formule de Christoffel-Darboux :**

$$\boxed{\boldsymbol{(x-\xi)\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x)p_k(\xi)}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(\xi)-p_{n+1}(\xi)p_n(x)}{d_n^2}}} \qquad (49)$$

(3) Propriétés des zéros de $\boldsymbol{p_n}(x)$

$p_n(x) = 0$ admet n racines $x_1, x_2, \cdots, x_n\ \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes peuvent être démontrées :

a) Toutes les racines de $p_n(x) = 0$ sont réelles et $\in [a,b]$;
b) Toutes les racines sont simples ;
c) Les zéros de $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ alternent.

3.2. Polynômes orthogonaux classiques

3.2.1. Définition

On appelle **polynômes orthogonaux classiques** les polynômes $\{p_n(x)\}$ orthogonaux sur $[a,b]$ par rapport à une fonction de poids $r(x)$ qui sont solutions de l'E.D. suivante :

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\cdot r(x)] = \tau(x)\cdot r(x) \qquad (50)$$

où $\tau(x)$ est un polynôme du premier degré ($\tau(x) = c_0 + c_1x$) et :

2024-2025

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) \text{ si } [a,b], \text{avec } a \text{ et } b \text{ finis} \\ (x-a) \text{ si } [a,+\infty[\\ (b-x) \text{ si }]-\infty,b] \\ 1 \text{ si }]-\infty,+\infty[\end{cases}$$ et la c.a.l. suivante :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to b}} x^m \cdot \sigma(x)\cdot r(x) = 0, \quad \forall m = 0,1,2,\cdots \tag{51}$$

Connaissant l'intervalle $[a,b]$, la fonction $\sigma(x)$ est connue et il reste à déterminer les solutions de $r(x)$ à partir de l'équation (50) :

$$\frac{\frac{d}{dx}[\sigma(x)\cdot r(x)]}{\sigma(x)\cdot r(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\ln[\sigma(x)\cdot r(x)] = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}$$

$$r(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\exp\left\{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx\right\} \tag{52}$$

On aura 4 formes pour $r(x)$, suivant l'intervalle donné, remplissant la c.a.l (51) :

- Pour $[a,b]$, a et b finis :

  $r(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ où α et $\beta \in \mathbb{R}$ et valent, en fonction de c_0 et c_1 :

  $$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\tau(b)}{b-a} - 1 \\ \beta = \dfrac{\tau(a)}{b-a} - 1 \end{cases} \quad \text{avec } \tau(a) > 0, \tau(b) < 0$$

- Pour $[a,+\infty[$, a fini :

  $r(x) = (x-a)^\alpha \exp[\tau'(x)\cdot x]$ avec $\alpha = \tau(a) - 1, \tau'(x) = c_1 < 0$

- Pour $]-\infty,b]$, b fini :

  $r(x) = (b-x)^\alpha \exp[-\tau'(x)\cdot x]$ avec $\alpha = -\tau(b) - 1$

- Pour $]-\infty,+\infty[$:

  $r(x) = exp[\int \tau(x)dx]$

3.2.2.Réduction à la forme canonique

On peut réduire les intervalles donnés pour $\sigma(x)$ et ainsi avoir des équations simplifiées.

Ainsi,

- $[a,b]$ peut être ramené à $[-1,+1]$ à l'aide de la transformation suivante :

  $x \in [a,b] \to t \in [-1,+1], \qquad x = \dfrac{a+b}{2} + t\dfrac{b-a}{2};$
- $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$ peuvent être ramenés à $[0,+\infty[$ par la transformation suivante :
  $x \in [a,+\infty[\ \to \mathrm{t} \in [0,+\infty[, \ x = t + a$
  $x \in]-\infty,b] \ \to \mathrm{t} \in [0,+\infty[, \ x = -t + b$
- $]-\infty,+\infty[$ reste $]-\infty,+\infty[$

Les équations deviennent alors (**exercices**) :

Intervalle	$\sigma(x)$	$r(x)$	$\tau(x)$	Polynôme
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$(1-x)^\alpha(x+1)^\beta$	$-(\alpha+\beta+2)x+(\beta-\alpha)$ $(\alpha,\beta>-1)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi
$[0,+\infty[$	x	$x^\alpha \cdot e^{-x}$	$-x+\alpha+1$ $(\alpha>-1)$	$L_n^{(\alpha)}(x)$ Legendre
$]-\infty,+\infty[$	1	e^{-x^2}	$-2x$	$H_n(x)$ Hermite

Cas particuliers :

Intervalle	Polynômes de	Polynômes de	
$[-1,+1]$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi	$\alpha=\beta=\lambda-1/2$; $G_n^{(\lambda)}(x)$= Gegenbauer	• $\alpha=\beta=0,\ (\lambda=1/2)$; $P_n(x)$= Legendre • $\alpha=\beta=-1/2,\ (\lambda=0)$ $T_n(x)$= Tchébicheff (ou Chebychev) de 1ère espèce • $\alpha=\beta=+1/2,\ (\lambda=1)$ $U_n(x)$= Tchébicheff (ou Chebychev) de 2ème espèce
$[0,+\infty[$	$L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre associés	$\alpha=0$ $L_n(x)$= Laguerre	
$]-\infty,+\infty[$	$H_n(x)$ = polynômes d'Hermite		

Résumé :

Polynôme	Intervalle	Fonction de poids
$H_n(x)$	$]-\infty,+\infty[$	$r(x)=e^{-x^2}$
$L_n(x)$	$[0,+\infty[$	$r(x)=e^{-x}$
$P_n(x)$	$[-1,+1]$	$r(x)=1$
$T_n(x)$	$[-1,+1]$	$r(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$U_n(x)$	$[-1,+1]$	$r(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ces polynômes étant orthogonaux, on peut écrire, pour $H_n(x)$ par exemple, la relation :

2024-2025

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\, e^{-x^2} dx = c_n\delta_{nm}$$

c_n étant des constantes d'orthonormalisation qui peuvent être calculés.

3.2.3. Propriétés

(1) Orthogonalité des dérivées

Théorème :

Soient $p_n(x)$ des polynômes orthogonaux classiques (p.o.c.) par rapport à la fonction de poids $r(x)$ sur un intervalle $[a, b]$. Alors les dérivées $\boldsymbol{p_n^{(m)}(x)}$ sont des p.o.c sur le même intervalle que les $p_n(x)$ et par rapport à la fonction de poids :

$$r_m(x) = [\sigma(x)]^m \cdot r(x) \qquad (53)$$

satisfaisant la relation :

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x) \cdot r_m(x)] = \tau_m(x) \cdot r_m(x) \qquad (54)$$

avec $\tau_m(x) = \tau(x) + m\sigma'(x)$.

Ce théorème peut être démontré par récurrence mais nous allons le faire uniquement pour $\boldsymbol{m = 1}$

Evaluons l'intégrale suivante :

$$\int_a^b p_n(x)\, x^{m-1}[\tau(x)r(x)]dx = 0 \ \text{ pour } m < n \qquad (55)$$

En effet $x^{m-1}\tau(x)$ est un polynôme de degré m $(m < n)$, orthogonal donc au polynôme $p_n(x)$ ($\tau(x)$ est un polynôme de degré 1) car un polynôme est toujours orthogonal à tout polynôme de degré inférieur.

Pour $m = 0$, (54) devient :

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x) \cdot r_0(x)] = \tau_0(x) \cdot r_0(x) = \tau(x) \cdot r(x) \qquad (56)$$

car $\tau_0(x) = \tau(x)$ et $r_0(x) = r(x)$

(56) dans (55) donne :

$$\int_a^b p_n(x)\, x^{m-1} \frac{d}{dx}[\sigma(x) \cdot r(x)]dx = 0$$

$$\overset{IPP}{\Leftrightarrow} p_n(x)\, \underbrace{x^{m-1}\sigma(x) \cdot r(x)}_{=0\ car\ c.a.l.}\Big|_a^b - \int_a^b \sigma(x) \cdot r(x) \frac{d}{dx}[p_n(x)x^{m-1}]dx = 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_a^b p_n'(x)x^{m-1}\sigma(x) \cdot r(x)\, dx - (m-1)\underbrace{\int_a^b p_n(x)x^{m-2}\sigma(x) \cdot r(x)\, dx}_{=0\ car\ orthogonalité} = 0$$

2024-2025

$$\Leftrightarrow \int_a^b p_n'(x)x^{m-1}\underbrace{\sigma(x)\cdot r(x)}_{=r_1(x)}\,dx = 0 \qquad (57)$$

$p_n'(x) \perp x^{m-1}$ par rapport à la fonction de poids $r_1(x) = \sigma(x)\cdot r(x)$.

Il reste à prouver (54) pour $m = 1$ i.e. :

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\cdot r_1(x)] \overset{?}{=} \tau_1(x)\cdot r_1(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sigma(x)\cdot r_1(x)] &= \sigma'(x)\cdot r_1(x) + \sigma(x)\cdot\frac{d}{dx}[r_1(x)]\\
&= \sigma'(x)\cdot r_1(x) + \sigma(x)\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}[\sigma(x)\cdot r(x)]}_{\tau(x)r(x)},\ \text{car } r_1(x) = \sigma(x)\cdot r(x)(\text{éq.}\,(53))\\
&= \sigma'(x)\cdot r_1(x) + \sigma(x)\cdot\ \tau(x)\cdot r(x)\\
&= \sigma'(x)\cdot r_1(x) + \tau(x)\cdot\underbrace{\sigma(x)\cdot\ r(x)}_{r_1(x)} = \Big[\underbrace{\sigma'(x)+\tau(x)}_{\tau_1(x)}\Big]\cdot r_1(x)\\
&= \tau_1(x)\cdot r_1(x)\ \textbf{c.q.f.d}
\end{aligned}$$

(2) Equation différentielle

Le but est d'établir une équation différentielle dont les p.o.c. sont solutions. Partons de la relation (57), écrite comme suit :

$$\int_a^b p_n'(x)\cdot\frac{d}{dx}(x^m)\cdot\sigma(x)\cdot r(x)\,dx = 0\ \ \text{où}\, m < n$$

Procédons à l'intégration par parties :

$$\int_a^b p_n'(x)\cdot\frac{d}{dx}(x^m)\cdot\sigma(x)\cdot r(x)\,dx$$

$$= \underbrace{p_n'(x)\cdot\sigma(x)\cdot r(x)\cdot x^m|_a^b}_{=0,\ \ c.a.l.} - \int_a^b x^m\cdot r(x)\overbrace{[\sigma(x)p_n''(x) + p_n'(x)\tau(x)]}^{\tilde{p}_n(x)}\,dx = 0$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[r(x)p_n'(x)\sigma(x)] &= r'(x)p_n'(x)\sigma(x) + r(x)p_n''(x)\sigma(x) + r(x)p_n'(x)\sigma'(x)\\
&= p_n'(x)\underbrace{[r'(x)\sigma(x) + r(x)\sigma'^{(x)}]}_{=\frac{d}{dx}[r(x)\sigma(x)]=\tau(x)r(x)} + r(x)p_n''(x)\sigma(x)\\
&= p_n'(x)\tau(x)r(x) + r(x)p_n''(x)\sigma(x) = r(x)[p_n'(x)\tau(x) + \sigma(x)p_n''(x)]
\end{aligned}$$

Donc, $\forall m < n$:

2024-2025

$$\int_a^b x^m \cdot r(x) \cdot \tilde{p}_n(x)\, dx = 0$$

$\tilde{p}_n(x)$ est un polynôme de degré n, qui peut donc être noté : $\tilde{p}_n(x) = \lambda_n p_n(x)$

On peut donc écrire l'E.D. pour $p_n(x)$:

$\sigma(x)p_n''(x) + p_n'(x)\tau(x) - \lambda_n p_n(x) = 0$

mais on utilise généralement l'E.D. :

$$\boldsymbol{\sigma(x)p_n''(x) + p_n'(x)\tau(x) + \lambda_n p_n(x) = 0} \qquad (58)$$

λ_n peut être calculé à partir de (58) en considérant le cas le plus simple :

$$p_n(x) = x^n, p_n'(x) = nx^{n-1}, p_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\sigma(x) = ax^2 + bx + c;\ \sigma'(x) = 2ax + b;\ \sigma''(x) = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}\sigma''(x)$$

$$\tau(x) = c_1 x + c_0;\ \tau'(x) = c_1$$

(58) devient alors :

$(ax^2 + bx + c)[n(n-1)x^{n-2}] + (c_1x + c_0)nx^{n-1} + \lambda_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow an(n-1)x^n + bn(n-1)x^{n-1} + cn(n-1)x^{n-2} + c_1nx^n + c_0nx^{n-1} + \lambda_n x^n = 0$

Pour que cette égalité ait lieu le coefficient de chaque puissance de x doit être nul.

Coefficient de x^n doit s'annuler :

$$an(n-1) + c_1 n + \lambda_n = 0 \ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma''(x)n(n-1) + \tau'(x)n + \lambda_n = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda_n = -n\left[\tau'(x) + \frac{1}{2}(n-1)\sigma''(x)\right]} \qquad (59)$$

(58) peut s'écrire de 2 façons :

$$\boldsymbol{\sigma(x)\frac{d^2p_n(x)}{dx^2} + \tau(x)\frac{dp_n(x)}{dx} + \lambda_n p_n(x) = 0}$$

ou sous forme auto-conjugué :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)r(x)\frac{dp_n(x)}{dx}\right] + \lambda_n r(x)p_n(x) = 0} \qquad (60)$$

(3) Formule (généralisée) de RODRIGUEZ

Il est utile de rappeler que les $\left\{p_n^{(m)}(x)\right\}$sont des p.o.c. par rapport à la fonction de poids :

$r_m(x) = [\sigma(x)]^m \cdot r(x)$ satisfaisant la relation :

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x) \cdot r_m(x)] = \tau_m(x) \cdot r_m(x)$$

avec $\tau_m(x) = \tau(x) + m\sigma'(x)$.

2024-2025

L'équation (60) est aussi valable pour les $p_n^{(m)}(x)$ si on remplace $\sigma(x)r(x) = r_1(x)$ et $r(x)$ par $r_m(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[r_{m+1}(x)\frac{dp_n^{(m)}(x)}{dx}\right] + \lambda_{nm}r_m(x)p_n^{(m)}(x) = 0 \text{ où } r_{m+1}(x) = \sigma(x)r_m(x) \text{ et } \lambda_{n0} = \lambda_n$$

$$\Leftrightarrow r_m(x)p_n^{(m)}(x) = \frac{1}{-\lambda_{nm}}\frac{d}{dx}\left[r_{m+1}(x)p_n^{(m+1)}(x)\right]$$

En commençant par $m = 0$ et en utilisant successivement l'équation ci-dessus on trouve :

$$r(x)p_n(x) = \frac{1}{-\lambda_{n0}}\frac{d}{dx}\left[r_1(x)p_n^{(1)}(x)\right] = \frac{1}{(-\lambda_{n0})(-\lambda_{n1})}\frac{d^2}{dx^2}\left[r_2(x)p_n^{(2)}(x)\right]$$

$$= \cdots\cdots = \frac{(-1)^m}{\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}}\frac{d^m}{dx^m}\left[r_m(x)p_n^{(m)}(x)\right]$$

On peut continuer ce procédé jusqu'à $m = n$:

$$r(x)p_n(x) = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_{nk}}\frac{d^n}{dx^n}\left[r_n(x)p_n^{(n)}(x)\right]$$

Si $p_n(x) = a_n x^n + \cdots$, alors $p_n^{(n)}(x) = a_n$

On sait aussi que $r_n(x) = [\sigma(x)]^n \cdot r(x)$

On aboutit donc à l'équation suivante :

$$r(x)p_n(x) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_{nk}}a_n}_{\equiv A_n}\frac{d^n}{dx^n}\left[r(x)\cdot[\sigma(x)]^n\right]$$

A_n est une constante (de normalisation) qui peut être déterminée.

$$\boxed{\boldsymbol{p_n(x) = \frac{A_n}{r(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{r(x)\cdot[\sigma(x)]^n\}} \quad \textbf{formule généralisée de RODRIGUEZ} \qquad \textbf{(61)}}$$

Dès que l'intervalle est connu, l'expression explicite de $p_n(x)$ est connue, à une constante multiplicative près.

Conséquences :

a) $\frac{d^n}{dx^n}$ peut être remplacé par l'intégrale de Cauchy :

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

C est un contour fermé encerclant $z = x$

$$p_n(x) = \frac{A_n}{r(x)}\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{r(z)\cdot[\sigma(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

b) $p_n^{(m)}(x)$ sont des polynômes de degré $n - m$ satisfaisant (61) :

$$p_n^{(m)}(x) = \frac{B_{nm}}{r_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \{r_m(x) \cdot [\sigma(x)]^{n-m}\}$$

Or $r_m(x) = r(x) \cdot [\sigma(x)]^m$

$$\boldsymbol{p_n^{(m)}(x) = \frac{B_{nm}}{r(x) \cdot [\sigma(x)]^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \{r(x) \cdot [\sigma(x)]^n\}}$$

(4) Fonction génératrice

On appelle **fonction génératrice d'un système de polynômes** $\{p_n(x)\}$ une fonction $\Phi(x,t)$ dont le développement en série de puissance de t donne, pour des t suffisamment petits, des coefficients

$$\frac{\bar{p}_n(x)}{n!} \quad \text{où } \bar{p}_n(x) = \frac{1}{A_n} p_n(x),$$

(A_n sont les mêmes constantes qui apparaissent dans la formule généralisée de Rodriguez (61)).

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{p}_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!\, A_n} t^n \tag{62}$$

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{A_n} p_n(x) = \frac{1}{r(x)} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{r(z) \cdot [\sigma(z)]^n}{(z-x)^{n+1}} dz$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{r(x)} \oint_C \left\{ \frac{r(z)}{(z-x)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(z) \cdot t}{z-x} \right]^n \right\} dz; \text{ or } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{r(x)} \oint_C \frac{r(z)}{(z-x)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sigma(z) \cdot t}{z-x}} dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{r(x)} \oint_C r(z) \cdot \frac{1}{z - x - \sigma(z) \cdot t} dz$$

La fonction $f(z) = z - x - \sigma(z) \cdot t = 0$ possède 1 ou 2 racines (pour $t \to 0$).

Or on sait que $\sigma(z)$ est un polynôme du 2nd degré : $\sigma(z) = ax^2 + bx + c$

$f(z) = (z-x) - (az^2 + bz + c) \cdot t = -atz^2 - (bt-1)z - (ct+x)$

Cherchons les racines de $f(z) = 0 \Leftrightarrow -atz^2 - (bt-1)z - (ct+x) = 0$ (pour $t \to 0$) :

$$z_{1,2} = \frac{-(bt-1) \pm \sqrt{(bt-1)^2 - 4ta(ct+x)}}{2at} \quad \text{pour } t \to 0$$

$$z_{1,2} = \lim_{t \to 0} \frac{-(bt-1) \pm \sqrt{(bt-1)^2 - 4ta(ct+x)}}{2at}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-(bt-1) \pm (bt-1)\sqrt{1 - \frac{4ta(ct+x)}{(bt-1)^2}}}{2at}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-(bt-1) \pm (bt-1)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{4ta(ct+x)}{(bt-1)^2} + \cdots\right)}{2at}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-(bt-1)\left[1 \mp 1 \pm \frac{2at(ct+x)}{(bt-1)^2} + \cdots\right]}{2at}$$

$$z_1 = \lim_{t\to 0} \frac{-(bt-1)2at(ct+x)}{(bt-1)^2 2at} = \lim_{t\to 0} \frac{-(ct+x)}{(bt-1)} = +x$$

$$z_2 = \lim_{t\to 0} \frac{2(bt-1)^2 - 2at(ct+x)}{(bt-1)^2 2at} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{at} = \infty$$

Pour $t \to 0$, une racine vaut $z_1 = x$ et, s'il y a un 2ème pôle, $z_2 \to \infty$. Alors on s'arrange pour que le contour $\mathcal{C}$ exclut ce pôle.

