



**UNIVERSITE DU BURUNDI –
FACULTE DE MEDECINE**

PHYSIQUE (MED1104)

Notes de l'ECUE

1^{ère} année de Bachelier en Médecine

Par

Dr Thaddée BARANCIRA

Bujumbura, avril 2025

Fiche signalétique du cours en fin de document

Table des matières

| | | |
|---------|--|----|
| 0. | INTRODUCTION | 8 |
| 1 | Objet de la Physique | 8 |
| 1.1 | Qu'est-ce que la physique ? | 8 |
| 1.2 | Objet de la Physique..... | 8 |
| 1.3 | Méthodes de la physique | 9 |
| 1.3.1 | Observation | 9 |
| 1.3.2 | Analyse | 9 |
| 1.3.3 | Synthèse | 9 |
| 1.3.4 | Déduction et prédiction | 9 |
| 1.4 | Qu'est-ce qu'un modèle? | 9 |
| 1.5 | Objet du cours de Physique | 10 |
| 2 | Grandeurs et unités..... | 10 |
| 2.1 | Système international d'unités | 11 |
| 2.1.1 | Les unités de mesure : le SI | 11 |
| 2.1.1.1 | Definition..... | 12 |
| 2.1.1.2 | Les unités de base du SI | 12 |
| 2.1.2 | Dimension d'une grandeur..... | 13 |
| 2.1.3 | Préfixes | 14 |
| 2.2 | Mesure d'une grandeur | 15 |
| 2.2.1 | Ordres de grandeur | 15 |
| 2.2.2 | Chiffres significatifs. Règle de troncature («arrondi»)..... | 15 |
| 3 | Mesures et incertitudes..... | 17 |
| 3.1 | Erreurs systématiques..... | 17 |
| 3.2 | Erreurs aléatoires (accidentelles)..... | 17 |
| 3.2.1 | Calcul des erreurs maximales (bornes supérieures). | 18 |
| 3.2.2 | Calcul des erreurs statistiques | 20 |
| 4 | Système de référence – Axes – Coordonnées | 21 |
| 4.1 | Système à une dimension | 21 |
| 4.2 | Système à deux dimensions | 22 |
| 4.3 | Systèmes à trois dimensions | 22 |
| 5 | Vecteurs et scalaires..... | 24 |
| 5.1 | Addition vectorielle | 25 |
| 5.2 | Composantes d'un vecteur | 26 |

| | | |
|---------|--|----|
| 5.3 | Produits de deux vecteurs..... | 26 |
| 5.3.1 | Produit scalaire p | 26 |
| 5.3.2 | Produit vectoriel \mathbf{P} | 27 |
| 5.3.3 | Algèbre vectorielle à partir des composantes..... | 28 |
| 6 | Alphabet grec | 28 |
| 1 | CHAPITRE I : CINEMATIQUE D'UNE PARTICULE | 30 |
| 1.1 | Introduction | 30 |
| 1.2 | Cinématique à 1 dimension..... | 30 |
| 1.2.1 | Repérage du mobile | 30 |
| 1.2.2 | Vitesse moyenne | 31 |
| 1.2.3 | Vitesse instantanée | 31 |
| 1.2.4 | Accélération | 32 |
| 1.2.5 | Cas particuliers de mouvement rectiligne : le MRU et le MRUA | 32 |
| 1.2.5.1 | Mouvement rectiligne uniforme (MRU) | 32 |
| 1.2.5.2 | Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) | 33 |
| 1.2.6 | Unités | 34 |
| 1.3 | Cinématique à plusieurs dimensions | 34 |
| 1.3.1 | Repérage du mobile | 34 |
| 1.3.2 | Vitesse instantanée | 35 |
| 1.3.3 | Accélération instantanée | 36 |
| 1.3.4 | Cas particulier du mouvement circulaire uniforme (MCU)..... | 37 |
| 1.4 | Exercices..... | 40 |
| 2 | CHAPITRE II : DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE | 45 |
| 2.1 | Force..... | 45 |
| 2.2 | Première loi de Newton | 46 |
| 2.3 | Deuxième loi de Newton et la masse..... | 47 |
| 2.4 | Troisième loi de Newton | 48 |
| 2.5 | Applications des lois de Newton | 49 |
| 2.6 | Domaine de validité des lois de Newton..... | 51 |
| 2.7 | Quantité de mouvement..... | 52 |
| 2.7.1 | Définition – conservation de la quantité de mouvement | 52 |
| 2.7.2 | Applications..... | 53 |
| 2.7.2.1 | Recul d'une arme à feu | 53 |
| 2.7.2.2 | Moteur à réaction | 53 |