$\Phi(x,t)$ s'obtient alors à l'aide du calcul des résidus :

$$\text{Rés}\left(\frac{A(z)}{B(z)}\right) = \frac{A(z)}{B'(z)} \quad \text{pour un pôle simple;} \begin{cases} A(z) = r(z) \\ B(z) = f(z) \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_{-1} = \frac{r(z)}{1 - t\sigma'(z)}\bigg|_{z=racine\ de\ f(z)=0\ près\ de\ z=x}$$

$$\boldsymbol{\Phi(x,t) = \frac{r(z)}{r(x)} \frac{1}{1 - t\sigma'(z)}\bigg|_{z=racine\ près\ de\ z=x de\ l'équation:\ z-x-\sigma(z)\cdot t=0}} \tag{63}$$

avec (62) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!\,A_n} t^n = \Phi(x,t) = \frac{r(z)}{r(x)} \frac{1}{1 - t\sigma'(z)}\bigg|_{z=racine\ près\ de\ z=x\ de\ l'équation:\ z-x-\sigma(z)\cdot t=0}$$

3.3. Applications

3.3.1. Polynômes d'Hermite $H_n(x)$

$I =]-\infty, +\infty[$

$\sigma(x) = 1$

$r(x) = e^{-x^2}$

$\tau(x) = -2x$

- **Equation différentielle**

D'après (59) :

$$\lambda_n = -n\left[\tau'(x) + \frac{1}{2}(n-1)\sigma''(x)\right] = -n\left[-2 + \frac{1}{2}(n-1)\cdot 0)\right] = 2n$$

(58) nous donne l'E.D. :

$$\sigma(x)p_n''(x) + p_n'(x)\tau(x) + \lambda_n p_n(x) = 0$$

$$\boldsymbol{y'' - 2xy' + 2ny = 0} \tag{64}$$

- **Expression de $H_n(x)$**

Par Rodriguez (61) :

On peut démontrer que $A_n = (-1)^n$ (pour cela utiliser la fonction génératrice) :

2024-2025

$$p_n(x) = \frac{A_n}{r(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{r(x) \cdot [\sigma(x)]^n\}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, \cdots$$

- **Fonction génératrice**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!\, A_n} t^n = \Phi(x,t) = \frac{r(z)}{r(x)} \frac{1}{1 - t\sigma'(z)}\bigg|_{z=\text{racine près de } z=x \text{ de l'équation: } z-x-\sigma(z)\cdot t=0}$$

Cherchons les racines de $f(z) = z - x - \sigma(z) \cdot t = 0$, avec $\sigma(z) = 1$:

$$z - x - t = 0 \implies z = x + t$$

$$\Phi(x,t) = \lim_{z \to x+t} \frac{r(z)}{r(x)} \frac{1}{1 - t\sigma'(z)} = \frac{r(x+t)}{r(x)} \cdot \frac{1}{1-0} = \frac{r(x+t)}{r(x)} = \frac{e^{-(x+t)^2}}{e^{-x^2}}$$
$$= e^{-\left(x^2+2xt+t^2\right)+x^2} = e^{-\left(2xt+t^2\right)}$$

$$\boldsymbol{e^{-\left(2xt+t^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{t^n}{n!}}$$

Dans certains ouvrages on trouver l'expression suivante :

$$\psi(x,t) = \Phi(x,-t) = \boldsymbol{e^{\left(2xt-t^2\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{H_n(x) \frac{t^n}{n!}} \tag{65}$$

- **Relations entre les polynômes d'Hermite et leurs dérivées : Formules de récurrence**

  a) $\boldsymbol{H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\ (n \geq 1);\ H_1(x) = 2xH_0(x)}$

Partons de la relation suivante :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

Alors :

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^{-x^2}\right) = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(-2xe^{-x^2}\right)$$
$$= 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(xe^{-x^2}\right) = 2(-1)^n e^{x^2} \underbrace{\left[x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right)\right]}_{\text{par Leibnitz}}$$

Le dernier terme provient du développement de Leibnitz :

$$D_x^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, D_x^k f \cdot D_x^{n-k} g$$

On aura donc :

$$H_{n+1}(x) = 2\underbrace{x(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)}_{H_n(x)} - 2n\underbrace{(-1)^{n-1}e^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)}_{H_{n-1}(x)}$$

$$\boldsymbol{H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)}$$

Cette relation peut être démontrée à partir de la fonction génératrice (**exercice ; indication : faire une dérivation par rapport à t**).

b) $\boldsymbol{H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1); \; H'_0(x) = 0}$

Si nous dérivons par rapport à x les deux membres de (65) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{d}{dx}\left[e^{(2xt-t^2)}\right] = 2te^{(2tx-t^2)} = 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}$$

Par identification des coefficients de t^n nous obtenons :

$H'_0(x) = 0$ et pour $n \geq 1$:

$$\frac{H'_n(x)}{n!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

qui se réduit à :

$\boldsymbol{H'_n(x) = 2n\, H_{n-1}(x)}$ c.q.f.d.

- **Propriété d'orthogonalité**

Démontrons que :

$$\int_a^b \boldsymbol{H_n(x)\, H_m(x) e^{-x^2} dx = d_n\, \delta_{nm}} \qquad \text{avec } \boldsymbol{d_n = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{nm}}$$

Partons de (65) :

$$e^{(2xt-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^{(2xs-s^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{s^m}{m!}$$

Multiplions membre à membre les 2 équations ci-dessus et calculons leurs intégrales, en utilisant aussi la fonction de poids :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2xt-t^2+2xs-s^2-x^2)}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}H_m(x)\frac{s^m}{m!}e^{-x^2}dx$$

Calculons d'abord chacun des membres :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2xt-t^2+2xs-s^2-x^2)}\, dx = e^{2st}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-s-t)^2}\, dx = e^{2st}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}\, e^{2st}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}H_m(x)\frac{s^m}{m!}\boldsymbol{e^{-x^2}}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\boldsymbol{e}^{-x^2}dx\right]}_{=d_n\,\delta_{nm}}\frac{t^n s^m}{n!\,m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{(s\,t)^n}{(n!)^2}$$

On obtient donc, en utilisant le développement du terme exponentiel du membre de gauche :

$$\sqrt{\pi}\,e^{2st} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{(t\cdot s)^n}{(n!)^2} \Leftrightarrow \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2s\,t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\frac{(s\,t)^n}{(n!)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\frac{(s\,t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\frac{(s\,t)^n}{(n!)^2}$$

Par identification des coefficients notre problème est résolu :

$$\sqrt{\pi}\,2^n = \frac{d_n}{n!} \Leftrightarrow \boldsymbol{d_n} = \boldsymbol{\sqrt{\pi}\,2^n n!}$$

3.3.2. Polynômes de Laguerre $\boldsymbol{L_n(x)}$

$I = [0,+\infty[$

$\sigma(x) = x$

$r(x) = e^{-x}\cdot x^{\alpha}$

$\tau(x) = -x+\alpha+1$

E.D : $\boldsymbol{xy'' + (1+\alpha-x)y' + ny = 0}$

Rodriguez : Choix de $A_n = 1$

$$\boldsymbol{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}\cdot e^{-x})}$$

$\sigma(x) = x$

$\tau(x) = 1-x$

$\tau(x) = 1-x$

E.D : $\boldsymbol{xy'' + (1-x)y' + ny = 0}$

Rodriguez :

$$\boldsymbol{L_n(x) = \frac{e^x d^n}{dx^n}(x^n\cdot e^{-x})}$$

On peut choisir $A_n = \frac{1}{n!}$, alors $d_n = 1$

2024-2025

4. Les fonctions de Bessel

4.1. La séparation des variables de l'équation de Helmholtz

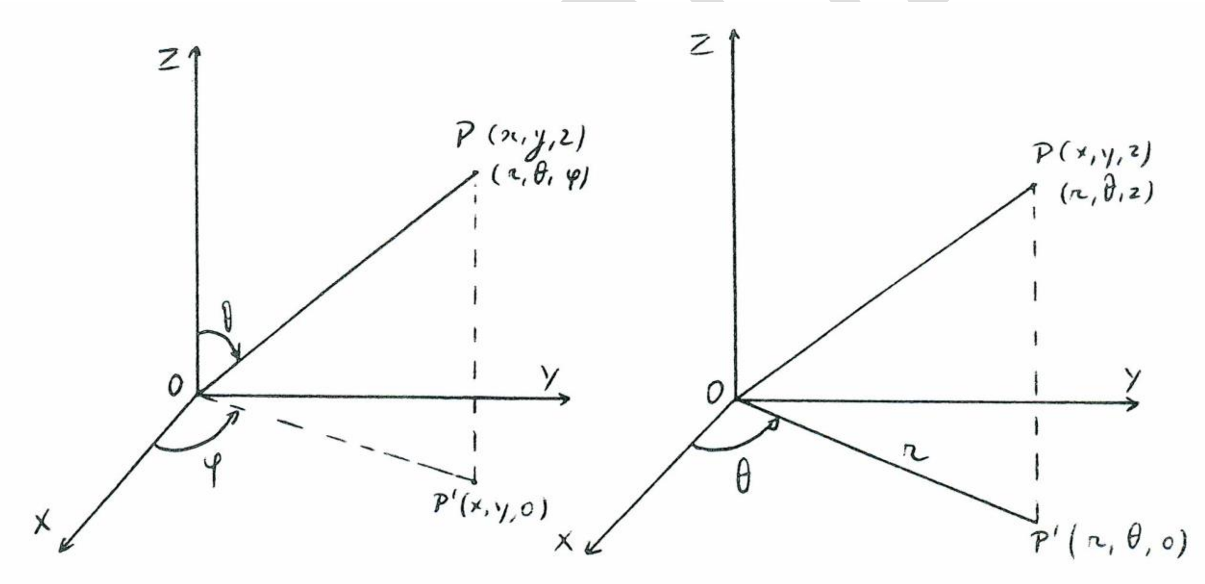
En Physique, l'équation aux dérivées partielles (E.D.P. ci-après) :

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (66)$$

est fréquemment trouvée. Elle décrit la propagation d'une onde de vitesse v. $\varphi(\vec{r},t)$, la grandeur physique qui se propage, peut être la composante d'un champ vectoriel (déplacement dans un barreau, champ électromagnétique, ...) ou une grandeur scalaire (pression, potentiel électromagnétique scalaire,...).

Il s'agit de trouver la solution de cette E.D.P. sous certaines conditions aux limites (c.a.l.) et certaines conditions initiales (c.i.) imposées par un problème physique donné.

Si dans un système physique on a certaines formes comme des sphères ou des cylindres (ou des portions de sphères ou cylindres) il est commode d'introduire des coordonnées sphériques ou cylindriques (figures suivantes) :



On a pour les **coordonnées sphériques :**

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (67)$$

avec $0 \leq \mathrm{r} \leq +\infty$, , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

et les relations inverses :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad (68)$$

Pour les **coordonnées cylindriques** on a :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (69)$$

et les relations inverses :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{\mathrm{x}} \\ \mathrm{z} = \mathrm{z} \end{cases} \quad (70)$$

avec $0 \leq \mathrm{r} \leq +\infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Nous allons appliquer la méthode de la séparation des variables. D'abord nous allons séparer le temps t des variables spatiales $\vec{r}$ en posant :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})T(t) \quad (71)$$

(71) dans (66) nous donne :

$$T(t)\Delta\psi(\vec{r}) - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\psi(\vec{r})\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0 \quad (72)$$

Soit, en divisant par $\psi(\vec{r})T(t)$:

$$\frac{1}{\psi(\vec{r})}\Delta\psi(\vec{r}) - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{1}{T(t)}\,\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0 \quad (73)$$

Le premier terme ne dépend que de $\vec{r}$, le second ne contient que le temps t. Ceci n'est possible que si les deux termes sont égaux à la même constante que nous allons noter λ. Alors on a :

$$\Delta\psi(\vec{r}) = \lambda\psi(\vec{r}) \quad (74)$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda\mathrm{v}^2T(t) \quad (75)$$

(75) est une équation différentielle ordinaire dont la solution est simple. (74) est toujours une E.D.P. avec trois variables indépendantes.

Très souvent on est intéressé par une solution qui varie de façon harmonique dans le temps. La solution de (75) est de la forme :

$$T(t) = T_0 e^{\pm\sqrt{\mathrm{v}^2\lambda}t} \quad (76)$$

T est une fonction harmonique si λ est négatif. Alors on pose :

$$\lambda = -k^2 \quad (77)$$

avec :

2024-2025

$k\mathrm{v} = \omega$ (78)

On a :

$T(t) = T_0 e^{\pm i\omega t}$ (79)

(noter que la forme complexe est choisie, parce que c'est souvent commode).

On prendra souvent $e^{-i\omega t}$ (si nécessaire on peut prendre ω et $k < 0$) , alors la solution de (66) s'écrit :

$\Phi_k(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$ (80)

(noter l'indice k).

Les c.a.l. imposeront des valeurs possibles de ω_k (voir exemples plus tard).

L'E.D.P. pour $\psi(\vec{r})$ devient :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\psi_k(\vec{r}) + k^2\psi_k(\vec{r}) = 0}} \qquad (81)$$

où nous avons affecté $\psi(\vec{r})$ du même indice k pour des raisons évidentes. (81) est appelée **l'équation de Helmholtz** qui joue un rôle très important dans plusieurs domaines de la Physique.

Le laplacien en coordonnées cylindriques peut être calculé à partir des expressions (70).

On trouve :

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (82)$$

de sorte que l'équation de Helmholtz (81) en coordonnées cylindriques s'écrit explicitement :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_k(\vec{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_k(\vec{r})}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_k(\vec{r})}{\partial z^2} + k^2\psi_k(\vec{r}) = 0 \qquad (83)$$

Appliquons de nouveau la méthode de la séparation des variables en posant :

$\psi_k(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ (84)

Pour le moment nous avons omis l'indice k dans le membre de droite. Substituons (84) dans (83) et divisons par $\psi_k(r, \theta, z)$:

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \qquad (85)$$

(noter les "d").

Les deux premiers termes ne dépendent que de r et θ, les deux derniers ne dépendent ni de r ni de θ. Ceci n'est possible que si :

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2 = C_1 \qquad (86)$$

et :

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = -C_1 \qquad (87)$$

2024-2025

où C_1 est une constante.

Alors on a :

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - \lambda_1 Z(z) = 0 \tag{88}$$

où :

$$\lambda_1 = C_1 - k^2 \tag{89}$$

(89) dans (87) donne, après multiplication par r^2 :

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + (k^2 + \lambda_1)\, r^2 = 0 \tag{90}$$

Le deuxième terme ne contient que θ, les autres ne contiennent que r. Ceci n'est possible que si :

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = \lambda_2 \tag{91}$$

et :

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + (k^2 + \lambda_1)\, r^2 = -\lambda_2 \tag{92}$$

où λ_2 est une constante.

(88), (91) et (92) montrent que l'équation de Helmholtz est complètement séparable en coordonnées cylindriques. Il en est de même en coordonnées sphériques (**exercice**).

Remarques

1) L'E.D.P. :

$$\Delta\psi_k(\vec{r}) + k^2\psi_k(\vec{r}) = 0 \tag{93}$$

peut être écrite comme :

$$\Delta\psi_k(\vec{r}) = \lambda\psi_k(\vec{r}) \tag{94}$$

(94) a la forme d'une équation aux valeurs propres. La fonction à rechercher $\psi_k(\vec{r})$ est donc une fonction propre associée à la valeur propre λ de Δ.

2) L'équation de Laplace :

$$\Delta\psi_k(\vec{r}) = 0 \tag{95}$$

est un cas particulier de l'équation de Helmholtz.

4.2. Problèmes de conditions aux limites. L'équation différentielle de Bessel.

Les équations séparées (88), (91) et (92) contiennent des constantes indéterminées λ_1 et λ_2. Ces constantes sont normalement des valeurs propres dans le contexte des c.a.l. imposées par un problème concret (voir exemples plus tard). Il est fréquemment exigé que les solutions de l'équation de Helmoltz soient périodiques en θ, ce qui revient à exiger que les solutions soient continues :

$$\psi_k(r,\theta,z) = \psi_k(r,\theta + 2n\pi, z), \text{ n entier} \tag{96}$$

2024-2025

La solution de (91) est :

$$\Theta(\theta) = \Theta_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_2}\theta} \tag{97}$$

où Θ_0 est constant. La condition de périodicité en θ implique que λ_2 est négatif :

$$\lambda_2 = -m^2 \text{ avec } m = 0,1,2,\ldots \tag{98}$$

On peut se contenter de $m \in \mathbb{Z}^+$.

Nous voyons que la condition de périodicité (continuité) limite les valeurs possibles de λ_2.

L'autre constante λ_1 sera déterminée en utilisant des c.a.l. additionnelles.

Avec (88) on peut réécrire (92) comme suit (après multiplication par $R(r)/r^2$:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \left[(k^2 + \lambda_1) - \frac{m^2}{r^2}\right] R(r) = 0 \tag{99}$$

Souvent $k^2 + \lambda_1$ est positif. Intrroduisons dans ce cas la variable x définie par :

$$x = r\sqrt{k^2 + \lambda_1} \tag{100}$$

On a :

$$\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr}\frac{d}{dx} = \sqrt{k^2 + \lambda_1}\,\frac{d}{dx} \tag{101}$$

et :

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{k^2 + \lambda_1}\,\frac{d}{dx}\right) = (k^2 + \lambda_1)\,\frac{d^2}{dx^2} \tag{102}$$

Si l'on pose :

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{k^2 + \lambda_1}}\right) = y(x) \tag{103}$$

(99) devient alors :

$$(k^2 + \lambda_1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}(k^2 + \lambda_1)\frac{dy(x)}{dx} + (k^2 + \lambda_1)y(x) - \frac{m^2(k^2 + \lambda_1)}{x^2}y(x) = 0 \tag{104}$$

En simplifiant par $(k^2 + \lambda_1)$ on obtient finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y(x) = 0}} \tag{105}$$

Cette équation est appelée l'équation différentielle de Bessel d'ordre m.

Remarque

L'équation de Laplace en coordonnées cylindriques mène exactement à la même équation (105). Là le changement de variable est :

$x = r\sqrt{\lambda_1}$ car $k = 0$.

4.3. Les fonctions de Bessel

4.3.1. Développement en série de la solution.

Pour arriver à l'équation différentielle de Bessel nous avons supposé que m est un entier positif ou nul. Nous considérons maintenant le cas plus général où m est un nombre réel quelconque que nous prenons ≥ 0 et que nous noterons μ. La notation m sera réservée aux entiers. Alors (105) est réécrite comme suit :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{\mu^2}{x^2}\right)y(x)=0 \qquad (106)$$

avec donc $\mu \geq 0$.

(106) est **l'équation différentielle de Bessel d'ordre μ. Ses solutions** sont connues sous le nom de **fonctions cylindriques** dont les **fonctions de Bessel** sont des cas spéciaux.

Nous allons chercher les solutions sous la forme d'une série de Frobenius :

$$y(x)=x^s\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \qquad (107)$$

avec la condition habituelle $a_0 \neq 0$ (= définition).

Nous allons calculer $\{s, a_n\}$.

Réécrivons (41) en multipliant les deux membres par x^2 :

$$x^2y"+xy'+(x^2-\mu^2)y=0 \qquad (108)$$

Nous allons y substituer la série (107) et les séries $y'(x)$ et $y"(x)$ qui sont respectivement :

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+s)x^{n+s-1} \qquad (109)$$

$$y"(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} \qquad (110)$$

Alors on obtient:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+s+2}-\mu^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+s}=0 \qquad (111)$$

Il faut que cette équation soit vérifiée $\forall x$, ce qui n'est possible que si les coefficients de chaque puissance de x sont nuls.

Le coefficient de la plus petite puissance, qui est x^s, est :

$$a_0s(s-1)+a_0s-\mu^2a_0=0 \qquad (112)$$

Il est à noter que x^s ne figure pas dans la troisième série.

(112) peut être réécrite comme :

$$a_0(s^2 - \mu^2) = 0 \qquad (113)$$

ce qui est appelé **l'équation indicielle** ou **déterminante**. $a_0 \neq 0$ donc :

$$\boxed{\boldsymbol{s = \pm\mu}} \qquad (114)$$

Cherchons maintenant les coefficients de x^{s+1} (ce coefficient ne figure pas dans la troisième série). On a :

$$a_1(s+1)s + a_1(s+1) - \mu^2 a_1 = 0 \qquad (115)$$

Soit :

$$a_1[(s+1)^2 - \mu^2] = 0 \qquad (116)$$

Nous reviendrons à cette équation.

Maintenant nous chercherons les coefficients d'un terme général x^{n+s} avec $n \geq 2$.

A cette fin nous allons transformer la troisième série de (111) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s+2}$$

Posons :

$$n' = n + 2 \qquad (n' \geq 2) \qquad (117)$$

Alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s+2} = \sum_{n'=2}^{+\infty} a_{n'-2} x^{n'+s} \qquad (118)$$

Remplaçons dans (53) de nouveau l'indice de sommation n' par n, on peut écrire le membre de droite de (118) comme suit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n+s}$$

de sorte que (111) peut être réécrite comme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n+s} - \mu^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s} = 0 \qquad (119)$$

Le coefficiem de x^{n+s} $(n \geq 2)$est alors :

$$a_n[(n+s)(n+s-1) + (n+s) - \mu^2] + a_{n-2} = 0 \qquad (120)$$

Soit :

$$a_n[(n+s)^2-\mu^2]=-a_{n-2} \tag{121}$$

ou, si l'expression entre crochet est différente de zéro :

$$\boxed{\boldsymbol{a_n=-\frac{1}{(n+s+\mu)(n+s-\mu)}a_{n-2}} \qquad (122)}$$

Cette formule de récurrence implique que tous les coefficients d'indice pair peuvent être exprimés en termes de a_0, et les coefficients d'indice impair en termes de a_1. Notons que pour l'instant a_0 et a_1 sont arbitraires.

Pour procéder davantage on doit spécifier les valeurs de s (l'équation (114)).

4.3.2. $s=\mu$ avec μ quelconque.

Une des valeurs de s est effectivement :

$$s=\mu \tag{123}$$

(116) devient :

$$a_1(2\mu+1)=0 \tag{124}$$

ce qui signifie que :

$$a_1=0 \tag{125}$$

car $\mu \geq 0$.

La relation de récurrence (122) devient ici :

$$a_n=-\frac{1}{(n+2\mu)n}a_{n-2} \tag{126}$$

Avec (125) on voit que tous les coefficients d'indice impair sont nuls et la solution est une fonction paire de x, multipliée par x^μ.

Nous posons :

$$n=2k \tag{127}$$

alors (126) devient :

$$a_{2k}=-\frac{1}{2^2k(k+\mu)}a_{2k-2} \tag{128}$$

Utilisons (128) pour exprimer a_{2k} en termes de a_0 :

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k}k!\,(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k)}a_0 \tag{129}$$

On choisit d'habitude a_0 comme :

$$a_0=\frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \tag{130}$$

où Γ est la fonction d'Euler (voir section 1 ci-dessus) qui, pour un argument entier, s'écrit :

$$\Gamma(x) = (x-1)! \tag{131}$$

de sorte que :

$$x\Gamma(x) = x! = \Gamma(x+1) \tag{132}$$

La forme (132) est la même pour un argument quelconque (cours d'Analyse) :

$$(\mu+1)\Gamma(\mu+1) = \Gamma(\mu+2) \tag{133}$$

$$(\mu+2)\Gamma(\mu+2) = \Gamma(\mu+3) \tag{134}$$

$$\vdots$$

$$(\mu+k)\Gamma(\mu+k) = \Gamma(\mu+k+1) \tag{135}$$

Multiplions les dernières équations membre à membre. Après simplification on obtient :

$$(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k)\Gamma(\mu+1) = \Gamma(\mu+k+1) \tag{136}$$

Avec (130) et (136), (129) devient :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\mu}k!\,\Gamma(\mu+k+1)} \tag{137}$$

Dans (137) le membre de droite est une constante connue, donc la solution correspondant à $s = \mu$ s'écrit explicitement (on la note $J_\mu(x)$) :

$$\boxed{\boldsymbol{J_\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{2^{2k+\mu}k!\,\Gamma(\mu+k+1)}x^{\mu+2k}} \qquad (138)}$$

Cette série est connue sous le nom de **fonction de Bessel d'ordre $\boldsymbol{\mu}$** (de première espèce).

Remarques

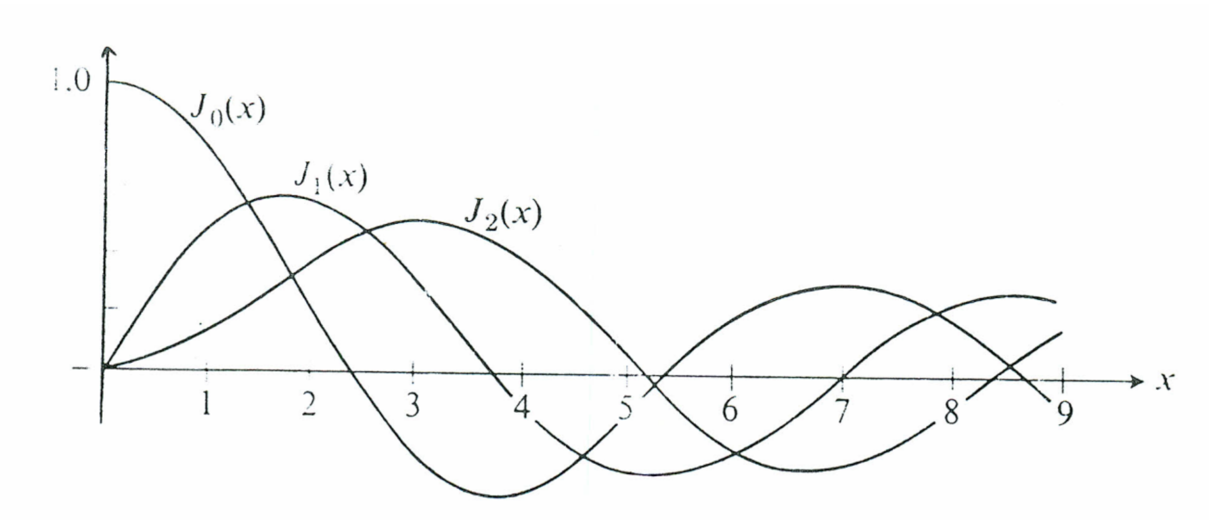
1) La série converge $\forall x$ quel que soit $\mu \geq 0$

   En effet calculons le rapport de la valeur absolue de deux termes successifs :

   $$\frac{x^{\mu+2k+2}}{x^{\mu+2k}}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| = x^2 \frac{1}{2^2(k+1)(\mu+k+1)}$$

   Pour un x donné quelconque, ce rapport est inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de l'indice k, ce qui est un critère de convergence (Analyse).

2) La figure suivante donne l'allure de quelques fonctions de Bessel



4.3.3. $s = -\mu$ avec μ ni entier ni demi-entier.

L'autre valeur possible de s est (équation (114)) :

$$s = -\mu \tag{139}$$

Cela va nous donner la deuxième solution de l'équation différentielle de Bessel (qui est du second ordre). (116) devient maintenant :

$$a_1(1 - 2\mu) = 0 \tag{140}$$

Avec notre condition μ ni entier, ni demi-entier on voit que :

$$a_1 = 0 \tag{141}$$

La formule de récurrence générale (122) devient ici :

$$a_n = -\frac{1}{n(n - 2\mu)} a_{n-2} \tag{142}$$

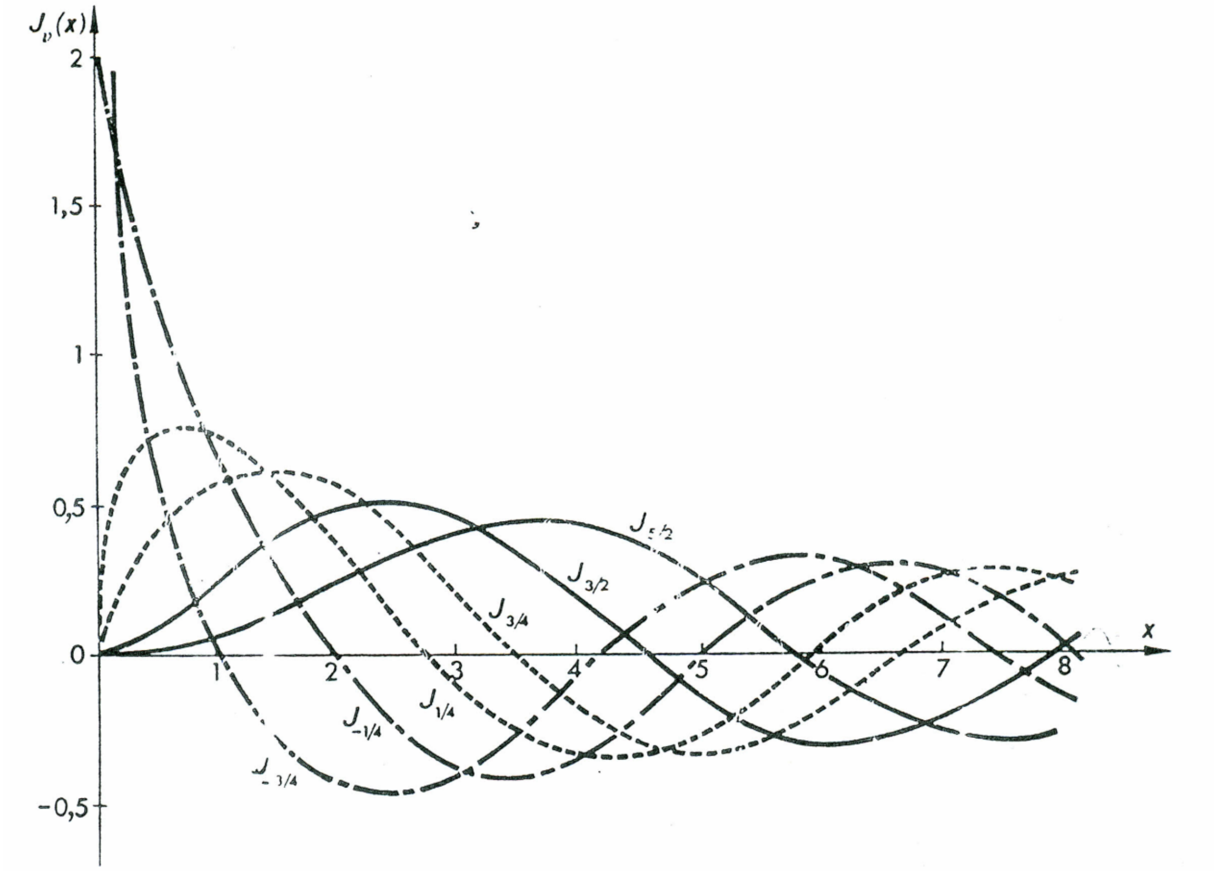
Aucun problème ne se pose ici car le dénominateur de (142) n'est jamais nul. Les coefficients d'indice impair sont tous nuls, comme pour le cas $s = \mu$. (142) permet d'exprimer a_n en termes de a_0 comme avant. Il est évident, en comparant (142) avec (126), qu'il est possible d'obtenir la deuxième solution en remplaçant dans la première μ par $-\mu$. On la note $J_{-\mu}(x)$ et elle s'écrit explicitement :

$$\boxed{\boldsymbol{J_{-\mu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\mu} k!\, \Gamma(k - \mu + 1)} x^{2k-\mu}} \qquad (143)}$$

C'est la fonction de Bessel (de première espèce) d'ordre $-\mu$.

$J_\mu(x)$ et $J_{-\mu}(x)$ sont linéairement indépendantes car le premier terme dans $J_\mu(x)$ commence par x^μ et le premier terme de $J_{-\mu}(x)$ commence par $x^{-\mu}$. $J_{-\mu}(x)$ diverge donc à l'origine si $\mu > 0$. Le graphe suivant donne l'allure de quelques $J_{-\mu}(x)$. Sur la même figure se trouvent quelques $J_\mu(x)$ avec μ non-entier.

2024-2025



Remarque

Nous avons donc trouvé deux solutions de l'équation différentielle de Bessel $J_\mu(x)$ et $J_{-\mu}(x)$. La première $J_\mu(x)$ est valable $\forall \mu$, la deuxième n'est valable que si μ n'est ni entier ni demi-entier. Maintenant nous considérons le cas où $s = -\mu$, avec μ demi-entier.

4.3.4. $s = -\mu$; μ demi-entier.

Si μ est demi-entier, 2 μ est un entier impair. La formule de récurrence (142) reste valable pour n pair car le dénominateur du membre de droite ne s'annule jamais dans ce cas. Comme avant on peut donc exprimer les a_{2k} en termes de a_0. Pour les termes d'indice impair on a un problème si l'on veut appliquer (142) pour $n = 2\mu$.

Reprenons alors l'équation de récurrence (121) :

$$a_n(n + s - \mu)(n + s + \mu) = -a_{n-2} \tag{144}$$

ou, avec $s = -\mu$:

$$a_n n(n - 2\mu) = -a_{n-2} \tag{145}$$

(116) devient ici :

$$a_1(1 - 2\mu) = 0 \tag{146}$$

On a :

$$a_1 = 0 \text{ si } \mu \neq 1/2 \tag{147}$$

Si $\mu = 1/2$, a_1 est arbitraire.

Appliquons (145) pour $n = 3$:

$$a_3 3(3-2\mu) = 0 \tag{148}$$

$$a_3 = 0 \text{ si } \mu \neq 3/2 \tag{149}$$

Si $\mu = 3/2$, a_3 est arbitraire.

On peut continuer ainsi. On a $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2\mu-2} = 0$, mais ce n'est plus nécessairement vrai pour $a_{2\mu}$ car si $n = 2\mu$ on a :

$$a_{2\mu} 2\mu \cdot 0 = 0 \tag{150}$$

Dans ce cas $a_{2\mu}$ est arbitraire.

Alors **on peut poser $a_{2\mu} = 0$ par notre choix**. Dans ce cas tous les autres coefficients d'indice impair sont de nouveau nuls vu (145). On peut donc définir $J_{-\mu}(x)$ par la même formule qu'avant (équation (143), qui ne contient que des coefficients d'indice pair.

4.3.5. $s = -\mu; \mu$ entier.

Si μ est entier on remplace μ par m. La formule de récurrence générale (142) s'écrit maintenant :

$$a_n = -\frac{1}{n(n-2m)} a_{n-2} \tag{151}$$

Si on l'utilise telle quelle on rencontre un problème pour le coefficient d'indice pair n égal à

$$n = 2m \tag{152}$$

car pour cette valeur le dénominateur de (151) s'annule. Pour un indice impair, le dénominateur de (151) ne s'annule jamais. Aussi avec la définition originale de a_0 (expression (130)) :

$$a_0 = \frac{1}{2^{-m}\Gamma(-m+1)} \tag{153}$$

on rencontre un problème pour m entier positif car $\Gamma(-m+1) = \infty$ pour ces valeurs de m (les signes $-$ dans (153) proviennent du fait que nous avons remplacé dans (130) μ par m comme déjà expliqué dans le commentaire après la formule (142).

(116) devient ici :

$$a_1(1-2m) = 0 \tag{154}$$

ce qui implique que pour m entier ≥ 0 que :

$$a_1 = 0 \tag{155}$$

Vu le fait que (151) est valable pour tous les indices impairs on voit que :

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0 \tag{156}$$

Les coefficients d'indice impair sont donc nuls.

Si l'on écrit la relation de récurrence sous la forme (voir (121) avec $\mu = m$) :

$$a_n n(n-2m) = -a_{n-2} \tag{157}$$

2024-2025

et que **l'on définit** :

$$a_0 = 0 \tag{158}$$

on voit, en appliquant (157), que :

$$a_2 = a_4 = \cdots = a_{2m-2} = 0 \tag{159}$$

a_{2m} n'est pas nécessairement nul car pour $n = 2m$ (157) devient :

$$a_{2m} m \cdot 0 = 0 \tag{160}$$

Ici a_{2m} est quelconque. Si on lui fixe une valeur différente de zéro, on peut sans problème utiliser la relation de récurrence (151) pour $n > 2m$ et l'on aura une solution. Définissons a_{2m} par :

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^m m!\,\Gamma(1)} \tag{161}$$

(Noter que $\Gamma(0) = 0! = 1$).

Alors on a, avec (151) :

$$a_{2m+2} = -\frac{1}{(2m+2)(2m+2-2m)}(-1)^m \frac{1}{2^m m!\,\Gamma(1)}$$

Soit:

$$a_{2m+2} = a_{2(m+1)} = (-1)^{m+1} \frac{1}{2^{m+2}(m+1)!\,\Gamma(2)} \tag{162}$$

(car $\Gamma(2) = 1$)

Calculons encore un terme explicitement pour pouvoir "deviner" la formule générale :

$$a_{2m+4} = -\frac{1}{(2m+4)(2m+4-2m)} a_{2m+2} \tag{163}$$

Soit, avec (162) :

$$\begin{aligned} a_{2m+4} = a_{2(m+2)} &= (-1)^{m+2} \frac{1}{2(m+2)4 \cdot 2^{m+2}(m+1)!\,\Gamma(2)} \\ &= (-1)^{m+2} \frac{1}{2^{m+4}(m+2)!\,\Gamma(3)} \end{aligned} \tag{164}$$

(car $2\,\Gamma(2) = \Gamma(3)$)

Maintenant on "devine" la relation générale :

$$a_{2k} = a_{2[m+(k-m)]} = (-1)^k \frac{1}{2^{m+2(k-m)}(m+k-m)!\,\Gamma(k-m+1)} \tag{165}$$

Soit:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-m} k!\,\Gamma(k-m+1)} \tag{166}$$

(166) est la formule de récurrence générale valable pour $k \geq m$. Pour $k < m$, $a_{2k} = 0$. Alors la série explicite ne commence que par le terme d'indice $k = m$. On la note $J_{-m}(x)$ et elle s' écrit explicitement :

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k-m} k!\, \Gamma(k-m+1)} x^{2k-m} \tag{167}$$

Pour l'examiner mieux, changeons l'indice de sommation. Définissons :

$$k' = k - m \tag{168}$$

$\text{Alors} \sum_{k=m}^{+\infty} \quad \text{devient} \sum_{k'=0}^{+\infty} \quad \text{et (167)s'écrit :}$

$$J_{-m}(x) = \sum_{k'=0}^{+\infty} (-1)^{k'+m} \frac{1}{2^{2k'+m} (k'+m)!\, \Gamma(k'+1)} x^{2k'+m} \tag{169}$$

Soit :

$$J_{-m}(x) = \sum_{k'=0}^{+\infty} (-1)^{k'+m} \frac{1}{2^{2k'+m} k'!\, \Gamma(k'+m+1)} x^{2k'+m} \tag{170}$$

car :

$$(k'+m)!\, \Gamma(k'+1) = k'!\, (k'+1)(k'+2) \cdots (k'+m) \Gamma(k'+1) \tag{171}$$

En comparant (170) avec (138) on voit que :

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \tag{172}$$

de sorte que la solution $J_{-m}(x)$ n'est pas linéairement indépendante de $J_m(x)$. Pour trouver une deuxième solution indépendante de l'équation différentielle de Bessel pour $\mu = m$ (m entier) on doit alors faire appel à une autre méthode.