| | | |
|---------|--|----|
| 2.8 | Force gravitationnelle et poids..... | 54 |
| 2.8.1 | Force gravitationnelle | 54 |
| 2.8.2 | Poids..... | 54 |
| 2.9 | Forces de frottement. | 55 |
| 2.9.1 | Forces de frottement entre solides..... | 55 |
| 2.9.2 | Forces de frottement dans les fluides..... | 57 |
| 2.9.3 | Importance des forces de frottement..... | 58 |
| 2.10 | Exercices..... | 58 |
| 3 | CHAPITRE III : TRAVAIL ET ENERGIE | 61 |
| 3.1 | Travail effectué par une force constante..... | 61 |
| 3.2 | Travail effectué par une force variable | 62 |
| 3.3 | Energie cinétique et son théorème..... | 63 |
| 3.4 | Energie potentielle..... | 65 |
| 3.5 | Energie potentielle de la force pesanteur..... | 66 |
| 3.6 | Forces conservatives et non conservatives..... | 67 |
| 3.7 | Puissance..... | 68 |
| 3.8 | Exercices..... | 69 |
| 4 | CHAPITRE IV : MÉCANIQUE DES FLUIDES..... | 72 |
| 4.1 | Statique des fluides (Hydrostatique)..... | 72 |
| 4.1.1 | Quelques rappels..... | 72 |
| 4.1.1.1 | Phases liquide et gazeuse..... | 72 |
| 4.1.1.2 | Densité | 73 |
| 4.1.2 | Pression hydrostatique..... | 73 |
| 4.1.2.1 | Définition..... | 73 |
| 4.1.2.2 | Pesanteur et pression hydrostatique..... | 74 |
| 4.1.2.3 | Travail des forces de pression. | 76 |
| 4.1.2.4 | Poussée d'Archimède..... | 76 |
| 4.1.2.5 | Transmission des pressions par les liquides, Principe de Pascal..... | 81 |
| 4.2 | Force de cohésion dans les liquides..... | 83 |
| 4.2.1 | Tension superficielle..... | 83 |
| 4.2.2 | Angles de contact et capillarité..... | 85 |
| 4.2.3 | Loi de Laplace | 87 |
| 4.2.4 | Exercices..... | 90 |
| 4.3 | Dynamique des fluides (Hydrodynamique)..... | 91 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 4.3.1 | Dynamique des fluides parfaits..... | 91 |
| 4.3.1.1 | Equation de continuité..... | 91 |
| 4.3.1.2 | Equation de Bernoulli..... | 92 |
| 4.3.1.3 | Applications..... | 94 |
| 4.3.2 | Dynamique des liquides réels : Ecoulement visqueux. | 96 |
| 4.3.2.1 | Forces de viscosité | 96 |
| 4.3.2.2 | Loi de Poiseuille (Jean Léonard Marie, médecin français). | 99 |
| 4.3.2.3 | Régime turbulent. Nombre de Reynolds..... | 100 |
| 4.4 | Exercices..... | 101 |
| 5 | CHAPITRE V : ELECTRICITE ET MAGNETISME | 102 |
| 5.1 | Charge électrique et loi de Coulomb..... | 102 |
| 5.1.1 | Force électrique..... | 102 |
| 5.1.2 | Charge électrique | 102 |
| 5.1.3 | Conservation de la charge..... | 103 |
| 5.1.4 | Conducteurs et isolants..... | 104 |
| a. | Sphères métalliques reliées par une tige métallique..... | 104 |
| b. | Sphères métalliques reliées par un ruban de caoutchouc..... | 104 |
| 5.1.5 | Charge par conduction et par induction | 105 |
| 5.1.6 | Loi de Coulomb..... | 106 |
| 5.1.7 | Principe de superposition..... | 108 |
| 5.1.8 | Exercices | 110 |
| 5.2 | Champ électrique | 111 |
| 5.2.1 | Définition du champ électrique..... | 111 |
| 5.2.2 | Champ électrique dû à une distribution de charges | 113 |
| 5.2.2.1 | Calcul du champ électrique dû à un plan infini uniformément chargé..... | 114 |
| 5.2.2.2 | Calcul du champ électrique dû à deux plans parallèles, uniformément chargés de charges opposées..... | 116 |
| 5.2.3 | Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique | 117 |
| 5.2.4 | Exercices | 118 |
| 5.3 | Potentiel électrique..... | 120 |
| 5.3.1 | La force de Coulomb est conservative | 120 |
| 5.3.2 | Energie potentielle électrique..... | 121 |
| 5.3.3 | Potentiel électrique et les différences de potentiel..... | 123 |
| 5.3.4 | Relation entre le potentiel et le champ électrique | 125 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 5.3.5 | L'électronvolt..... | 126 |
| 5.3.6 | Potentiel électrique attribuable à une charge ponctuelle | 126 |
| 5.3.7 | Exercices..... | 126 |
| 5.4 | Courant électrique, résistance et piles..... | 128 |
| 5.4.1 | Pile électrique..... | 128 |
| 5.4.2 | Courant électrique | 129 |
| 5.4.3 | Résistance..... | 130 |
| 5.4.4 | Résistivité et conductivité | 132 |
| 5.4.5 | Force électromotrice (F.é.m.) et tension aux bornes..... | 133 |
| 5.4.6 | Puissance électrique..... | 135 |
| 5.4.7 | Courant alternatif..... | 136 |
| 5.4.8 | Exercices..... | 139 |
| 5.5 | Circuits avec résistances ohmiques..... | 140 |
| 5.5.1 | Résistances en série et en parallèle | 140 |
| 5.5.2 | Lois de Kirchhoff..... | 142 |
| 5.5.3 | Méthode de résolution de circuits par les lois de Kirchhoff | 144 |
| 5.5.4 | Dangers de l'électricité..... | 148 |
| 5.5.5 | Exercices..... | 148 |
| 5.6 | Condensateurs | 152 |
| 5.6.1 | Capacité d'un condensateur..... | 152 |
| 5.6.2 | Rôle des diélectriques dans un condensateur | 154 |
| 5.6.3 | Condensateurs en série et en parallèle..... | 155 |
| 5.6.4 | Energie électrique emmagasinée par un condensateur | 157 |
| 5.6.5 | Circuits RC..... | 157 |
| 5.6.5.1 | Charge du condensateur | 157 |
| 5.6.5.2 | Décharge du condensateur | 160 |
| 5.6.6 | Exercices..... | 161 |
| 5.7 | Appareils de mesures électriques | 164 |
| 5.7.1 | Le voltmètre | 164 |
| 5.7.2 | L'ampèremètre..... | 164 |
| 5.7.3 | L'ohmmètre | 165 |
| 5.7.4 | Le multimètre | 166 |
| 5.7.5 | Exercices..... | 168 |
| 5.8 | Magnétisme | 170 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 5.8.1 | Champ magnétique | 171 |
| 5.8.2 | Production d'un champ magnétique par un courant..... | 172 |
| 5.8.3 | Force magnétique s'exerçant sur un courant | 172 |
| 5.8.4 | Application au galvanomètre et au moteur électrique..... | 175 |
| 5.8.4.1 | Forces agissant sur une boucle de courant..... | 175 |
| 5.8.4.2 | Galvanomètre d'Arsonval..... | 176 |
| 5.8.4.3 | Moteur électrique | 177 |
| 5.8.5 | Force de Lorentz..... | 178 |
| 5.8.6 | Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique..... | 178 |
| 5.8.7 | Champ magnétique dû à des courants..... | 180 |
| 5.8.7.1 | Champ magnétique dû à un fil rectiligne | 180 |
| 5.8.7.2 | Champ magnétique dû à un solénoïde | 180 |
| 5.8.8 | Définition de l'ampère et du coulomb | 181 |
| 5.8.9 | Exercices..... | 182 |
| 5.9 | Induction électromagnétique et inducteurs | 186 |
| 5.9.1 | Conditions pour créer des courants induits | 186 |
| 5.9.2 | Loi de Faraday et loi de Lenz | 187 |
| 5.9.3 | Les générateurs d'électricité | 190 |
| 5.9.4 | Force contre-électromotrice (f.c.é.m) des moteurs..... | 192 |
| 5.9.5 | Transformateurs et transport de l'énergie électrique | 192 |
| 5.9.6 | Inductance et inducteurs | 194 |
| 5.9.6.1 | Inductance Mutuelle | 194 |
| 5.9.6.2 | Auto-inductance..... | 195 |
| 5.9.6.3 | Inducteur | 196 |
| 5.9.7 | Energie emmagasinée dans un inducteur | 196 |
| 5.9.8 | Circuits RL..... | 197 |
| 5.9.9 | Circuits LC et oscillations électromagnétiques..... | 199 |
| 5.9.10 | Exercices..... | 201 |