4.3.6. Les fonctions de Neumann

On peut montrer qu'une deuxième solution peut être trouvée pour $\mu = m$ (m entier) sous la forme :

$$y_2(x) = x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ln x \tag{173}$$

Cette fonction est appelée la **fonction de Bessel de deuxième espèce**.

Pour μ non-entier on a vu qu'on peut trouver deux fonctions linéairement indépendantes que nous avons notées $J_\mu(x)$ et $J_{-\mu}(x)$). Pour $\mu = m$ (m entier) on a une fonction régulière partout $J_m(x)$.

Pour trouver une autre il faut donc utiliser (173).

Il existe une autre méthode. Pour μ quelconque on peut former la fonction $\alpha J_\mu(x) + \beta J_{-\mu}(x)$ (α et β réels).

Cette fonction $(\alpha J_\mu(x) + \beta J_{-\mu}(x))$ avec $J_\mu(x)$ peuvent servir comme deux solutions linéairement indépendantes aussi bien que $J_\mu(x)$ et $J_{-\mu}(x)$.

Alors **on définit** $N_\mu(x)$ par :

2024-2025

$$N_\mu(x) = \frac{\cos\mu\pi \;\; J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi} \tag{174}$$

Si μ tend vers un entier m, le numérateur et le dénominateur de (174) tendent tous les deux vers zéro et si la limite existe $\neq 0$ et si la limite diffère de $J_m(x)$, il est à prévoir que c'est la deuxième solution indépendante.

Alors on définit :

$$N_m(x) = \lim_{\mu\to m} N_\mu(x) = \lim_{\mu\to m} \frac{\cos\mu\pi \;\; J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi} \tag{175}$$

Le numérateur et le dénominateur sont des fonctions régulières de μ (on peut démontrer cela). En appliquant la règle de l'Hospital pour évaluer la limite dans (175), on obtient :

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial\mu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\mu}(x)}{\partial\mu}\right]_{\mu=m} \tag{176}$$

En utilisant les séries (138) et (143) et en les différenciant par rapport à μ on trouve après un calcul direct (mais laborieux !) :

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi}\left[2\ln\frac{x}{2} + 2\gamma - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right]J_m(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+m)!\,n!}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m+k}\right)\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \tag{177}$$

(**$\gamma = 0,57721566$ est la constante d'Euler-Mascheroni** qui apparaît dans la dérivée par rapport à μ de $\frac{1}{\Gamma(n+\mu+1)}$)

Pour les petites valeurs de x, $N_m(x)$ se comporte comme :

$$N_m(x) = -\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^m \tag{178}$$

L'allure des fonctions de Neumann est trouvée dans la figure suivante. Sur la même figure $J_0(x)$ et $J_1(x)$ sont également representés.

Toutes les fonctions de Neumann divergent à l'origine.

Remarque

Il est usuel de prendre $J_\mu(x)$) et $N_\mu(x)$ (μ quelconque) comme deux solutions indépendantes de l'équation différentielle de Bessel.

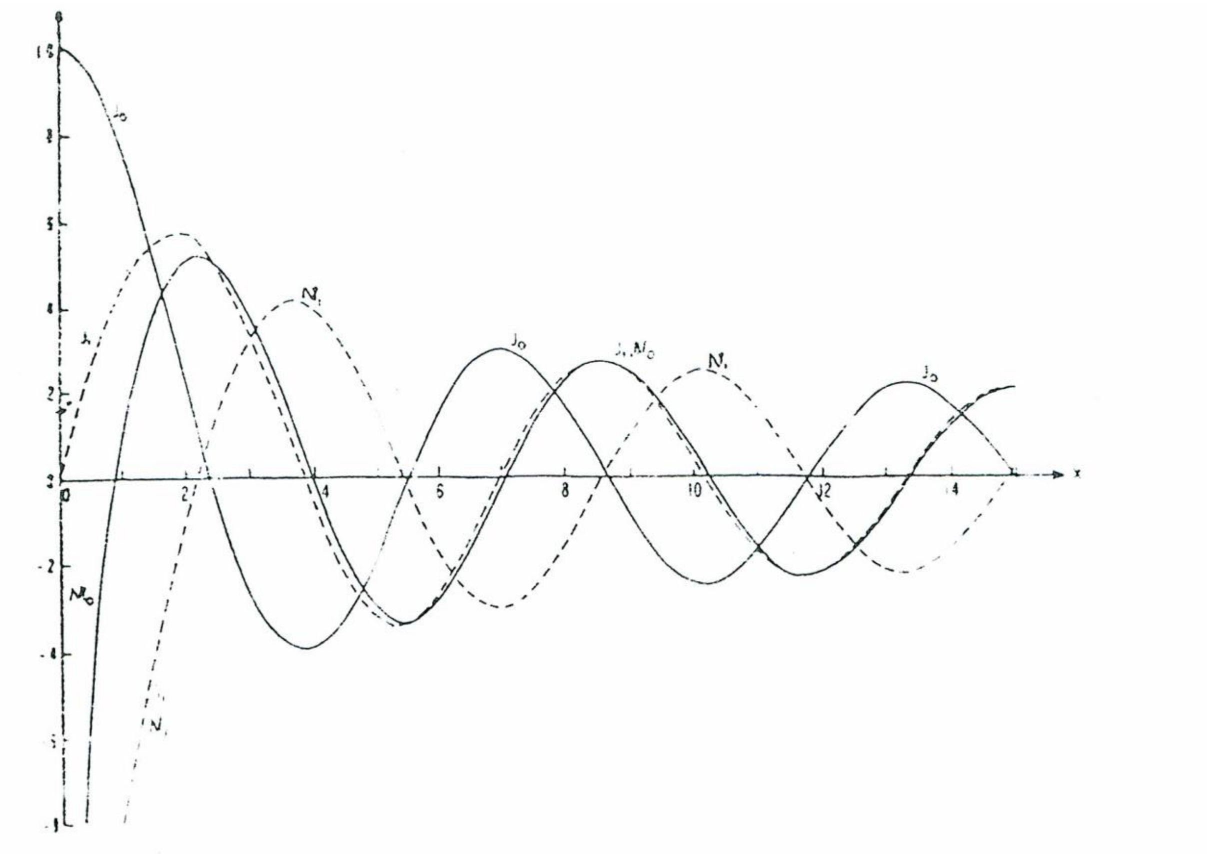
Parfois on utilise les fonctions de Hankel définies par :

$$H_\mu^{(1)}(x) = J_\mu(x) + iN_\mu(x) \tag{179}$$

$$H_\mu^{(2)}(x) = J_\mu(x) - iN_\mu(x) \tag{180}$$

2024-2025

Les 4 fonctions $\left\{J_{\mu}(x), N_{\mu}(x), H_{\mu}^{(1)}(x), H_{\mu}^{(1)}(x)\right\}$ sont connues sous le nom de **fonctions cylindriques**. Uniquement la fonction de Bessel $J_{\mu}(x)$ reste finie à l'origine.



4.4. Propriétés des fonctions cylindriques.

4.4.1. Orthogonalité des fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville.

Considérons d'abord **l'équation différentielle de Sturm-Liouville** :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] - q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \tag{181}$$

ou :

$$p(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{dp(x)}{dx}\frac{dy(x)}{dx} - q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \tag{182}$$

On définit l'opérateur de Sturm-Liouville $L(x)$ par :

$$L(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x) \tag{183}$$

$L(x)$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre.

Avec (183) on peut écrire (181) comme :

$$L(x)y(x) = -\,\lambda r(x)y(x) \tag{184}$$

(184) est une sorte d'équation aux valeurs propres. On aurait une équation aux valeurs propres ordinaires si $r(x) = 1$, car dans ce cas :

$$L(x)y(x) = -\lambda y(x) \tag{185}$$

(184) traite un cas plus général. $y(x)$ est la fonction propre généralisée (par rapport à la fonction de poids $r(x)$) associée à la valeur propre λ.

En plus de l'équation différentielle, il y a encore des conditions aux limites qui spécifient complètement le problème.

Les c.a.l. usuelles dans un intervalle $[a, b]$ sont les suivantes :

a) $$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} \tag{186}$$

Ces c.a.l. (homogènes) sont appelées **conditions de Dirichlet**.

b) $$\begin{cases} \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \\ \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0 \end{cases} \tag{187}$$

Ces c.a.l. (homogènes) sont appelées **conditions de Neumann**.

c) $$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \\ \gamma y(b) + \delta \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0 \end{cases} \tag{188}$$

α, β, γ et δ sont des constantes.

d) Une des conditions ci-dessus pour $x = a$ et une autre pour $x = b$.
e) Conditions "mélangées" :

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=b} \end{cases} \tag{189}$$

couplées avec $p(a) = p(b)$

Des conditions périodiques appartiennent à cette classe. Nous avons démontré la relation :

$$\boldsymbol{\int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = 0} \tag{190}$$

si :

$$L(x)y_m(x) = -\lambda_m r(x) y_m(x) \tag{191}$$

$$L(x)y_n(x) = -\lambda_n r(x) y_n(x) \tag{192}$$

avec $\lambda_m \neq \lambda_n$ et si une des c.a.l. ci-dessus est satisfaite pour $y_m(x)$ et pour $y_n(x)$.

(191) et (192) montrent que $y_m(x)$ et $y_n(x)$ sont des fonctions propres de $L(x)$ associées respectivement à λ_m et λ_n. **(190) est la relation d'orthogonalité des fonctions $\boldsymbol{y_m(x)}$ et $\boldsymbol{y_n(x)}$ par rapport à la fonction de poids $\boldsymbol{r(x)}$.**

Remarque importante

Souvent il y a un nombre infini de valeurs propres et donc également de fonctions propres associées : $\{\lambda_n\} \to \{y_n(x)\}$

Ces fonctions sont donc mutuellement orthogonales.

Très souvent **l'ensemble est complet** ce qui veut dire qu'une fonction quelconque $f(x)$ peut être développée dans $[a, b]$ sur $\{y_n(x)\}$:

$$fx) = \sum_n a_n y_n(x) \tag{193}$$

Dû à l' orthogonalité des $\{y_n(x)\}$ on montre aisément que :

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) r(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x)[y_n(x)]^2 dx} \tag{194}$$

4.4.2. Orthogonalité des fonctions de Bessel.

Reprenons l'équation (99) (multipliée par r) qui était l'équation de départ pour arriver à l'équation de Bessel (105) :

$$r\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{dR(r)}{dr} + \left[r(k^2 + \lambda_1) - \frac{m^2}{r}\right] R(r) = 0 \tag{195}$$

Comparons (195) avec l'équation de Sturm-Liouville (182). Si l'on fait les substitutions suivantes :

$x \to r$ et $y(x) \to R(r)$

$p(x) \to r$ donc $p'(x) \to 1$

$q(x) \to \frac{m^2}{r}$

$\lambda \to k^2 + \lambda_1$

$r(x) \to r$

on voit que (195) est du type Sturm-Liouville :

Il est à comprendre que m est déjà connu ici et que **les valeurs propres**, à déterminer encore, sont $(k^2 + \lambda_1)$(ou k^2 si $\lambda_1 = 0$). L'équation différentielle de Bessel est donc une équation aux valeurs propres, par rapport à la fonction de poids r. Il faut encore spécifier les c.a.l. qui sont des conditions en général pour 0 et a (noter que $0 \leq r \leq +\infty$) (voir exemple plus tard). (On obtient l'équation différentielle de Bessel en posant $x = r\sqrt{k^2 + \lambda_1}$ comme déjà expliqué).

Les solutions de (195), les fonctions cylindriques, sont donc orthogonales par rapport à la fonction de poids r dans l'intervalle $[0, a]$ moyennant des c.a.l, du type a) à e) du paragraphe précédent. Pour démontrer comment ceci marche dans la pratique considérons les c.a.l. suivantes :

2024-2025

$R(r) = 0$ pour $r = 0$ et $r = a$ (196)

Cette c.a.l. est du type Dirichlet (voir a) du paragraphe précédent). Le fait que $R(r)$ soit fini à l'origine exclut comme solution les fonctions de Neumann qui divergent à l'origine. Pour $R(r)$ il faut donc prendre les fonctions de Bessel $J_m(x) = J_m\left(r\sqrt{k^2 + \lambda_1}\right)$ ou si $\lambda_1 = 0$, ce qui est souvent le cas (voir exemple plus tard), $J_m(kr)$. Les fonctions de Bessel $J_m(kr)$ satisfont automatiquement la c.a.l. à l'origine $R(0) = 0$) car toutes les fonctions de Bessel, sauf $J_0(x)$ sont nulles à l'origine.

L'autre c.a.l. $R(a) = 0$ donne l'équation :

$$J_m(ka) = 0 \quad (197)$$

Appelons les racines de $J_m(x)$: α_{mn}. Il y a une infinité de racines pour un m fixe. Alors la c.a.l. devient :

$$k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad n = 1,2,3,\cdots \quad (198)$$

Noter que nous avons affecté k des indices m et n.

On peut démontrer que les autres c.a.l. (Neumann, ...) donnent également des valeurs permises de k. On obtient ainsi un nombre infini de fonctions orthogonales dans l'intervalle $[0, a]$ par rapport au poids r :

$$\left[R_{k_{mn}}(r) = J_m(k_{mn}r)\right]$$

Il est à noter que nous avons affecté R de l'indice k_{mn}.

L'orthogonalité s'écrit explicitement :

$$\int_0^a r\, R_{k_{mn}}(r)\, R_{k_{mn'}}(r) dr = 0 \text{ si } n \neq n' \quad (199)$$

ou avec les fonctions de Bessel :

$$\int_0^a r J_m(k_{mn}r)\, J_m(k_{mn'}r) dr = 0 \text{ si } n \neq n' \quad (200)$$

Il est important de comprendre que $\boldsymbol{m}$ **est fixe** et que **l'indice qui distingue les différentes valeurs propres est $\boldsymbol{n}$**.

4.4.3. La norme des fonctions de Bessel

Nous allons calculer :

$$\int_0^a r[J_m(k_{mn}r)]^2\, dr$$

qu'on peut appeler le carré de la norme de $J_m(k_{mn}r)$ par rapport au poids r.

A cette fin réécrivons l'équation différentielle pour $R_k(r)$ en termes de $J_m(kr)$ (l'équation (99) avec $\lambda_1 = 0$). On a, avec $k = k_{mn}$ de sorte que $J_m(k_{mn}r)$ satisfait les c.a.l. imposées et à l'équation différentielle, l'équation :

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}J_m(k_{mn}r)\right]-\frac{m^2}{r}J_m(k_{mn}r)=-k_{mn}^2\mathrm{r}J_m(k_{mn}r) \qquad (201)$$

Prenons maintenant un k quelconque de sorte que $J_m(kr)$ ne satisfait pas nécessairement une des c.a.l. $J_m(kr)$ satisfait également à :

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}J_m(kr)\right]-\frac{m^2}{r}J_m(kr)=-k^2\mathrm{r}J_m(kr) \qquad (202)$$

Multiplions (201) par $J_m(kr)$ et (202) par $-J_m(k_{mn}r)$, ajoutons membre à membre et intégrons de 0 à a :

$$\int_0^a J_m(kr)\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}J_m(k_{mn}r)\right]dr-\int_0^a J_m(k_{mn}r)\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}J_m(kr)\right]dr$$

$$=(k^2-k_{mn}^2)\int_0^a rJ_m(k_{mn}r)J_m(kr)\,dr \qquad (203)$$

Intégration par parties donne:

$$\left[rJ_m(kr)\frac{d}{dr}J_m(k_{mn}r)-rJ_m(k_{mn}r)\frac{d}{dr}J_m(kr)\right]_0^a-\int_0^a\frac{dJ_m(kr)}{dr}r\frac{dJ_m(k_{mn}r)}{dr}dr$$

$$+\int_0^a\frac{dJ_m(k_{mn}r)}{dr}r\frac{dJ_m(kr)}{dr}dr=(k^2-k_{mn}^2)\int_0^a rJ_m(k_{mn}r)J_m(kr)\,dr \qquad (204)$$

Avec des c.a.l. de Dirichlet on obtient (en se souvenant que

$$\frac{d}{dr}J_m(k_{mn}r)|_{r=a}=k_{mn}J_m'(k_{mn}a))\ :$$

$$aJ_m(ka)k_{mn}J_m'(k_{mn}a)=(k^2-k_{mn}^2)\int_0^a rJ_m(k_{mn}r)J_m(kr)dr \qquad (205)$$

(avec les c.a.l. de Dirichlet le deuxième terme entre [ ] dans (204) est nul).

(205) est valable $\forall k$. Dérivons (205) par rapport à k. ($J_m(kr)$ est évidemment analytique dans le paramètre k) :

$$aaJ_m'(ka)k_{mn}J_m'(k_{mn}a)=2k\int_0^a rJ_m(k_{mn}r)J_m(kr)\,dr$$

$$+(k^2-k_{mn}^2)\int_0^a rJ_m(k_{mn}r)J_m'(kr)dr \qquad (206)$$

Faisons tendre k vers k_{mn}, alors le dernier terme du membre de droite de (206): tend vers zéro et l'on a :

$$\int_0^a r[J_m(k_{mn}r)]^2\, dr = \frac{a^2}{2}[J'_m(k_{mn}a)]^2 \qquad (207)$$

ce qui est donc une expression explicite pour le carré de la norme des fonctions de Bessel.

Les autres c.a.l. peuvent être traitées de la même façon.

4.4.4. Fonction génératrice pour $J_m(x)$

Considérons la fonction :

$$F(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \qquad (208)$$

ou :

$$F(x,t) = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} \qquad (209)$$

Développons les exponentiels en série :

$$F(x,t) = \left\{\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^r}{r!}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^k}{k!}\right\} = \sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{r+k}}{r!\,k!} t^{r-k} \qquad (210)$$

Posons:

$$r - k = m \qquad (211)$$

de sorte que m varie de $-\infty$ à $+\infty$. Alors :

$$F(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{(m+k)!\,k!} t^m \qquad (212)$$

Soit :

$$F(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(m+k)!\,2^{m+2k}} x^{m+2k}\right\} t^m \qquad (213)$$

L'expression entre accolades n'est rien d'autre que $J_m(x)$ (formule (138) car pour m entier :

$$\Gamma(m+k+1) = (m+k)!$$

Donc :

$$F(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)\, t^m \qquad (214)$$

$F(x,t)$ est appelé la fonction génératrice des fonctions de Bessel $J_m(x)$) avec m entier.

4.4.5. Développement d'une fonction quelconque $f(r)$ en série de fonctions de Bessel.

Si les fonctions de Bessel $\{J_m(k_{mn}r)\}$ forment une base (m fixe, n variable), une fonction quelconque de r, $f(r)$, peut être développée sur les $J_m(k_{mn}r)$:

$$f(r)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ J_m(k_{mn}r)$$

Cette série est connue sous le nom de série de Fourier-Bessel d'ordre m.

Les coefficients a_n peuvent être calculés, grâce à l' orthogonalité des fonctions de Bessel :

$$a_n=\frac{\int_0^a f(r)\mathrm{r}\,J_m(k_{mn}r)dr}{\int_0^a \mathrm{r}\,|J_m(k_{mn}r)|^2dr} \tag{215}$$

(à comparer avec la remarque à la fin de 4.4.1.).

4.5. Applications des fonctions de Bessel

4.5.1. L'équation de Laplace.

4.5.1.1. Rappels

L'équation de Laplace pour le potentiel électrique statique $\Phi(\vec{r})$ est :

$$\Delta\Phi(\vec{r})=0 \tag{216}$$

Le laplacien Δ en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En posant :

$$\Phi(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z) \tag{217}$$

(216) peut être ramenée à trois équations différentielles ordinaires (voir la discussion de l'équation de Helmholtz), les équations (91), (88) et (92) avec $\mathrm{k}^2=0$:

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}-\lambda_2\Theta(\theta) \tag{218}$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}-\lambda_1 Z(z)=0 \tag{219}$$

$$r\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{dR(r)}{dr}+\left(r\lambda_1+\frac{\lambda_2}{r}\right)R(r)=0 \tag{220}$$

Les solutions de (218) et (219) sont élémentaires :

$$\Theta(\theta)=\Theta_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_2}\,\theta} \tag{221}$$

Θ_0 constant.

$$\mathrm{Z}(z)=\mathrm{Z}_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_1}\,z} \tag{222}$$

Z_0 constant.

Pour que le potentiel soit continu en θ il faut e.a. que :

$$\lambda_2=-m^2\quad m=0,1,2,\cdots \tag{223}$$

de sorte que :

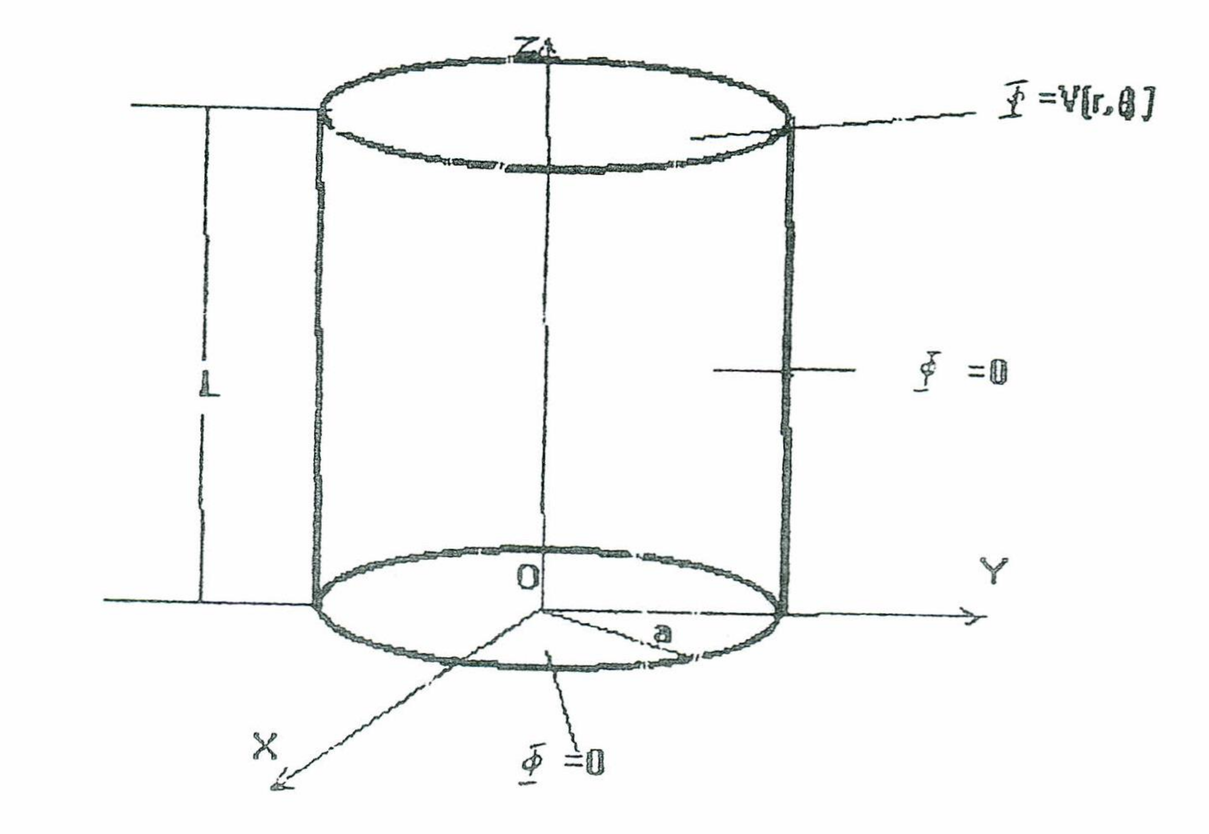
2024-2025

$$\Theta(\theta) = \Theta_0 e^{\pm im\theta} \qquad m = 0,1,2,\cdots \tag{224}$$

4.5.1.2. Calculer $\boldsymbol{\Phi(\vec{r})}$ en un point à l'intérieur d'un cylindre dont le potentiel électrique de la base inférieure et de la surface latérale est nul et celui de la base supérieure vaut $\boldsymbol{\Phi = V(r,\theta)}$

Solution

La figure suivante résume le problème :



Le problème est donc de trouver le potentiel en un point quelconque à l'intérieur du cylindre. Nous avons déjà la forme générale des solutions pour $Z(z)$ et $\Theta(\theta)$ et nous les écrivons comme :

$$Z(z) = A' e^{\sqrt{\lambda_1}\, z} + B' e^{-\sqrt{\lambda_1}\, z} \tag{225}$$

$$\Theta(\theta) = A \sin m\theta + B \cos m\theta \qquad (m \text{ entier}) \tag{226}$$

La c.a.l. (potentiel de la base inférieure est nul) :

$$\Phi(r,\theta,z=0) = 0 \tag{227}$$

nous donne :

$$A' = -B' \tag{228}$$

de sorte que :

$$Z(z) = A'(e^{kz} - e^{-kz}) \tag{229}$$

avec :

$$k = \sqrt{\lambda_1} \tag{230}$$

Si l'on incorpore la constante A' dans A et B de (226) on peut écrire :

$$\mathrm{Z}(z) = \mathrm{sh}\, kz \tag{231}$$

Il est à noter que k est toujours une constante à déterminer :

(220) devient avec (223) et (230) :

$$r\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{dR(r)}{dr} + \left(k^2 r - \frac{m^2}{r}\right)R(r) = 0 \tag{232}$$

Si l'on change la variable en posant :

$$x = kr \tag{233}$$

(232) peut s'écrire comme :

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R(x) = 0 \tag{234}$$

ce qui est évidemment l'équation différentielle de Bessel.

Alors la solution de (232) est :

$$R(r) = CJ_m(kr) + DN_m(kr) \tag{235}$$

Pour que le potentiel soit fini pour $r = 0$ on a $D = 0$.

Il faut que le potentiel soit nul pour $r = a$ (= c.a.l.) :

$$\Phi(r = a, \theta, z) = 0 \tag{236}$$

ce qui donne :

$$J_m(ka) = 0 \tag{237}$$

ce qui signifie que k ne prend que des valeurs particulières :

$$k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \tag{238}$$

où α_{mn} sont les racines de $J_m(x)$.

Une solution particulière de l'équation de Laplace est alors :

$$\Phi_{mn}(r, \theta, z) = J_m(k_{mn}r)\, sh(k_{mn}z)\, (A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \tag{239}$$

(Noter les indices m et n).

Cette solution satisfait les c.a.l. homogènes. On a une solution $\forall m, \forall n$. Une combinaison linéaire de ces solutions est encore une solution qui satisfait toujours les c.a.l. homogènes (ceci est dû à la linéarité de l'équation de Laplace et des c.a.l. homogènes).

Il est à noter que nous avons affecté Φ, A et B des indices m et n.

Alors la. solution la plus générale est :

2024-2025

$$\Phi(r,\theta,z) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_{mn}(r,\theta,z)$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} J_m(k_{mn}r)\, sh(k_{mn}z)\, (A_{mn}\, sin\, m\theta + B_{mn}\, cos\, m\theta) \tag{240}$$

Les constantes $\{A_{mn}, B_{mn}\}$ restent encore à être déterminées.

A cette fin nous utilisons la c.a.l. (le potentiel de la surface latérale vaut $V(r,\theta)$:

$$\Phi(r,\theta,z=L) = V(r,\theta) \tag{241}$$

Alors:

$$V(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} J_m(k_{mn}r)\, sh(k_{mn}L)\, (A_{mn}\sin m\theta + B_{mn}\cos m\theta) \tag{242}$$

Multiplions les deux membres de (242) par $\cos m'\theta\ \ r\, J_{m'}(k_{m'n'}r)$ et intégrons sur θ de 0 à 2π et sur r de 0 à a.

A cause de l' orthogonalité des fonctions trigonométriques sur $[0,2\pi]$, seulement l'intégrale contenant $\cos^2 m'\theta$ est différente de zéro (donc celle avec $m' = m$). On a :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m'\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi \ \text{ pour } m' \neq 0 \\ 2\pi \text{ pour } m' = 0 \end{cases} \tag{243}$$

De plus, à cause de l'orthogonalité des fonctions de Bessel, seulement l'intégrale avec $n' = n$ dans le membre de droite est différente de zéro.

On a (équation (20) :

$$\int_0^a r[J_{m'}(k_{m'n'}r)]^2\, dr = \frac{a^2}{2}\left[J'_{m'}(k_{m'n'}a)\right]^2 \tag{244}$$

Par conséquent, nous obtenons B_{mn} (on laisse tomber les accents) :

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2\, sh(k_{mn}L)\, [J'_m(k_{mn}a)]^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a d\theta dr\, r\, V(r,\theta)\, J_m(k_{mn}r)\cos m\theta \tag{245}$$

pour $m \neq 0$

Pour $m = 0$, on a :

$$B_{0n} = \frac{2}{\pi a^2\, sh(k_{0n}L)\, [J'_0(k_{0n}a)]^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a d\theta dr\, r\, V(r,\theta)\, J_0(k_{0n}r) \tag{246}$$

De la même façon on obtient A_{mn}. On trouve (**exercice**) :

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 \, sh(k_{mn}L) \, [J'_m(k_{mn}a)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a d\theta dr \, r \, V(r,\theta) \, J_m(k_{mn}r) \sin m\theta \qquad (247)$$

$A_{0n} = 0$

Le problème est donc résolu.

4.5.2. L'équation de conduction de la chaleur

4.5.2.1. Forme générale de l'équation

On peut démontrer que l'équation aux dérivées partielles décrivant la température $T(\vec{r},t)$ d'un corps est :

$$\kappa \Delta T(\vec{r},t) = \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (248)$$

où:

$$\kappa = \frac{K}{c\rho} \qquad (249)$$

K est la conductivité thermique, c la capacité thermique et ρ la densité massique. La constante κ (kappa) est appelée la diftusivité.

Pour une démonstration de (248), connue sous le nom de **l'équation de Fourier**, le lecteur peut consulter E. Butkov, Mathematical Physics, p. 297-299.

4.5.2.2. Calculer la température d'un disque de rayon a avec les deux côtés isolés, si la température initiale est $F(r)$; la circonférence est maintenue à $T = 0$.

Solution

Z n'intervient pas dans les équations (voir figure ci-dessous). Dû à la symétrie du problème et dû à la symétrie initiale de la température, il n'y a pas de dépendance en θ et l'équation (248) devient :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) \qquad (250)$$

avec les c.a.l. :

$$T(a,t) = 0 \qquad (251)$$

$$T(r,0) = F(r) \qquad (252)$$

Posons (méthode de la séparation des variables) :

$$T(r,t) = R(r)D(t) \qquad (253)$$

et mettons cette forme dans (250). Après division par $\kappa R(r)D(t)$ on obtient :

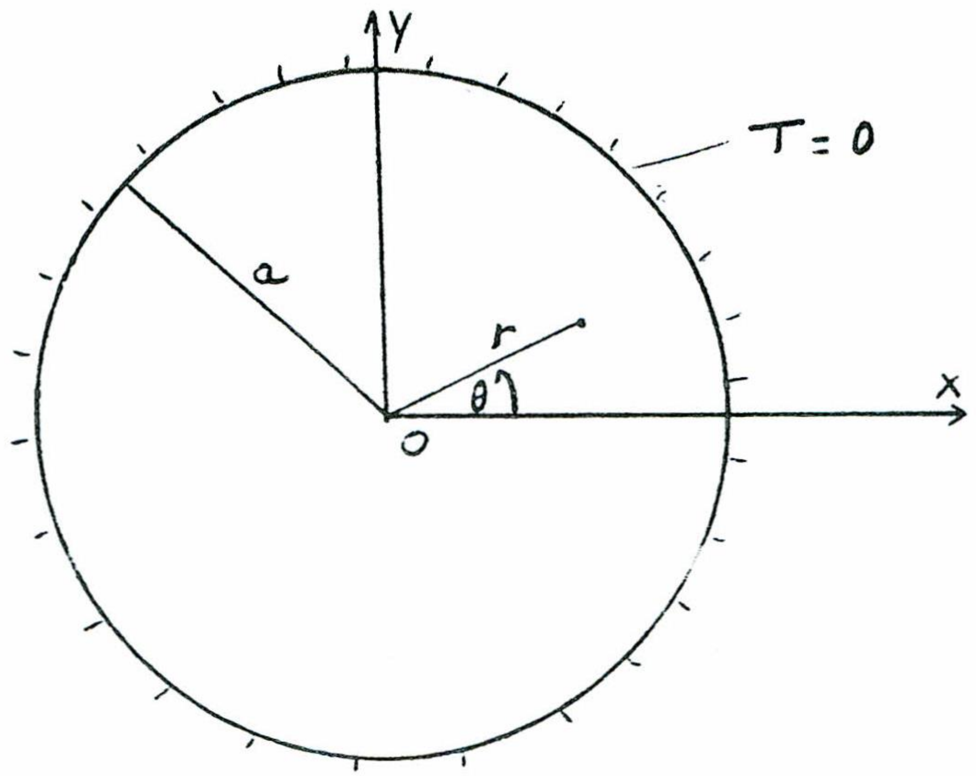
$$\frac{D'(t)}{\kappa D(t)} = \frac{R''(r)}{R\,(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \qquad (254)$$

Le membre de gauche ne dépend que de t, celui de droite ne dépend que de r. Ceci n'est possible que si les deux membres sont égaux à une constante que nous notons $-\lambda^2$. D'où :

$$D'(t) + \kappa\lambda^2 D(t) = 0 \quad (255)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \quad (256)$$

La figure suivante résume la géométrie du problème :



La solution de (255) est :

$$D(t) = C_1 e^{-\kappa\lambda^2 t} \quad (257)$$

où C_1 est une constante.

Posons :

$$x = \lambda r \quad (258)$$

de sorte que (256) devient, après simplification par λ^2 :

$$R''(x) + \frac{1}{x}\,R'(x) + R(x) = 0 \quad (259)$$

ce qui est l'équation différentielle de Bessel avec $m = 0$ (voir (105)). Les solutions de (259) sont donc de la forme :

$$R(r) = A_1 J_0(\lambda r) + B_1 N_0(\lambda r) \quad (260)$$

A_1, B_1 sont des constantes.

Comme avant on doit poser $B_1 = 0$ car il faut que la température reste finie à l'origine. On a donc :

$$R(r) = A_1 J_0(\lambda r) \quad (261)$$

Alors une solution est :

2024

$$T_\lambda(r,t) = A_\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\lambda r) \tag{262}$$

Il est à noter que le paramètre λ n'a pas encore été déterminé et que nous avons affecté T de l'indice λ pour des raisons évidentes. Nous avons également affecté la constante d'intégration A (encore à spécifier) de l'indice λ.

La c.a.l. (251) donne :

$$T_\lambda(a,t) = A_\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\lambda a) = 0 \quad \forall t \tag{263}$$

D'où:

$$J_0(\lambda a) = 0 \tag{264}$$

Appelons les racines de $J_0(\lambda a)$ $\{\alpha_{0n}\}$. Alors :

$$\lambda_n = \frac{\alpha_{0n}}{a} \tag{265}$$

où nous avons affecté λ de l'indice n.

Alors la solution générale satisfaisant la c.a.l. (251) s'écrit :

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \tag{266}$$

(à la place de l'indice λ on a écrit n).

L'autre c.a.l. (194) donne :

$$T(r,0) = F(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \tag{267}$$

Afin de déteminer $\{A_n\}$ on multiplie (267) par $rJ_0(\lambda_{n'} r)$ et on intègre de 0 à a :

$$\int_0^a rF(r)J_0(\lambda_{n'} r)dr = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \int_0^a rJ_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_{n'} r)dr \tag{268}$$

Dû à l'orthogonalité des fonctions de Bessel les intégrales du membre de droite sont toutes nulles sauf celle avec $n = n'$, de sorte qu'on obtient A_n (avec (207) :

$$A_n = \frac{2}{[J_0'(\lambda_n a)]^2 a^2} \int_0^a rF(r)J_0(\lambda_n r)dr \tag{269}$$

La solution générale esr alors :

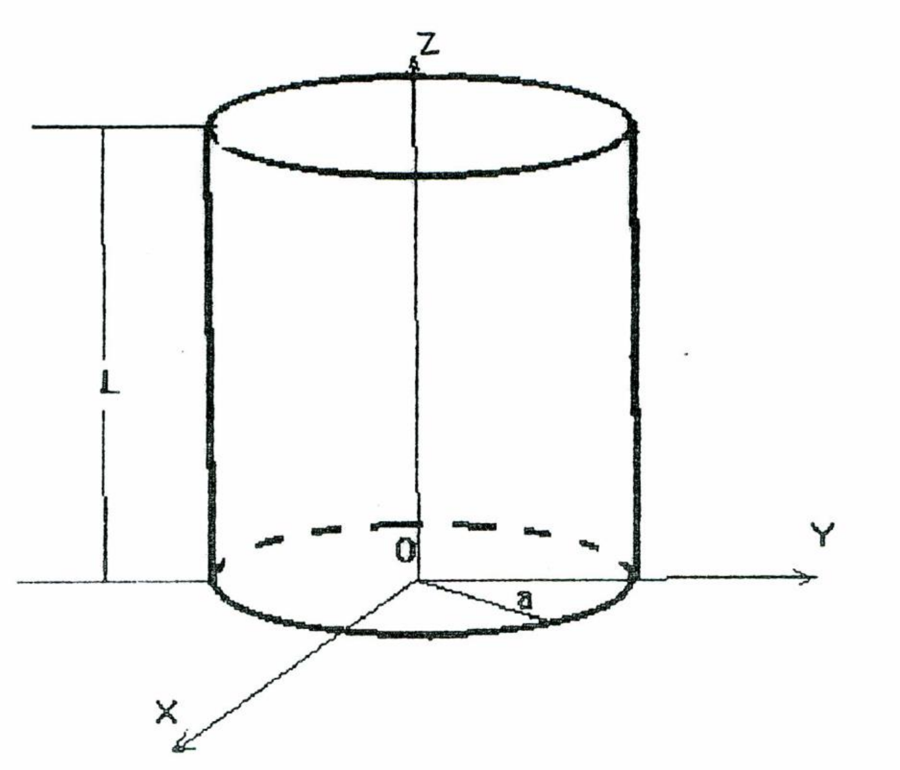
$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{2}{[J_0'(\lambda_n a)]^2 a^2} \left[\int_0^a r'F(r')J_0(\lambda_n r')dr' \right] e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \right\} \tag{270}$$

2024-2025

4.5.2.3. Calculer la température d'un cylindre de hauteur L et de rayon a. Initialement la température est la même partout T_0. A l'instant $t = 0$ on plonge le cylindre dans un mélange d'eau et de glace de sorte que toute sa surface se trouve maintenant à la température 0.