0. INTRODUCTION

1 Objet de la Physique

1.1 Qu'est-ce que la physique ?

La question la plus souvent rencontrée est celle de connaître l'objet de la Physique avant de savoir le propos de la Physique, c'est-à-dire le contenu de la matière.

Pour avoir la signification d'un nouveau concept ou d'un mot inconnu, nous nous tournons immédiatement vers les dictionnaires, mais ces derniers ne sont pas toujours d'un grand secours.

Prenons la définition du Petit Larousse (grand format, édition 2000) :

PHYSIQUE n.f. (gr. phusikê, de phusis, nature). Science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps, et établit les lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

ENCYCL. ... La physique moderne, essentiellement expérimentale et mathématique, s'est développée grâce à l'amélioration des instruments d'observation, à l'élaboration de théories mathématiques et au rassemblement de lois disparates en un ensemble cohérent fondé sur des définitions et sur des principes clairement définis.

On y décrit la physique comme un Code de Lois et le physicien comme un législateur de la nature avec en plus un petit côté axiomatisant. Puisqu'il y a loi et que cette loi doit porter sur un ensemble cohérent, la première question est donc : **peut-on donc définir clairement les objets dont on parle?** Continuons donc innocemment la recherche des définitions des trois mots clés : **matière - espace - temps**. Toujours dans Le Petit Larousse on trouve :

Espace : *étendue indéfinie qui contient et entoure tous les objets.*

Matière : *substance, réalité constitutive des corps, douée de propriétés physiques.*

Temps : *notion fondamentale conçue comme un milieu infini dans lequel se succèdent les événements et ressentie souvent comme une force agissant sur le monde, les êtres.*

Ce qui ne rend pas le service escompté à savoir éclaircir les termes utilisés et les relations qui peuvent exister entre eux.

D'autres, plus malins, vont sur internet pour en savoir plus. Généralement cela n'est pas d'un grand secours non plus et l'on est obligé de se tourner vers les livres de référence.

1.2 Objet de la Physique

Une meilleure approche est de s'interroger sur l'objet de préoccupation des physiciens. En effet, nous nous trouvons confrontés dans la vie courante avec une multitude de phénomènes que nous percevons par l'intermédiaire de nos sens.

Bruits, odeurs, mouvements, couleurs, duretés, éclat,... Parfois aussi, nos sens ont besoin d'intermédiaires pour ressentir ces manifestations: ce sont les instruments de mesure qui augmenteront (parfois) la sensibilité et la précision de nos observations. Le but de la physique est de comprendre ou d'interpréter ces phénomènes.