Solution

On a la géométrie suivante :



Dû à la symétrie cylindrique du problème + c.a.l. + condition initiale, il n'y a pas de dépendence en θ de sorte que l'équation (248) devient :

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial z^2}\right) \tag{271}$$

Les c.a.l. et la condition initiale sont :

$$T(r,z,0) = T_0 \tag{272}$$

$$T(r,0,t) = 0 \tag{273}$$

$$T(r,L,t) = 0 \tag{274}$$

$$T(a,z,t) = 0 \tag{275}$$

Posons:

$$T(r,z,t) = R(r)Z(z)D(t) \tag{276}$$

Ceci dans (271) donne, après division par $\kappa R(r)Z(z)D(t)$:

$$\frac{D'(t)}{\kappa D(t)} = \frac{R"(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z"(z)}{Z(z)} \tag{277}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t, le membre de droite ne dépend que de r et de z. Ceci n'est possible que si chaque membre est égal à une constante que nous noterons $-\lambda^2$:

$$D'(t) + \kappa\lambda^2 D(t) = 0 \tag{278}$$

$$\frac{R"(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z"(z)}{Z(z)} = -\lambda^2 \tag{279}$$

(279) peut être écrite comme :

$$\frac{R"(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\lambda^2 - \frac{Z"(z)}{Z(z)} \tag{280}$$

En raisonnant de la même façon qu'avant, on voit que chaque membre doit être égal à une constante notée $-\mu^2$:

$$rR"(r) + R'(r) + \mu^2 rR(r) = 0 \tag{281}$$

$$Z"(z) - \nu^2 Z(z) = 0 \tag{282}$$

où nous avons écrit :

$$\nu^2 = \mu^2 - \lambda^2 \tag{283}$$

La solution de (278) est :

$$D(t) = C_1 e^{-\kappa\lambda^2 t} \tag{284}$$

où C_1 est une constante (encore à déterminer).

La solution de (282) est :

$$Z(z) = C_2 e^{\nu z} + C_3 e^{-\nu z} \tag{285}$$

avec C_2 et C_3 des constantes (à déterminer).

La solution de (281), qui est l'équation différentielle de Bessel d'ordre 0 (en posant $x = \mu r$ on montre ceci directement) est :

$$R(r) = C_4 J_0(\mu r) + C_5 N_0(\mu r) \tag{286}$$

Alors une solution particulière est :

$$T_p(r,z,t) = C_1 e^{-\kappa\lambda^2 t}(C_2 e^{\nu z} + C_3 e^{-\nu z})[C_4 J_0(\mu r) + C_5 N_0(\mu r)] \tag{287}$$

Il faut que la solution soit finie pour $r = 0$ donc :

$$C_5 = 0 \tag{288}$$

et (287) s'écrit :

$$T_p(r,z,t) = e^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu r)(Ae^{\nu z} + Be^{-\nu z}) \tag{289}$$

où nous avons incorporé les constantes dans A et B.

La c.a.l. (273) donne :

2024-2025

$$T_p(r,0,t) = e^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu r)(A+B) = 0 \quad (290)$$

Soit :

$$A = -B \quad (291)$$

Alors :

$$T_p(r,z,t) = Ae^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu r)(e^{\nu z} - e^{-\nu z}) \quad (292)$$

La c.a.l. (274) donne :

$$T_p(r,L,t) = Ae^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu r)(e^{\nu L} - e^{-\nu L}) = 0 \quad (293)$$

Soit :

$$e^{\nu L} - e^{-\nu L} = 0 \text{ ou } e^{2\nu L} = 1 = e^{2k\pi i} \quad k = 0,1,2,\cdots \quad (294)$$

D'où:

$2\nu L = 2k\pi i$ et

$$\nu = \frac{k\pi i}{L} \quad k = 0,1,2,\cdots \quad (295)$$

Alors (234) s'écrit:

$$T_p(r,z,t) = Ce^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu r) \sin\frac{k\pi}{L} z \quad (296)$$

(noter l'introduction d'une nouvelle constante C qui remplace les autres).

La c.a.l. (275) donne :

$$T_p(a,z,t) = Ce^{-\kappa\lambda^2 t} J_0(\mu a) \sin\frac{k\pi}{L} z = 0 \quad (297)$$

ce qui n'est possible que si :

$$J_0(\mu a) = 0 \quad (298)$$

Appelons $\{\alpha_n\}$ les racines de $J_0(x)$ donc :

$$\mu a = \alpha_n \quad (299)$$

et :

$$\mu_n = \frac{\alpha_n}{a} \quad (300)$$

(notez l'indice n dont on a affecté μ).

(295) et (300) déterminent λ^2 via (283) :

$$\lambda^2 = \mu^2 - \nu^2 = \frac{\alpha_n^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{L^2} \quad (301)$$

(On aurait pu affecter λ de deux indices n et k).

Alors (296) s'écrit :

2024-2025

$$T_p(r,z,t) = Ce^{-\kappa\left(\frac{\alpha_n^2}{a^2}+\frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)t} J_0\left(\frac{\alpha_n}{a}r\right)\sin\frac{k\pi}{L}z \tag{302}$$

avec $k = 0,1,2,\cdots; n = 0,1,2,\cdots$

Pour chaque k et pour chaque n on a une solution de l'E.D.P. et des c.a.l. homogènes. La solution totale s'écrit alors :

$$T(r,z,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} C_{kn}\, e^{-\kappa\left(\frac{\alpha_n^2}{a^2}+\frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)t} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)\sin\frac{k\pi}{L}z \tag{303}$$

Pour déterminer les constantes $\{C_{kn}\}$ on utilise la c.a.l. non-homogène (272) :

$$T(r,z,0) = T_0 = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} C_{kn} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)\sin\frac{k\pi}{L}z \tag{304}$$

Alors on montre que :

$$C_{kn} = \frac{4T_0(1-\cos k\pi)\int_0^a rJ_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)dr}{a^2[J_m'(\alpha_n)]^2} \tag{305}$$

Le problème est résolu.

2024-2025

Chapitre 2. La fonction de Green

1. La "fonction" -delta

1.1. Séquences delta

La "fonction"-delta $\delta(x)$ (de Dirac) a été définie (ECUE "Introduction à la Mécanique Quantique", Bac II) par les expressions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \tag{1}$$

$\forall\, f(x)$ continue à l'origine,

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2}$$

On a adopté une procédure de limite telle que, à la limite, on a :

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 & x \neq 0 \\ \delta(x) = +\infty & x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Cela ne peut être utilisé (évidemment) pour définir une fonction et encore moins pour définir une fonction intégrable ou différentiable.

Il existe des séquences de fonctions $\varphi_n(x)$ ayant des "pics" très prononcés qui s'approchent de l'équation (1) ci-dessus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0) \tag{4}$$

Par exemple :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2} & |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{5}$$

On peut démontrer facilement que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0) \tag{6}$$

$\forall f(x)$ continue

En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = \int_{-1/n}^{+1/n} \frac{n}{2} f(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{+1/n} f(x) dx \tag{7}$$

2024-2025

Utilisons le premier théorème de la moyenne de l'analyse :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)) \tag{8}$$

pour un ξ tel que $a < \xi < b$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)dx = \frac{n}{2}\frac{2}{n} f(\xi) = f(\xi) \tag{9}$$

avec $-\dfrac{1}{n} < \xi < \dfrac{1}{n}$

Si $n \to +\infty$, $\xi \to 0$ et dû à la continuité de $f(x)$: $f(\xi) \to f(0)$ et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)dx = f(0) \tag{10}$$

Une séquence $\{\varphi_n(x)\}$ avec la propriété (10) est une **séquence delta**. On note symboliquement :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)dx = f(0) \tag{11}$$

On a également:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = 1 \tag{12}$$

Un examen rapide de la séquence delta ci-dessus montre que si n augmente le pic devient de plus en plus prononcé et l'intervalle dans lequel la fonction est différente de zéro se retrécit de plus en plus. A la. limite on aurait "un pic infini" et une "largeur nulle".

La séquence ci-dessus n'est ni dérivable ni continue. Parfois il est souhaitable de construire des séquences delta qui soient continues ou même dérivables.

Les trois (six) séquences ci-dessous sont de ce type :

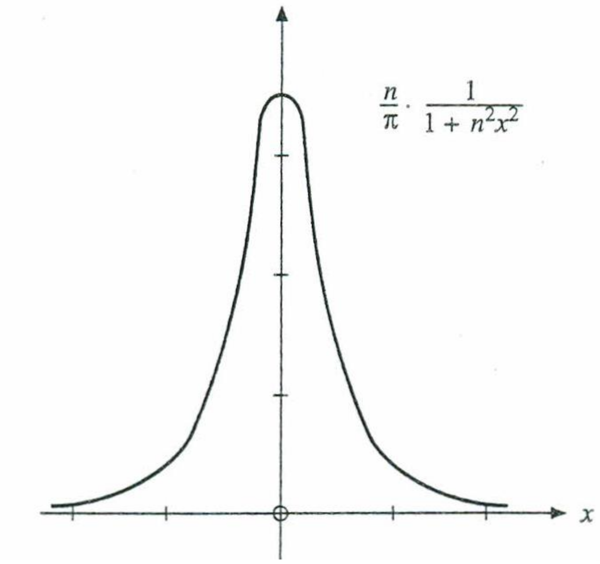
a) $\varphi_n(x) = \dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ et si l'on écrit $\dfrac{1}{n} = \varepsilon$ $\qquad$ $a')\ \varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$

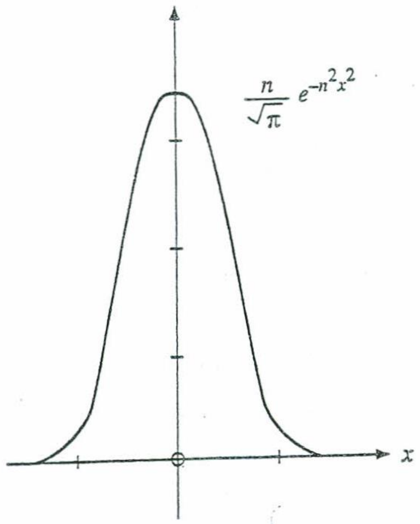
b) $\varphi_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$ $\qquad$ $b')\ \varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$

c) $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n\pi}\dfrac{\sin^2 nx}{x^2}$ $\qquad$ $c')\ \varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{\pi}\dfrac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2}$

Une inspection rapide montre que les fonctions de ces séquences présentent des pics prononcés à l'origine. Par exemple a) et b) ont l'allure suivante :

2024-2025





Pour toutes ces fonctions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = 1 \tag{13}$$

(les facteurs précédant les fonctions sont choisis pour assurer la "normalisation ").

et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)f(x)dx = f(0)$$

ce qu'on écrit symboliquement :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \tag{14}$$

pour toute fonction $f(x)$ continue et qui est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)f(x) = 0$; ((14) peut être démontré).

Il n'est pas correct de dire que ces séquences convergent vers la "fonction" delta car la limite n'existe pas.

1.2. Le "calcul – δ"

Considérons la séquence b) ci-dessus :

$$\left\{\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}\right\}$$

Calculons $\varphi_n'(x)$:

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = -\frac{2n^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \tag{15}$$

2024-202

Calculons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} f(x)dx \quad f(x) \text{ dérivable.}$$

Intégrons par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} f(x)dx = \varphi_n(x)f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \frac{df(x)}{dx} dx$$

Supposons que $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi_n(x)f(x) = 0$ ce qui est toujours vrai pour les fonctions intéressant le physicien. Dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} f(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \frac{df(x)}{dx} dx \qquad (16)$$

Faisons maintenant tendre $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} f(x)dx = -\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \frac{df(x)}{dx} dx = -f'(0) \qquad (17)$$

(où l'on a utilisé (14)).

Alors on note symboliquement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx = -f'(0) \qquad (18)$$

Maintenant on comprend que le traitement de la "fonction "-delta et de ses dérivées comme des fonctions ordinaires (ce qu'elles ne peuvent être) est une méthode pour obtenir des résultats qui dépendent de certains processus limite. En physique on appelle cela le **"calcul- δ "**.

Résumons la notation symbolique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \qquad (19)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \qquad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \qquad (21)$$

Remarque

Soulignons que la "fonction" -δ seule n'a pas de sens mathématique. Lorsqu'on voit une équation où figurent des "fonctions- δ" on doit toujours sous-entendre que ces équations doivent être multipliées

2024-2025

par une fonction continue et que les intégrales des deux membres doivent être prises au sens de (19) ci-dessus.

Exercices

1. En tenant compte de la remarque ci-dessus démontrer que :
   a. $x\delta(x)$ (22)
   b. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad a \neq 0$ (23)

   (Indic. utiliser $ax = t$)
2. Examiner $\delta(x-a)$ (Poser $x - a = t$)

Réponse:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{24}$$

1.3. Représentation intégrale de la "fonction"- δ

Calculons la transformée de Fourier de $\delta(x)$:

$$\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-ikx}dx \tag{25}$$

En appliquant la définition (19) :

$$\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{26}$$

Ecrivons maintenant symboliquement la transformée inverse de Fourier :

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k)e^{ikx}dx \tag{27}$$

Avec (26) :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dx \tag{28}$$

(28) est une formule utile en Physique théorique et mathématique.

2. Exemple introduisant la fonction de Green en une dimension.

Considérons le mouvement d'une particule de masse m soumise à une force extérieure $f(t)$ se déplaçant (1 dimension) dans un milieu visqueux. Les forces sont donc $f(t)$ et $-R\mathrm{v}$ (= force visqueuse) et la deuxième loi de Newton nous donne (ECUE Mécanique générale):

$$m\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = -R\mathrm{v}(t) + f(t) \tag{29}$$

2024-2025

Supposons que la particule soit au repos initialement et que la force commence à agir à l'instant t_0. Donc $\mathrm{v}(t) = 0$ pour $\mathrm{t} < \mathrm{t}_0$.

On montre que :

$$\mathrm{v}(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{R}{m}(t-\tau)} f(\tau)d\tau \quad \text{pour } t > t_0 \tag{30}$$

et :

$\mathrm{v}(t) = 0$ pour $t < t_0$

est une solution de (29).

(Pour démontrer ceci utiliser (gel de l'ensemble d'intégration) :

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + f[x,b(x)]\frac{db(x)}{dx} - f[x,a(x)]\frac{da(x)}{dx} \tag{31}$$

ce qui est démontré en analyse).

Considérons maintenant le cas où $f(t)$ a la forme d'un pulse, c'est-à-dire que la force extérieure $f(t)$ n'agit que durant un intervalle de temps $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ ($\Delta\tau$ "petit"). Après l'instant $\tau + \Delta\tau$ on n'a que la force visqueuse $-R\mathrm{v}$ et (29) devient :

$$m\frac{d\mathrm{v(t)}}{dt} = -R\mathrm{v}(t) \text{ pour } t > \tau + \Delta\tau \tag{32}$$

La solution de (32) est :

$$\mathrm{v}(t) = Ae^{-(R/m)t} \tag{33}$$

Quelle est la valeur de A, qui dépendra évidemment de "l'intensité de l'impulsion" ("impulsion" = force intégrée) ?

Multiplions (29) par dt et intégrons de τ jusque $\tau + \Delta\tau$:

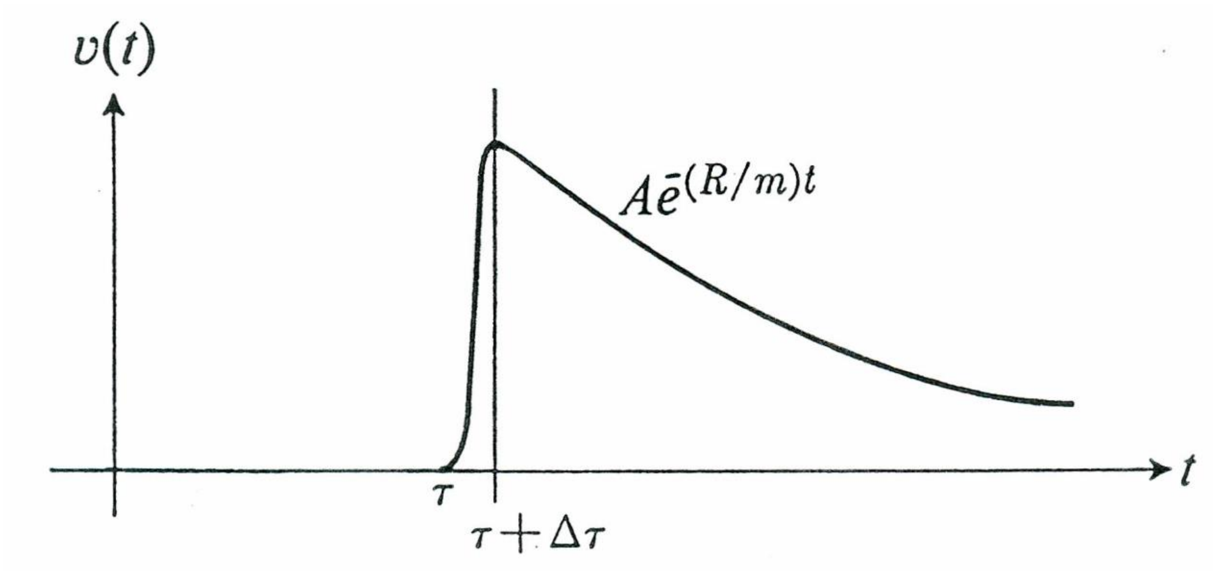
$$m[\mathrm{v}(\tau+\Delta\tau) - \mathrm{v}(\tau)] = -R\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \mathrm{v}(t)dt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(t)dt \tag{34}$$

Appelons :

$$I = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(t)dt \tag{35}$$

I est donc "**l'impulsion**".

Physiquement on s'attend à ce que $\mathrm{v}(t)$ ait l'allure du graphique suivant :



Pour comprendre ceci il suffit de penser au mouvement d'un ballon de football, initialement au repos, sous l'impact d'un coup de pied d'un joueur !

Alors :

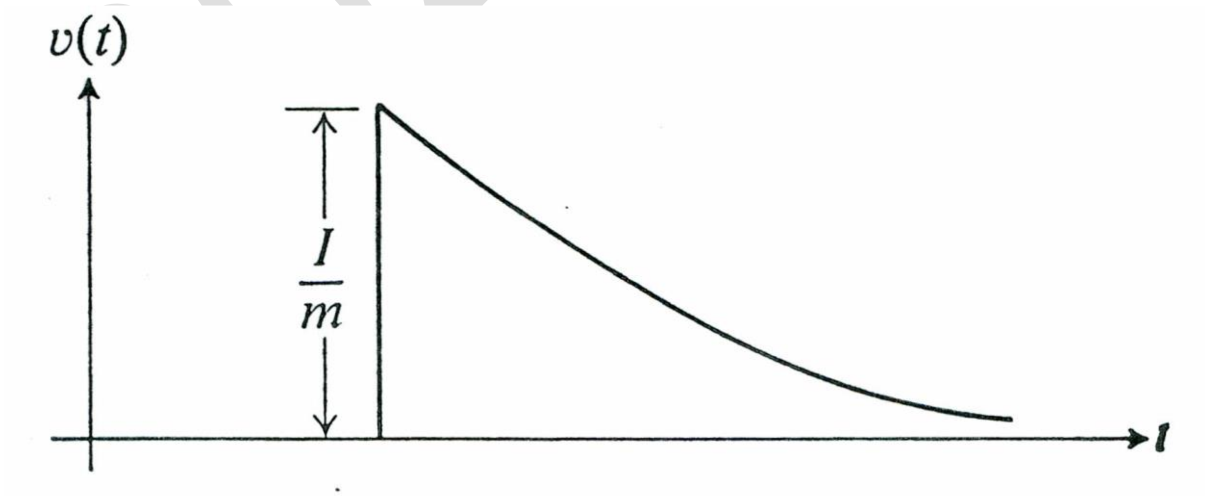
$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \mathrm{v}(t)dt \cong 0 \quad \text{si } \Delta\tau \text{ est très petit} \qquad (36)$$

Posons :

$$\begin{cases} \mathrm{v}(\tau) = 0 \\ \mathrm{v}(\tau + \Delta\tau\,) = A\, e^{-(R/m)(\tau+\Delta\tau\,)} \cong Ae^{-(R/m)\tau} \end{cases} \qquad (37)$$

(valable pour $\Delta\tau$ petit).

Avec ces conditions la figure précédente est approchée par :



Alors (34) devient:

$$mAe^{-(R/m)\tau} = I \tag{38}$$

et :

$$A = \frac{I}{m} e^{(R/m)\tau} \tag{39}$$

La solution de (29) pour un pulse est alors :

$$\mathrm{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \tau \\ \dfrac{I}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} & \text{pour } t \geq \tau \end{cases} \tag{40}$$

Physiquement cela signifie que le pulse d'impulsion I communiquerait à la particule une vitesse instantanée I/m , après quoi celle-ci ralentit dû à la résistance du milieu visqueux. Pour que ceci soit possible (physiquement), il faut que "la force tende vers l'infini si $\Delta\tau \to 0$".

Une force qui n'agit que sous la forme d'un pulse est en relation avec la "fonction- δ" comme on comprend "physiquement"; Si $I = 1$ on peut approcher $f(t)$ pour un pulse très court "concentré à l'instant t", par :

$$f(t) = \delta(t - \tau) \tag{41}$$

En effet, dans ce cas :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \mathrm{f}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(t)dt = 1 \tag{42}$$

Les bornes τ et $\tau + \Delta\tau$ peuvent être remplacées par $-\infty$ et $+\infty$ car il s'agit d'un pulse. L'aspect physique et (42) suggèrent alors (41). Pour un pulse sous la forme d'une "fonction-δ" on aurait l'équation :

$$m\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} + R\mathrm{v}(t) = \delta(t - \tau) \tag{43}$$

dont la solution est alors donnée par (40) (avec $I = 1$) :

$$\mathrm{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \tau \\ \dfrac{1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} & \text{pour } t > \tau \end{cases} \tag{44}$$

La fonction $G(t;\tau)$ définie par :

$$G(t;\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \tau \\ \dfrac{1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} & \text{pour } t > \tau \end{cases} \tag{45}$$

est appelée la fonction d'influence ou de façon plus commune **la fonction de Green**. La fonction de Green est donc, d'après (44), la **réponse** (ici la vitesse) à l'instant t à un pulse unité produit à l'instant τ d'une particule se déplaçant dans un milieu visqueux.

Résumons:

$G(t;\tau)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{dG(t;\tau)}{dt} + RG(t;\tau) = \delta(t - \tau) \tag{46}$$

2024-2025

avec la condition initiale :

$G(t,\tau) = 0$ pour $t < \tau$

Remarque

Si l'on a deux pulses d'impulsions I_1 et I_2 délivrés aux instants τ_1 et τ_1 on a $(\tau_1 < \tau_2)$:

$$\mathrm{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \tau_1 \\ \dfrac{I_1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_1)} & \text{pour } \tau_1 < t < \tau_2 \\ \dfrac{I_1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_1)} + \dfrac{I_2}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_2)} & \text{pour } t > \tau_2 \end{cases} \tag{47}$$

comme on le voit aisément.

On généralise aisément à un nombre quelconque de pulses délivrés à $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots, \tau_n$ (dans cet ordre chronologique) :

$$\mathrm{v}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_k)} \quad \text{pour } t > \tau_n \tag{48}$$

Si l'on a une **force continue**, qui peut être considérée comme une succession de pulses de durée infinitésimale produisant chacun une impulsion $dI = f(\tau)d\tau$, on s'attend à ce que (48) devienne une intégrale :

$$\mathrm{v}(t) = \frac{I}{m} \int_{\tau_0}^{t} f(\tau) e^{-(R/m)(t-\tau)} d\tau \tag{49}$$

En utilisant (45) on peut écrire (49) comme :

$$\mathrm{v}(t) = \int_{\tau_0}^{t} f(\tau) G(t;\tau) d\tau \tag{50}$$

Nous obtenons donc la même solution qu'avant (équation (30).

Nous avons obtenu la conclusion qu'il est possible d'obtenir la solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} + R\mathrm{v}(t) = f(t) \tag{51}$$

à partir de la solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{dG(t;\tau)}{dt} + RG(t;\tau) = \delta(t-\tau) \tag{52}$$

Dans ce qui suit nous généraliserons les résultats de cet exemple.

3. La fonction de Green pour l'opérateur de Sturm-Liouville

3.1. Définition

Considérons l'équation différentielle du type :

$$L(x)w(x) = -k(x) \tag{53}$$

2024-2025

où $L(x)$ est l'opérateur de Sturm-Liouville défini par (voir également le paragraphe 2.2. du premier chapitre) :

$$L(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x) \tag{54}$$

$p(x)$, $q(x)$ et $k(x)$ sont des fonctions continues réelles de x. Pour spécifier complètement le problème, il faut encore donner des conditions aux limites (c.a.l.) qui sont généralement de la forme (voir les exercices pour quelques illustrations) :

$$\alpha w(a) + \beta \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \tag{55}$$

$$\gamma w(b) + \delta \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0 \tag{56}$$

(conditions de Dirichlet si $\beta = \delta = 0$, conditions de Neumann si $\alpha = \gamma = 0$, conditions intermédiaires dans le cas général).

La fonction de Green de l'opérateur de Stum-Liouville est définie comme la solution de l'équation différentielle :

$$L(x)G(x;\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{57}$$

(le signe moins dans le membre de droite n'est pas essentiel)

avec la condition supplémentaire que $G(x;\xi)$ satisfasse les mêmes c.a.l. que $w(x)$ ci-dessus (donc (55) et (56)) et que $G(x;\xi)$ soit continue partout (donc aussi pour $x = \xi$).

(57) peut être écrit comme :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right] - q(x)G(x;\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{58}$$

Nous avons écrit explicitement ξ dans l'argument de G car on comprend que G dépendra du point où la "fonction- δ" est concentrée.

Intégrons (58) de $\xi - \varepsilon$ à $\xi + \varepsilon$:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right]dx - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)G(x;\xi)\,dx = -1 \tag{59}$$

Soit :

$$\left.p(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)G(x;\xi)dx = -1 \tag{60}$$

Dans l'équation (60), faisons tendre $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[p(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)G(x;\xi)dx\right] = -1 \tag{61}$$

$p(x)$ est continu, donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p(\xi \pm \varepsilon) = p(\xi) \tag{62}$$

$q(x)$ et $G(x;\xi)$ sont continus, donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)G(x\xi;)dx \right] = 0 \tag{63}$$

Avec (62) et (63), (61) devient :

$$\left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{64}$$

La dérivée de $G(x;\xi)$ n'est donc pas continue en $x = \xi$.

Résumons la **définition de la fonction de Green de l'opérateur de Stunn-Liouville $L(x)$** :

a) $G(x;\xi)$ satisfait les conditions aux limites (homogènes) (en x) de la forme :

$$\boldsymbol{\alpha G(a,\xi) + \beta \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=a} = 0} \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\gamma G(b,\xi) + \delta \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=b} = 0} \tag{66}$$

b) Pour $x \neq \xi$, elle satisfait à :

$$\boldsymbol{L(x)G(x;\xi) = 0} \tag{67}$$

c) Pour $x = \xi$ la dérivée de $G(x,\xi)$ satisfait à :

$$\boldsymbol{\left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)}} \tag{68}$$

d) $G(x,\xi)$ est continue, aussi pour $x = \xi$.

3.2. Expression pour $G(x;\xi)$

Considérons la région $a \leq x < \xi$. Soit $u_1(x)$ une solution de l'équation différentielle homogène $L(x)u_1(x) = 0$ satisfaisant à la c.a.l. pour $x = a$:

$$\alpha u_1(a) + \beta \left.\frac{du_1(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \tag{69}$$

$G(x,\xi)$ satisfait aussi à cette c.a.l. (équation (65).

$\{\alpha,\beta\}$ n'est pas trivial, il faut donc que le déterminant du système de deux équations homogènes (65) et (69) en α et β soit nul :

$$\begin{vmatrix} u_1(a) & u_1'(a) \\ G(a;\xi) & G'(a;\xi) \end{vmatrix} = 0 \tag{70}$$

Ce déterminant n'est autre que le déterminant de Wronski des deux solutions $u_1(x)$ et $G(x,\xi)$. On démontre (voir MMP partim I ou p.ex. "Mathematical Physics", E.Butkov, p 124-125) le théorème qui dit que si le déterminant de Wronski est nul pour un point, il est nul pour tous les points et les deux solutions sont linéairement dépendantes. Donc :

$$G(x,\xi) = C_1 u_1(x) \quad a \le x < \xi \tag{71}$$

où C_1 est une constante à déterminer.

De la même façon, si $u_2(x)$ satisfait à l'équation différentielle homogène :

$L(x)u_2(x) = 0$ pour $\xi < x \le b$ avec la c.a.l. pour $x = b$:

$$\gamma u_2(b) + \delta \left. \frac{du_2(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0 \tag{72}$$

on a:

$$G(x,\xi) = C_2 u_2(x) \quad \xi < x \le b \tag{73}$$

où C_2 est une constante à déterminer.

Utilisons maintenant la continuité de $G(x,\xi)$ et la discontinuité de la dérivée (d) et c) du résumé à la fin de 3.1) :

$$C_1 u_1(\xi) = C_2 u_2(\xi) \tag{74}$$

$$C_2 u_2'(\xi) - C_1 u_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{75}$$

En résolvant pour C_1 et C_2, on trouve facilement :

$$C_1 = \frac{u_2(\xi)}{\Delta} \tag{76}$$

$$C_2 = \frac{u_1(\xi)}{\Delta} \tag{77}$$

avec :

$$\Delta = p(\xi)[u_2(\xi)u_1'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi)] \tag{78}$$

La forme explicite de $G(x,\xi)$ est donc:

$$\boldsymbol{G(x;\xi) = \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{\Delta} \quad \text{pour } a \le x < \xi} \tag{79}$$

$$\boldsymbol{G(x;\xi) = \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{\Delta} \quad \text{pour } \xi < x \le b} \tag{80}$$

Remarques

a) Cette forme ne peut être obtenue que si Δ, qui est proportionnel au déterminant de Wronski de u_1 et u_2 au point $x = \xi$, est différent de zéro, donc si les deux solutions u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes, donc si l'équation différentielle homogène $L(x)u(x) = 0$ n'a pas de solutions non-triviales satisfaisant les deux c.a.l. à la fois. Donc si l'on trouve une solution de $L(x)u(x) = 0$ satisfaisant les deux c.a.l., la fonction de Green n'existe pas ;

b) $G(x;\xi) = G(\xi;x)$ ce qui veut dire que la fonction de Green est symétrique en x et ξ ;

c) On peut démontrer (**exercice**) que Δ ne dépend pas de ξ. Il suffit de démontrer que $d\Delta/d\xi = 0$.

2024-2025

4. La solution de $\boldsymbol{L(x)w(x) = -k(x)}$ à l'aide de $\boldsymbol{G(x,\xi)}$

Rappelons que la solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} + R\mathrm{v}(t) = f(t) \tag{81}$$

peut être écrite comme :

$$\mathrm{v}(t) = \int_{\tau_0}^{t} f(\tau)G(t;\tau)d\tau \tag{82}$$

où $G(t;\tau)$ est la solution de :

$$m\frac{dG(t;\tau)}{dt} + RG(t;\tau) = \delta(t-\tau) \tag{83}$$

(voir les équations (50)-(52) à la fin de 2).

Alors nous nous attendons à ce que la solution de :

$$L(x)w(x) = -k(x) \tag{84}$$

avec les c.a.l. (55) et (56) soit donnée par :

$$w(x) = \int_{a}^{b} k(\xi)G(x;\xi)d\xi \tag{85}$$

Démonstration

Ecrivons :

$$\int_{a}^{b} .\, d\xi = \int_{a}^{x} .\, d\xi + \int_{x}^{b} .\, d\xi$$

soit :

$$w(x) = \int_{a}^{x} G(x;\xi)k(\xi)d\xi + \int_{x}^{b} G(x;\xi)k(\xi)d\xi \tag{86}$$

Calculons $dw(x)/dx$:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \int_{a}^{x} \frac{dG(x;\xi)}{dx}k(\xi)d\xi + G(x;x-0)k(x) + \int_{x}^{b} \frac{dG(x;\xi)}{dx}k(\xi)d\xi - G(x;x+0)k(x)$$

(où nous avons utilisé une version de (31)).

$G(x;\xi)$ est continue, donc :

$$G(x;x-0) = G(x;x+0) \tag{87}$$

Donc :

$$\frac{dw(x)}{dx} = \int_a^x \frac{dG(x;\xi)}{dx} k(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{dG(x;\xi)}{dx} k(\xi) d\xi \tag{88}$$

Calculons $d^2w(x)/dx^2$:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \int_a^x \frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} k(\xi) d\xi + \frac{dG(x;x-0)}{dx} k(x) + \int_x^b \frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} k(\xi) d\xi - \frac{dG(x;x+0)}{dx} k(x) \tag{89}$$

Interprétons $dG(x;x-0)/dx$: nous devons dériver $G(x;\xi)$ par rapport à x en utilisant la forme $x > \xi$ et après faire tendre $\xi \to x$. Donc en dérivant (80) par rapport à x on a :

$$\frac{dG(x;x-0)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{u_1(\xi) u_2(x)}{\Delta} \bigg|_{\xi=x} \tag{90}$$

Soit:

$$\frac{dG(x;x-0)}{dx} = \frac{u_1(\xi)}{\Delta} \frac{du_2(x)}{dx} \bigg|_{\xi=x} \tag{91}$$

où :

$$\Delta = p(\xi)[u_2(\xi)u_1'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi)] \tag{92}$$

De la même façon :

$$\frac{dG(x;x+0)}{dx} = \frac{u_2(\xi)}{\Delta} \frac{du_1(x)}{dx} \bigg|_{\xi=x} \tag{93}$$

On avait :

$$\frac{dG(x;\xi)}{dx} \bigg|_{x=\xi+0} - \frac{dG(x;\xi)}{dx} \bigg|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{94}$$

$$\frac{dG(x;\xi)}{dx} \bigg|_{x=\xi+0} \text{ signifie que } x > \xi$$

Donc c'est égal à $dG(x;x-0)/dx$:

$$\frac{dG(x;\xi)}{dx} \bigg|_{x=\xi+0} = \frac{dG(x;x-0)}{dx} \tag{95}$$

De la même façon :

$$\frac{dG(x;\xi)}{dx} \bigg|_{x=\xi-0} = \frac{dG(x;x+0)}{dx} \tag{96}$$

En utilisant (95) et (96), (94) devient :

2024-2025

$$\frac{dG(x;x-0)}{dx} - \frac{dG(x;x+0)}{dx} = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{97}$$

(97) dans (89) nous donne :

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \int_a^x \frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} k(\xi)d\xi + \int_x^b \frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} k(\xi)d\xi - \frac{k(x)}{p(x)} \tag{98}$$

Mettons (86), (88) et (98) dans l'équation (53) que nous nous proposions de résoudre :

$$p(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2} + p'(x)\frac{dw(x)}{dx} - q(x)w(x) = -k(x) \tag{99}$$

$$\int_a^x \left[p(x)\frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} + p'(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx} - q(x)G(x;\xi)\right]k(\xi)d\xi$$

$$+\int_x^b \left[p(x)\frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} + p'(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx} - q(x)G(x;\xi)\right]k(\xi)d\xi$$

$$-p(x)\frac{k(x)}{p(x)} \overset{?}{\triangleq} -k(x) \tag{100}$$

On a:

$$p(x)\frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} + p'(x)\frac{dG(x;\xi)}{dx} - q(x)G(x;\xi) = 0 \tag{101}$$

car $G(x;\xi)$ est une solution de l'équation différentielle homogène excepté pour $x = \xi$ mais ce point ne change pas la valeur des intégrales (qui sont donc égales à 0).

On voit donc que le membre de gauche de (100) est égal au membre de droite et :

$$w(x) = \int_a^b k(\xi)G(x;\xi)d\xi \tag{102}$$

est une solution de l'équation différentielle :

$$L(x)w(x) = -k(x) \tag{103}$$

avec $G(x;\xi)$ solution de :

$$L(x)G(x;\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{104}$$

On montre aisément que $w(x)$ ci-dessus satisfait les c.a.l. (55) - (56) si $G(x;\xi)$ les satisfait.

5. La forme bilinéaire de la fonction de Green.

Notre but était de résoudre l'équation différentielle ordinaire :

$$L(x)w(x) = -k(x) \tag{105}$$

avec des c.a.l. du type :

2024-2025

$$\alpha w(a) + \beta \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \qquad (106)$$

$$\gamma w(b) + \delta \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0 \qquad (107)$$

A l'occasion de l'étude des fonctions de Bessel (chapitre I) on a vu que pour l'équation différentielle ordinaire homogène :

$$L(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \qquad (108)$$

avec les c.a.l du même type que (106) - 107) :

$$\alpha\varphi(a) + \beta \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \qquad (109)$$

$$\gamma\varphi(b) + \delta \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0 \qquad (110)$$

on a souvent :

i. l'existence d'un nombre infini dénombrable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$
ii. les fonctions propres $\varphi_n(x)$ de $L(x)$ sont orthogonales (souvent on les prend normées) dans l'intervalle $[a, b]$.
iii. $\{\varphi_n(x)\}$ forme une base pour toutes les fonctions $y(x)$ satisfaisant les mêmes c.a.l.

Pour plus de détails, prière de se référer au cours "Méthodes Mathématiques de la Physique I" ou au livre de Butkov "Mathematical Physics" p.337-341.