Etymologiquement, la Physique étudie les phénomènes de la Nature et c'est ce que comprenaient les Anciens sous le vocable de "Philosophie Naturelle". Dans l'acception actuelle, la Physique se restreint à l'observation et la compréhension du monde matériel: domaine extrêmement vaste malgré tout, qui englobe tout à la fois le mouvement des satellites terrestres, les phénomènes lumineux et acoustiques, l'électricité et la structure intime de la matière: exemples simples dont la liste ne prétend pas être exhaustive.

En tant qu'intermédiaires de nos sens, les instruments d'observation en physique jouent un rôle fondamental. Ils peuvent avoir la simplicité relative d'un appareil photographique ou la complexité d'un satellite, mais ce sont toujours des outils que le génie humain s'emploie à perfectionner.

1.3 Méthodes de la physique

Tout raisonnement scientifique contient quatre étapes:

1.3.1 Observation

C'est l'évaluation du phénomène observé qui peut être:

- soit qualitative (description),
- soit quantitative (évaluation) grâce à une mesure (expérimentation).

1.3.2 Analyse

Le scientifique développe, met à jour, dissèque les facteurs qui gouvernent le phénomène.

1.3.3 Synthèse

Etape d'unification et de corrélation avec des phénomènes connus.

1.3.4 Déduction et prédiction

Déduction de lois scientifiques, élaboration d'un modèle qui décrit la réalité vécue, extension éventuelle à d'autres manifestations.

Toutes les sciences exactes passent de manière cyclique par toutes ces étapes, chaque cycle apportant sa contribution à l'édification d'une structure logique, que ce soit par une découverte ou par l'abandon d'une pièce jugée fautive, hasardeuse ou incomplète.

1.4 Qu'est-ce qu'un modèle?

Toute science tend à s'établir sur un nombre minimum d'axiomes ou de postulats (la géométrie, par exemple). Sur cette base, l'homme de science échafaude des théories ou modèles qui ne sont valables que dans la mesure où l'expérience les confirme. Il est dès lors impossible de dire que telle théorie est immuable: il est plus raisonnable de la qualifier de valable tant qu'elle n'est pas contredite par les faits. C'est le sens qu'il faut attribuer à la phrase de Henri Poincaré: "Les théories ne sont pas vraies ; elles sont pratiques".

En d'autres termes, l'interprétation des phénomènes physiques ne contient pas la vérité; tout au plus décrit-elle les faits dans les limites de nos connaissances et de nos observations !

Pensons ici à la lumière ou à la chaleur : au cours des âges leurs représentations ont été nombreuses et l'expérimentation continue s'est chargée d'éliminer les modèles trop manifestement erronés.

1.5 Objet du cours de Physique

Comme les autres cours de sciences exactes, l'objet de ces leçons est d'éclairer la démarche logique du physicien, d'apprécier à sa juste valeur l'intérêt de ses recherches en vue d'atteindre une vérité qu'il sait limitée.

Nous passerons en revue quelques grands chapitres de la physique en nous appuyant autant que possible sur les exemples concrets que nous apporte la vie quotidienne.

Le cours de Physique en Médecine est plus orienté vers les êtres vivants, plus particulièrement l'être humain. En effet, tous les êtres vivants, à toutes les échelles obéissent aux lois de la Physique :

- Les lois de la physique conditionnent donc le comportement des êtres vivants ;
- La Physiologie n'est qu'une application directe des lois de la Physique (et la chimie) aux êtres vivants.

Le progrès en matière de Médecine, diagnostic et recherche en Biologie s'effectuent à travers un appareillage de plus en plus sophistiqué. La compréhension du fonctionnement de ces appareillages est essentielle pour une bonne utilisation. La plupart de ces appareillages est basé sur des phénomènes physiques élémentaires.

Les mathématiques constituent le langage des physiciens.

2 Grandeurs et unités

La description et l'analyse des phénomènes physiques demandent l'utilisation de grandeurs qui représentent l'état des objets. Une grandeur physique est toute propriété qui peut être quantifiée, soit par une mesure, soit par un calcul. La valeur de cette grandeur doit s'exprimer par un nombre réel (ou complexe) accompagné d'une unité. Exemples de grandeur : la température, le temps écoulé, le volume d'un objet, sa position,

Pour une grandeur particulière, on peut utiliser des nombreuses unités différentes ; par exemple une vitesse peut être exprimée sous la forme $v = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$. Les unités m/s ou km/h sont des unités alternatives pour exprimer la même valeur de la grandeur "vitesse" : espace parcouru par unité de temps.

Il faut néanmoins éviter de confondre les deux concepts :

- **Grandeur** : toute propriété qui peut être quantifiée ;
- **Unité** : valeur de la grandeur par rapport à un étalon (systèmes d'unités).

Dimension : représentation d'une grandeur en fonction du produit des puissances des grandeurs dites fondamentales.

Il est important donc de disposer d'un ensemble d'unités bien définies et faciles à utiliser, universellement reconnues, accessibles à tous et supposées constantes dans le temps et dans l'espace. Pour des raisons historiques, il existe un grand nombre d'unités différentes pour chaque grandeur physique. Dans la mesure du possible on va utiliser le fameux **Système International d'Unités (SI)**.

2.1 Système international d'unités

L'ensemble des grandeurs physiques mesurables font référence à des unités. Des conventions internationales définissent le système international d'unités (SI). Le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) (site : www.bipm.org/fr/) a été créé par la Convention du Mètre signée à Paris le 20 mai 1875 par dix-sept États, lors de la dernière séance de la Conférence diplomatique du Mètre. Cette Convention a été modifiée en 1921.

Le Bureau international a pour mission d'assurer l'unification mondiale des mesures physiques ; les objectifs du BIPM sont les suivants :

- représenter la communauté métrologique internationale afin d'en maximiser la reconnaissance et l'impact ;
- être un centre de collaboration scientifique et technique entre les États Membres, leur permettant de développer des aptitudes pour les comparaisons internationales de mesure, sur le principe des frais partagés ;
- coordonner le système mondial de mesure, en garantissant la comparabilité et la reconnaissance au niveau international des résultats de mesures.

2.1.1 Les unités de mesure : le SI

Lors d'un vote historique, les États Membres ont adopté, le 16 novembre 2018, la révision du Système international d'unités (SI), modifiant ainsi la définition mondiale du kilogramme, de l'ampère, du kelvin et de la mole.

La révision du SI, adoptée par la Conférence générale des poids et mesures (CGPM) à sa 26^{ème} réunion, a pour conséquence qu'à compter du 20 mai 2019, toutes les unités du SI sont définies à partir de constantes de la nature, ce qui permet d'assurer la stabilité du SI dans le futur et ouvre la voie à l'utilisation de nouvelles technologies, y compris celles quantiques, pour mettre en pratique les définitions.

Les sept constantes définissant le SI sont les suivantes :

- la fréquence de la transition hyperfine du césium $\Delta\nu_{CS}$;
- la vitesse de la lumière dans le vide c ;
- la constante de Planck h ;
- la charge élémentaire e ;
- la constante de Boltzmann k ;
- la constante d'Avogadro N_A ;
- l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique défini K_{cd} .

Le SI était précédemment défini à partir de sept unités de base (le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela) et d'unités dérivées, formées à partir de produits de puissances des unités de base.

Les sept unités de base avaient été choisies pour des raisons historiques et étaient considérées, par convention, comme indépendantes du point de vue dimensionnel. Les unités de base ont été conservées dans l'actuel SI, même si le SI en lui-même est désormais défini à partir des sept constantes précédemment mentionnées.

2.1.1.1 Définition

Les définitions des unités du SI sont établies à partir d'un ensemble de sept constantes de la physique. À partir des valeurs fixées de ces sept constantes, exprimées en unités SI, il est possible de déduire toutes les unités du système. Ces sept constantes sont ainsi l'élément le plus essentiel de la définition de tout le système d'unités.

Le choix spécifique de ces sept constantes a été considéré le meilleur possible, en tenant compte de la précédente définition du SI - qui était fondée sur sept unités de base - et des progrès de la science.

Les définitions présentées ci-dessous précisent la valeur numérique exacte de chaque constante lorsque sa valeur est exprimée dans l'unité du SI correspondante. En fixant la valeur numérique exacte, l'unité devient définie car le produit de la **valeur numérique** par l'**unité** doit être égal à la **valeur** de la constante qui, par hypothèse, est invariante. Les sept constantes définissant le SI ont été choisies de sorte que toute unité du SI puisse être exprimée à partir de l'une de ces sept constantes ou à partir de produits ou rapports de ces constantes.

Le Système international d'unités, le SI, est le système d'unités selon lequel :

- la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{Cs}$, est égale à 9 192 631 770 Hz,
- la vitesse de la lumière dans le vide, c , est égale à 299 792 458 m/s,
- la constante de Planck, h , est égale à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s,
- la charge élémentaire, e , est égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C,
- la constante de Boltzmann, k , est égale à $1,380\,649 \times 10^{-23}$ J/K,
- la constante d'Avogadro, N_A , est égale à $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol⁻¹,
- l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd} , est égale à 683 lm/W,

où les unités hertz, joule, coulomb, lumen et watt, qui ont respectivement pour symbole Hz, J, C, lm et W, sont reliées aux unités seconde, mètre, kilogramme, ampère, kelvin, mole et candela, qui ont respectivement pour symbole s , m , kg , A , K , mol et cd , selon les relations $Hz = s^{-1}$, $J = kg\,m^2\,s^{-2}$, $C = A\,s$, $lm = cd\,sr$, et $W = kg\,m^2\,s^{-3}$.

La valeur numérique de chacune des sept constantes définissant le SI n'a pas d'incertitude.

2.1.1.2 Les unités de base du SI

Les unités de base sont rassemblées dans le tableau 0.1.

Toutes les autres unités du SI sont dérivées des unités de base : elles sont formées à partir de produits de puissances des unités de base.