Alors on s'attend à ce que la fonction $G(x; \xi)$ (satisfaisant toujours les mêmes c.a.l.) puisse être trouvée sous la forme d'un développement en série de $\varphi_n(x)$ (si $\{\varphi_n(x)\}$ forme une base) :

$$G(x; \xi) = \sum_n a_n(\xi)\varphi_n(x) \qquad (111)$$

On se propose de calculer $\{a_n(\xi)\}$. On a :

$$L(x)G(x; \xi) = -\delta(x - \xi) \qquad (112)$$

Soit:

$$L(x)\sum_n a_n(\xi)\varphi_n(x) = -\delta(x - \xi) \qquad (113)$$

Dû à la linéarité de $L(x)$ et dû à (108) on a :

$$\sum_n a_n(\xi)\lambda_n\varphi_n(x) = -\delta(x - \xi) \qquad (114)$$

Multiplions les deux membres de (114) par $\varphi_m(x) \in \{\varphi_n(x)\}$ et intégrons sur x de a à b :

$$\sum_n a_n(\xi)\lambda_n \int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)dx = -\varphi_m(\xi) \qquad (115)$$

(la valeur du membre de droite découle de la définition même de la "fonction-δ").

Dû à l'orthogonalité de $\{\varphi_n(x)\}$, le membre de gauche de (115) ne contient qu'un seul terme :

$$a_m(\xi)\lambda_m \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx = -\varphi_m(\xi) \tag{116}$$

Soit :

$$a_m(\xi) = -\frac{\varphi_m(\xi)}{\lambda_m \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx} \tag{117}$$

Explicitement $G(x;\xi)$ s'écrit alors ((117) dans (111)) :

$$G(x;\xi) = -\sum_n \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} \tag{118}$$

(118) est la forme bilinéaire de la fonction de Green.

Remarques

1) Si $\{\varphi_n(x)\}$ est orthonormé (118) devient :

$$G(x;\xi) = -\sum_n \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n} \tag{119}$$

2) Si $\lambda = 0$ (108) devient :

$$L(x)\varphi(x) = 0 \tag{120}$$

dans ce cas on a une solution de l'équation

$$L(x)u(x) = 0 \tag{121}$$

satisfaisant à la fois les deux c.a.l. en $x = a$ et en $x = b$. Dans ce cas la fonction de Green n'existe pas (voir aussi la remarque 1) à la fin de 3.2) et la forme bilinéaire ci-dessus n'a pas de sens dans ce cas.

3) La fonction de Green peut être définie également en plusieurs dimensions (voir ECUE de Mécanique Quantique ou d'Electrodynamique Classique) (voir aussi la discussion dans "Mathematical Physics" de Butkov p. 520-547).

6. Exemples

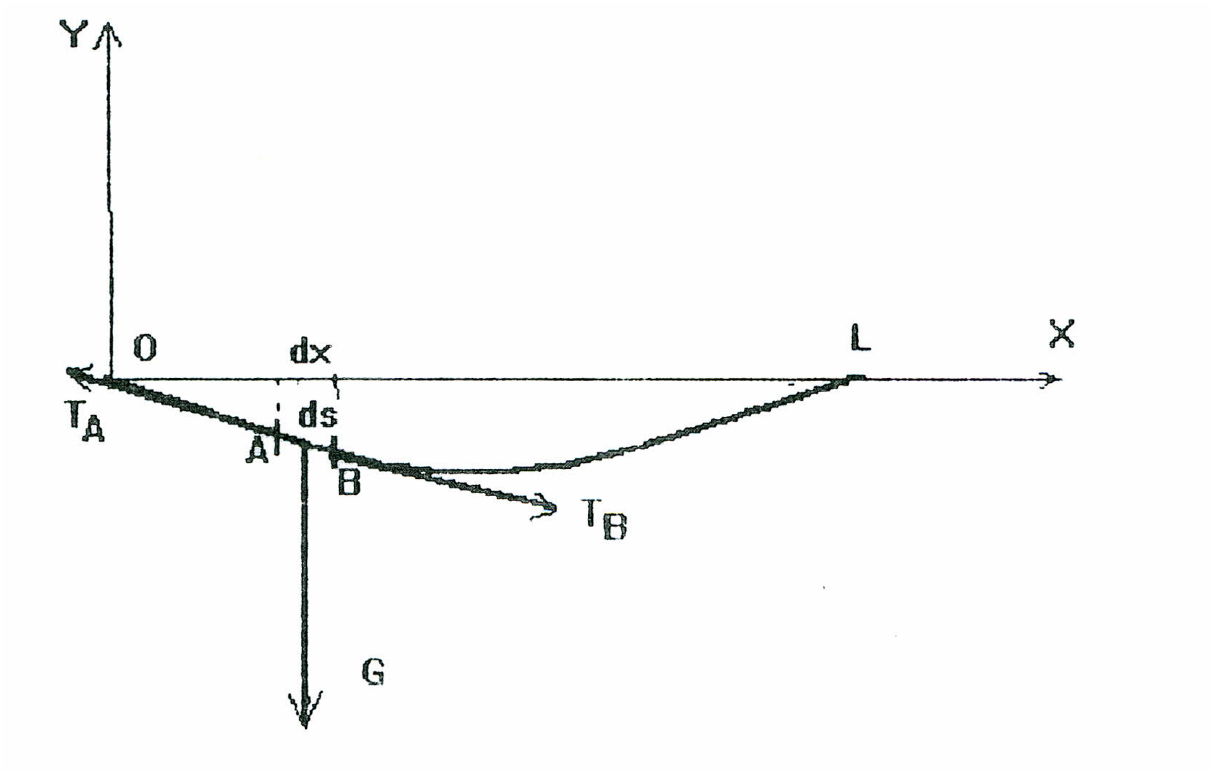
6.1. Une corde dont les deux extrémités sont fixes

Considérons une corde dont les deux extrémités sont fixes (en $x = 0$ et en $x = L$) (figure ci-dessous). La corde est soumise à la pesanteur. Etudier la forme de la corde.

Sur une partie infinitésimale AB de longueur ds il y a deux forces qui s'exercent : la force due à la tension et la force due à la pesanteur. La force due à la pesanteur est $-\rho g ds$ où ρ est la densité linéaire de la corde (le signe – est nécessaire car nous avons défini l'axe des Y positif vers le haut). La force totale due à la tension T est égale à (voir ECUE Mécanique générale) :

$$T\frac{d^2y(x)}{dx^2}dx \quad \text{où } T \text{ est la tension}$$

2024-2025



La condition d'équilibre est alors :

$$T\frac{d^2y(x)}{dx^2}dx - \rho g ds = 0 \tag{122}$$

Si la corde n'est pas trop courbée on a $ds \cong dx$ et (122) s'écrit :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - \frac{\rho g}{T} = 0 \tag{123}$$

(123) peut être intégrée immédiatement :

$$y(x) = \frac{\rho g}{2T}x^2 + Cx + D \tag{124}$$

où C et D sont des constantes d'intégration qui sont déterminées à l'aide des c.a.l. :

$y(0) = 0$ ce qui donne $D = 0$

$y(L) = 0$ ce qui donne $\frac{\rho g}{2T}L^2 + CL = 0$

soit $C = -\frac{\rho g L}{2T}$

de sorte que :

$$y(x) = \frac{\rho g x}{2T}(x - L) \tag{125}$$

Nous appliquerons maintenant la méthode de la fonction de Green pour obtenir la même solution, pour l'illustrer.

Considérons l'équation :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{k(x)}{T} \tag{126}$$

(126) = (123) si l'on prend :

$$k(x) = -\rho g \tag{127}$$

Calculons $G(x;\xi)$ de $L(x) = d^2/dx^2$ (= type spécial de l'opérateur de Sturm-Liouville : $p(x) = 1$, $q(x) = 0$) :

$$\frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} = -\delta(x-\xi) \tag{128}$$

a) Pour $\boldsymbol{0 \leq x < \xi}$:

$$\frac{d^2G(x;\xi)}{dx^2} = 0 \tag{129}$$

dont la solution est :

$$G(x;\xi) = Ax + B \tag{130}$$

Les constantes A et B restent à être déterminées.

b) Pour $\boldsymbol{\xi < x \leq b}$:

De la même façon on trouve :

$$G(x;\xi) = Cx + D \tag{131}$$

avec C et D à déterminer.

$G(x;\xi)$ satisfait les mêmes c.a.l, que $y(x)$:

$$G(0;\xi) = G(L;\xi) = 0 \tag{132}$$

Donc :

$$B = 0 \text{ et } D = -CL \tag{133}$$

La condition de la discontinuité de la dérivée de $G(x;\xi)$ pour $x = \xi$ (équation (68)) :

$$\left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-0} = -1 \tag{134}$$

nous donne:

$$C - A = -1 \tag{135}$$

La condition de la continuité de $G(x;\xi)$ pour $x = \xi$ donne :

$$A\xi + B = C\xi + D \tag{136}$$

(133), (135) et (136) donne :

$$C = -\frac{\xi}{L} \tag{137}$$

$$A = -\frac{\xi}{L} + 1 \tag{138}$$

de sorte que toutes les constantes sont connues et l'on a :

$$G(x;\xi) = \begin{cases} \frac{L-\xi}{L}x & 0 \leq x < \xi \\ \frac{L-x}{L}\xi & \xi < x \leq L \end{cases} \tag{139}$$

Dû à la propriété résolvante de $G(x;\xi)$, la solution de (126) est alors :

$$y(x) = \int_0^L G(x;\xi)\frac{k(\xi)}{T}d\xi \tag{140}$$

Si $k(x) = -\rho g$ on a :

$$y(x) = -\int_0^L G(x;\xi)\frac{\rho g}{T}d\xi \tag{141}$$

Avec (139), (141) devient :

$$y(x) = -\frac{\rho g}{T}\left[\int_0^x d\xi\frac{L-x}{L}\xi + \int_x^L d\xi\frac{L-\xi}{L}x\right] \tag{142}$$

Soit:

$$y(x) = -\frac{\rho g}{T}x(L-x) \tag{143}$$

ce qui est (125).

Remarque : La forme bilinéaire de la fonction de Green est (**exercice**) :

$$G(x;\xi) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{144}$$

(**Indication :** Calculer les fonctions propres normées de d^2/dx^2 avec les c.a.l. $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$).

6.2. Considérer le problème suivant :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f(x) \qquad y(0) = 0, \qquad \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=L} = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

a) Trouver les fonctions propres normées de d^2/dx^2 ;
b) Trouver la forme bilinéaire de $G(x;\xi)$
c) Trouver la forme $G(x;\xi)$ en utilisant la méthode directe ;
d) Montrer que la forme de b) = la forme de c).

Solution:

a) Fonctions propres normées de d^2/dx^2

On a l'équation aux valeurs propres :

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} = \lambda_n\varphi_n(x) \tag{145}$$

dont la solution est :

$$\varphi_n(x) = A_n\, sin\, k_n x + B_n\, cos\, k_n x \tag{146}$$

avec

$$k_n = \sqrt{-\lambda_n} \tag{147}$$

La c.a.l. en $x = 0$ donne :

$\varphi_n(0) = 0 = B_n$ de sorte que :

$$\varphi_n(x) = A_n\, sin\, k_n x \tag{148}$$

La c.a.l. en $x = L$ donne :

$$\left.\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right|_{x=L} = 0 = A_n k_n\, cos\, k_n L = 0 \tag{149}$$

Soit :

$$k_n L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ou } k_n = \frac{(2n+1)}{2L}\pi \tag{150}$$

Donc avec (147) :

$$\lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2L}\right)^2 \pi^2 \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{151}$$

On a alors pour $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = A_n\, sin \frac{2n+1}{2L}\pi x \tag{152}$$

$\varphi_n(x)$ est normé dans $[0, L]$ si $A_n = \sqrt{2/L}$

b) Forme bilinéaire de $G(x;\xi)$

On a, en appliquant (119) :

$$\begin{aligned} G(x;\xi) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n} \\ &= \frac{8L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \sin\frac{2n+1}{2L}\pi\xi\, \sin\frac{2n+1}{2L}\pi x \end{aligned} \tag{153}$$

c) $G(x;\xi)$ par la méthode directe

On a d'après la définition de $G(x;\xi)$:

$$G(x;\xi) = Ax + B \quad 0 \le x < \xi \tag{154}$$

$$G(x;\xi) = Cx + D \quad \xi \le x < L \tag{155}$$

La c.a.l. en $x = 0$ donne :

$$G(0;\xi) = 0 = B \tag{156}$$

La c.a.l. en $x = L$ donne :

$$\left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=L} = 0 = C \tag{157}$$

On a donc :

$$G(x;\xi) = Ax \quad 0 \le x < \xi \tag{158}$$

$$G(x;\xi) = D \quad \xi \le x < L \tag{159}$$

La fonction $G(x;\xi)$ est continue pour $x = \xi$ ce qui nous donne :

$$A\xi = D \tag{160}$$

La condition de la discontinuité de la dérivée première

$$\left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{dG(x;\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-0} = -1 \tag{161}$$

nous donne :

$$A = 1$$

Tout cela nous mène à :

$$G(x;\xi) = x \text{ pour } 0 \le x < \xi \tag{162}$$

$$G(x;\xi) = \xi \text{ pour } \xi \le x < L \tag{163}$$

d) Déveioppement en série de $G(x;\xi)$

Posons :

$$G(x;\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\xi) \sin\frac{2n+1}{2L}\pi x \quad 0 \le x \le L \tag{164}$$

(on essaie de développer $G(x;\xi)$ sur les fonctions propres de l'opérateur d^2/dx^2 :

Pour déterminer les coefficients $\{a_n(\xi)\}$ nous multiplions les deux membres par $\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x \;\; m \in \mathbb{N}$ et nous intégrons sur x de 0 à L :

$$\int_0^L G(x;\xi)\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\xi) \underbrace{\int_0^L \sin\frac{2n+1}{2L}\pi x \sin\frac{2m+1}{2L}\pi x\, dx}_{=\delta_{nm}\, L/2}$$

$$= a_m(\xi)\frac{L}{2} \tag{165}$$

Calculons le membre de gauche, en tenant compte de (162) et (163) :

$$\int_0^L G(x;\xi)\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x\, dx = \int_0^\xi x\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x\, dx + \int_\xi^L \xi\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x\, dx \tag{166}$$

Nous calculons les deux intégrales du membre de droite de (166) :

$$\int_0^{\xi} x \sin k_m x \, dx \overset{I.P.P.}{\hat{=}} -\frac{x}{k_m}\cos k_m x\Big|_0^{\xi} + \frac{1}{k_m}\int_0^{\xi} \cos k_m x \, dx = -\frac{\xi}{k_m}\cos k_m\xi + \frac{1}{k_m^2}\sin k_m x|_0^{\xi}$$

$$= -\frac{\xi}{k_m}\cos k_m\xi + \frac{1}{k_m^2}\sin k_m\xi \tag{167}$$

$$\int_{\xi}^{L} \xi \sin k_m x \, dx = -\frac{\xi}{k_m}\cos k_m x|_{\xi}^{L} = -\frac{\xi}{k_m}\cos k_m L + \frac{\xi}{k_m}\cos k_m\xi$$

$$\cos k_m L = \cos\frac{2m+1}{2L}\pi\, L = \cos\frac{2m+1}{2}\pi = 0$$

Donc:

$$\int_{\xi}^{L} \xi \sin k_m x \, dx = \frac{\xi}{k_m}\cos k_m\xi \tag{168}$$

ce qui nous donne pour le membre de gauche de (165) :

$$\int_0^{L} G(x;\xi)\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x \, dx = \frac{1}{k_m^2}\sin k_m\xi \tag{169}$$

et avec (150) :

$$\int_0^{L} G(x;\xi)\sin\frac{2m+1}{2L}\pi x \, dx = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2L}{2m+1}\right)^2 \sin\frac{2m+1}{2L}\pi\xi \tag{170}$$

Avec (165) on obtient alors $a_m(\xi)$:

$$a_m(\xi) = \frac{2L}{\pi^2}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 \sin\frac{2m+1}{2L}\pi\xi \tag{171}$$

Ceci dans (164) nous donne le développement :

$$G(x;\xi) = \frac{8L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \sin\frac{2n+1}{2L}\pi\xi \sin\frac{2n+1}{2L}\pi x \tag{172}$$

ce qui est exactement (153) :

6.3. Etude d'une corde ayant les extrémités fixes soumise à une force périodique $\boldsymbol{k(x,t) = K(x)e^{-i\omega t}}$

L'équation du mouvement est (voir ECUE Ondes) :

$$\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial t^2} = -k(x,t) \tag{173}$$

où l'on a posé :

2024-2025

$$\text{v} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{174}$$

T est, comme en 6.1., la tension de la corde et ρ la densité linéaire.

Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$u(x.t) = y(x)e^{-i\omega t} \tag{175}$$

Nous supposons donc que les points de la corde vibrent à la fréquence extérieure (oscillations forcées).

(175) dans (173) donne :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + k^2y(x) = -K(x) \tag{176}$$

avec :

$$k = \frac{\omega}{\text{v}} \tag{177}$$

Considérons l'opérateur :

$$L_k(x) = \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \tag{178}$$

avec les conditions aux limites :

$$y(0) = y(L) = 0 \tag{179}$$

$L_k(x)$ avec ces c.a.l. est du type Sturm-Liouville ($p(x) = 1$ $q(x) = -k^2$)

La fonction de Green est la solution de :

$$L_k(x)G(x;\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{180}$$

avec les c.a.l. (179).

Un calcul direct mène à (**exercice**) :

$$G_k(x;\xi) = \frac{\sin kx}{k}\frac{\sin k(L-\xi)}{\sin kL} \quad 0 \le x < \xi \tag{181}$$

et :

$$G_k(x;\xi) = \frac{\sin k\xi}{k}\frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} \quad \xi < x \le L \tag{182}$$

Remarques

a) On peut également appliquer la formule bilinéaire (118) en utilisant les fonctions propres de $\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ (avec les c.a.l.). On obtiendra une somme infinie. En utilisant le développement de $G(x;\xi)$ (181) et (182) sur les fonctions propres on démontre l'équivalence des deux expressions. On a (**exercice**) :

$$G(x;\xi) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}}{k^2 - \frac{n\pi^2}{L^2}} \tag{183}$$

2024-2025

b) Il est impossible de trouver la fonction de Green si :

$$kL = n\pi \tag{184}$$

car cette équation rendrait le dénominateur de (181) et (182) ou de (183) égal à zéro.

Pour cette valeur on aurait :

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}u(x) = 0 \tag{185}$$

dont la solution est :

$$u(x) = A\sin\frac{n\pi}{L}x + B\ \cos\frac{n\pi}{L}x \tag{186}$$

$B = 0$ pour satisfaire les c.a.l.

Si $x = 0\ \ u(0) = 0$

Si $x = L\ \ u(L) = 0$

Nous avons ici une solution satisfaisant les deux c.a.l. à la fois. Nous savons déjà (voir remarque 1 à la fin de 3.2. et remarque à la fin de 5) que dans ce cas la fonction de Green n'existe pas ($u(x) = A\sin\frac{n\pi}{L}x$ est une solution de :

$$L_k(x)u(x) = 0 \tag{187}$$

donc une solution associée à la valeur propre 0 de $L_k(x)$).

La condition pour laquelle la fonction de Green n'existe pas (184) peut s'écrire (en utilisant (177) :

$$\omega = \frac{n\pi}{L}\mathrm{v} \tag{188}$$

On peut démontrer que c'est une condition de résonance où la fréquence extérieure correspond à une des fréquences caractéristiques de la corde même. Si le processus n'est pas amorti par l'une ou l'autre force visqueuse, une force extérieure en résonance avec la corde, créera des modes de vibration d'amplitude infinie et il y aura rupture. Ceci correspond à une valeur infinie de la fonction de Green (voir la forme bilinéaire).