Il existe aussi des unités en dehors du SI dont la valeur en unités SI est obtenue expérimentalement comme par exemple :

| Nom | Symbole | Valeur en unités SI |
|-------------------------------|---------|--|
| électronvolt | eV | $1\,eV = 1.60217733(49) \times 10^{-19}$ J |
| unité de masse atomique (uma) | u | $1\,u = 1.6605402(10) \times 10^{-27}$ kg |
| unité astronomique | ua | $1\,ua = 1.49597870691(30) \times 10^{11}$ m |

Tableau 0.1 : Unités SI de base

| Grandeur de base | | Unité de base | | |
|-----------------------------|-------------------------|---------------|---------|-----------|
| Nom | Symbole caractéristique | Nom | Symbole | Dimension |
| temps | t | seconde | s | T |
| longueur | $l, x, r, \text{etc.}$ | mètre | m | L |
| masse | m | kilogramme | kg | M |
| courant électrique | I, i | ampère | A | I |
| température thermodynamique | T | kelvin | K | Θ |
| quantité de matière | n | mole | mol | N |
| intensité lumineuse | I_v | candela | cd | J |

2.1.2 Dimension d'une grandeur

Les grandeurs physiques peuvent être organisées selon un système de dimensions qui a été décidé par convention. Chacune des sept grandeurs de base du SI est considérée avoir sa propre dimension. Les symboles utilisés pour les grandeurs de base et ceux utilisés pour indiquer leurs dimensions sont présentés aussi dans le tableau 0.1.

Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base au moyen des équations qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base. En général, la dimension d'une grandeur Q s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel,

$$\dim Q = T^\alpha L^\beta M^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta$$

où les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ et η , qui sont en général de petits nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, sont appelés exposants dimensionnels.

Il faudra faire attention et ne pas confondre dimensions et unités ; chaque dimension peut être exprimée par différentes unités.

Exemple : vitesse = ℓ/t ; dimension = LT^{-1} , les unités peuvent être km/h, m/s, miles/h, cm/ms.

L'analyse dimensionnelle nous amène à définir une propriété que toutes les équations physiques doivent remplir : l'homogénéité. Une équation se dit homogène quand les expressions des deux membres ont les mêmes dimensions. Cette condition d'homogénéité permet de :

- dériver les dimensions de grandeurs qu'on ne connaît pas ;
Exemple : dimensions de la pression : $p = \rho gh$: $[p] = [\rho][g][h] = ML^{-3}LT^{-2}L = ML^{-1}T^{-2}$
- conjecturer une loi physique : à partir des unités de la grandeur que l'on cherche, on admet l'existence d'une dépendance (la loi, entre cette grandeur et d'autres variables dont on connaît aussi les unités) ; la forme de la loi conjecturée se trouve en cherchant la relation homogène qui relie les unités de la

grandeur aux unités des variables. Cette technique de construction de loi s'appelle *l'analyse dimensionnelle*.

Si cette technique n'indique pas la loi véritable, puisqu'elle ne peut tenir compte de grandeurs qui n'ont pas de dimensions physiques et puisqu'on peut aussi se tromper sur les variables pertinentes, elle permettra par contre toujours d'identifier des lois fausses qui ne respectent pas les unités des grandeurs.

Exemple : On observe un phénomène : le balancement d'une masse attachée à un fil ; un pendule. Le pendule oscille parce qu'il tombe et qu'il est retenu par le fil. On désire trouver la loi qui relie la période (le temps d'aller-retour) τ aux paramètres que l'on devine importants : la longueur du fil L , l'accélération que tous les corps subissent quand on les laisse tomber g et la masse de l'objet M . Nous considérons comme non pertinents la viscosité de l'air, la masse du fil, la dimension de l'objet, la hauteur atteinte lors des oscillations,... ; ne vous trompez pas : il y a autant de physique dans l'exclusion de ce qui n'est pas pertinent que dans le maintien de ce qui l'est.

La période τ se mesure en seconde s , les autres grandeurs ont comme unité respective : M en kg , g en m/s^2 et L en m . L'homogénéité de la relation nous impose que :

$$[\tau] = [M]^a [g]^b [L]^c \rightarrow s = (kg)^a (m/s^2)^b (m)^c$$

En identifiant les puissances des unités, on trouve : comme il n'y a pas de "kg" à gauche de l'équation et qu'il y en a kg^a , on obtient $0 = a$. De même nous avons à gauche des "s" et s^{-2b} à droite. Donc nous avons $1 = -2b$. Enfin, il n'y a pas de "m" à droite alors qu'il y a m^{b+c} à gauche, cela donne $0 = b + c$. Ces trois équations ont une solution unique : $a = 0, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$ ce qui nous donne comme relation :

$$\tau \sim \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Cette loi, si le choix des paramètres est juste, nous informe que la période τ est proportionnelle à la racine carrée du rapport de la longueur L à l'accélération g et aussi que ce temps est indépendant de la masse M .

2.1.3 Préfixes

Les multiples et sous-multiples décimaux des unités SI peuvent être écrits en utilisant les préfixes SI listés dans le tableau 0.2.

Tableau 0.2 : Préfixe du SI

| Facteur | Nom | Symbole | Facteur | Nom | Symbole |
|-----------|--------|---------|------------|--------|---------|
| 10^{30} | ronna | R | 10^{-1} | déci | d |
| 10^{27} | quetta | Q | 10^{-2} | centi | c |
| 10^{24} | yotta | Y | 10^{-3} | milli | m |
| 10^{21} | zetta | Z | 10^{-6} | micro | μ |
| 10^{18} | exa | E | 10^{-9} | nano | n |
| 10^{15} | péta | P | 10^{-12} | pico | p |
| 10^{12} | téra | T | 10^{-15} | femto | f |
| 10^9 | giga | G | 10^{-18} | atto | a |
| 10^6 | méga | M | 10^{-21} | zepto | z |
| 10^3 | kilo | k | 10^{-24} | yocto | y |
| 10^2 | hecto | h | 10^{-27} | ronto | r |
| 10^1 | déca | da | 10^{-30} | quecto | q |

Exemples : la masse de la Terre est d'environ 5,97 Rg, la masse de l'électron est d'environ 0,911 rg.

2.2 Mesure d'une grandeur

L'observation d'un phénomène nécessite une information quantitative, i.e. nécessite la mesure d'une grandeur physique. Mesurer une grandeur implique une comparaison à une grandeur de référence de même nature prise par convention comme unité.

Le résultat d'une mesure doit contenir trois indications : l'unité de mesure, la valeur numérique (nombre d'unités) de la grandeur mesurée et la précision (incertitude).

2.2.1 Ordres de grandeur

Le résultat d'une mesure doit s'exprimer comme le produit d'un nombre compris entre 1 et 9 et d'une puissance (positive, nulle ou négative) de 10. L'ordre de grandeur est la puissance entière de 10 la plus proche de ce nombre.

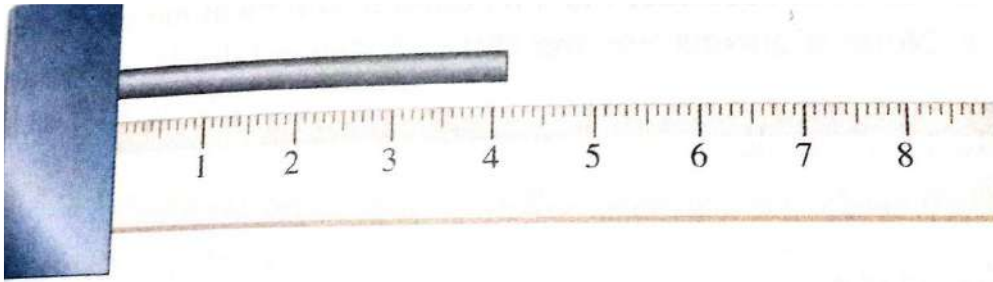
Exemples:

- $21 = 2,1 \times 10^1$ diffère de 1 ordre de grandeur de $163 = 1,63 \times 10^2$.
- $\pi = 3,1415926 \dots$ diffère de 34 ordres de grandeur de la constante de Planck $h = 6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34} \text{ J s}$.

2.2.2 Chiffres significatifs. Règle de troncature («arrondi»)

L'action de mesurer est très différente de celle de compter, bien que les deux relient des nombres à des grandeurs. Nous pouvons compter le nombre de billes dans un bocal et le connaître exactement, mais nous ne pouvons pas mesurer exactement la hauteur du bocal. La mesure exacte n'existe pas. En pratique, les mesures sont faites avec une certaine précision selon les besoins de l'expérimentateur (souvent liés à la précision des instruments disponibles).

Si la longueur d'une tige est comprise entre 4,1 et 4,2 cm, on peut l'estimer à 4,15 cm ; les chiffres 4 et 1 sont sûrs, mais la deuxième décimale n'est pas certaine et pourrait être 4, 5 ou 6. Un chiffre dans un nombre est **significatif** s'il est connu avec une fiabilité suffisante, comme le 4, le 1 et même le 5. Le nombre 4,15 contient 3 chiffres significatifs (tous les chiffres sont significatifs, le 5 est moins significatif).



Avec 3 chiffres significatifs, la longueur de la tige est 4,15 cm ou 41,5 mm ou 0,0415 m ou 0,0000415 km. Toutes ces façons d'écrire sont équivalentes et ont 3 chiffres significatifs. Donc déplacer la virgule et changer l'unité n'a aucun effet sur la précision du nombre. Les zéros à gauche indiquent seulement la position de la virgule ; ils ne peuvent pas être considérés comme des chiffres significatifs.

Le nombre 1000 possède quatre chiffres significatifs. **Les zéros à droite de la virgule sont aussi significatifs** que les autres chiffres. Si nous écrivons que la distance de la Terre au Soleil est 146 millions de km, écrire 146.000.000 km, avec neuf chiffres significatifs n'est évidemment pas adapté. Seuls les chiffres significatifs doivent être écrits et la position de la virgule doit être précisée en utilisant la notation scientifique : la distance de la Terre au Soleil doit être écrite $1,46 \times 10^{11}$ m ou 146×10^6 km ou $1,46 \times 10^8$ km et ainsi de suite.

Détermination des chiffres significatifs

Des calculs font souvent intervenir des quantités mesurées ; nous devons donc apprendre à manipuler les additions, soustractions, multiplications et divisions des chiffres significatifs.

Notre convention d'arrondi des décimales est la suivante : toute décimale supérieure ou égale au chiffre 5 est arrondie à la dizaine supérieure ; toute décimale inférieure au chiffre 5 est remplacée par zéro. L'avantage de cette règle simple est qu'il n'y a pas d'accumulation des erreurs d'arrondi sur un grand nombre d'opérations arithmétiques successives.

Ainsi le nombre 2,804953 sera arrondi successivement :

| | |
|---------------------------|-----------|
| à 5 décimales pour donner | 2,80495 ; |
| à 4 décimales pour donner | 2,8050 ; |
| à 3 | 2,805 ; |
| à 2 | 2,81 ; |
| à 1 décimale pour donner | 2,8 ; |
| à l'unité | 3. |

Ajoutons que d'autres auteurs ont d'autres conventions, mais il est fortement recommandé de toujours rester avec les mêmes conventions.

Le résultat d'une multiplication et/ou une division est arrondi de façon de n'avoir pas plus de chiffres significatifs que la quantité la moins précise utilisée dans le calcul. Cette règle équivaut à dire qu'aucun calcul ne peut améliorer la mesure. Par exemple, on peut utiliser le même instrument pour mesurer les côtés d'une plaque plane et trouver 0,91 et 1,51 m avec 2 et 3 chiffres significatifs. L'aire est alors $(0,91 \text{ m}) \times (1,51 \text{ m}) = 1,3741 \text{ m}^2$. D'après la règle, nous devons écrire $1,4 \text{ m}^2$, bien que l'incertitude soit contenue dans le chiffre 7, $1,37 \text{ m}^2$ est une meilleure réponse. Sans nous soucier de ces exceptions, nous devons toujours utiliser la règle.

Le résultat d'une addition et/ou une soustraction doit être arrondi de façon qu'il ait le même nombre de décimales (à droite de la virgule) que le terme qui en a le plus petit nombre de décimales.

Ainsi l'addition de 3 distances (mesurées avec des procédés différents) 25,664 m, 2,7 m et 0,15 m sera affectée d'une erreur dominée par la mesure la moins précise (2,7 m dans notre cas).

En suivant les règles de l'**arithmétique** (pour des nombres sans erreurs), on obtiendrait $25,664 + 2,7 + 0,15 = 28,514$ m.

En **Physique**, on tiendra compte du fait que les deux dernières décimales de la somme sont imprécises puisqu'un des termes de la somme n'est connu qu'avec deux chiffres significatifs : nous écrirons dès lors $25,7 + 2,7 + 0,2 = 28,6$ m en arrondissant les décimales au dixième le plus proche.

Indiquer 28,514 m comme résultat est **incorrect** d'une part et **malhonnête** d'autre part car cela laisse sous-entendre une précision des mesures que nous n'avons pas atteinte. Ceci équivaut à dire qu'aucun calcul ne peut améliorer la mesure.

3 Mesures et incertitudes

Comme déjà souligné, en physique il n'existe pas de procédé de mesure fournissant un résultat de mesure dépourvu d'incertitude.

Lorsque nous calculons telle ou telle quantité à partir d'une formule ou au départ d'observations, nous commettons des erreurs d'origines diverses :

- incertitude ou précision limitée de nos mesures ;
- usage de quantités irrationnelles telles que π , e ; $1/3$, $\sqrt{2}$, ... que nous introduisons dans les calculs avec un nombre limité de décimales, soit volontairement par souci de simplification, soit involontairement parce que nos outils de calcul (calculatrice, par ex.) sont limités.
Moyen mnémotechnique, un « piem », pour se rappeler des décimales du nombre π : *“Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages ! Immortel Archimède, artiste, ingénieur, Qui de ton jugement peut priser la valeur ?”*
- méthodes de calcul ou de résolution. Celles-ci sont souvent des méthodes approchées (calculs itératifs, évaluation d'intégrales, solutions numériques d'équation, etc.)

L'influence des erreurs sur les résultats permet de les classer en deux catégories qui reflètent la manière dont elles influencent un résultat de mesure ou un calcul :

3.1 Erreurs systématiques

Celles-ci proviennent souvent de défauts dans nos observations ou dans les instruments que nous utilisons. Ainsi une balance mal réglée (défaut d'horizontalité par ex.) donnera des indications systématiquement plus faibles (ou systématiquement plus élevées) que la masse exacte.

Les erreurs systématiques entachent toutes nos mesures d'une même quantité, de la même manière. On peut, en principe, les corriger, ou au moins les rendre négligeables.

3.2 Erreurs aléatoires (accidentelles)

On groupe sous ce vocable toutes les erreurs liées au caractère statistique de nos observations : si nous recommençons dix fois une mesure de longueur, nous obtiendrons des résultats présentant une certaine

dispersion. Ces erreurs vont se transmettre de calcul en calcul et peuvent affecter de manière considérable un résultat.

3.2.1 Calcul des erreurs maximales (bornes supérieures).

Nous désignerons par les lettres x, y, z, \dots les valeurs exactes de ces variables, tandis que les valeurs approchées correspondantes (estimations) seront affectées d'une astérisque x^*, y^*, z^*, \dots

Imaginons devoir calculer la valeur de la fonction $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ où les valeurs exactes des arguments sont inconnues.

Les quantités $\alpha_i = x_i - x_i^*$ seront appelées les **incertitudes absolues (imprécision)** sur les quantités x_i . Ces quantités α_i ne sont en général jamais connues, ni en grandeur, ni en signe ; tout au plus peut-on en donner une borne supérieure A_i .

Nous avons donc les inégalités $|\alpha_i| \leq A_i$ pour tout indice $1 \leq i \leq n$.

Nous introduisons l'**erreur relative maximale** sur x_i :

$$\Delta_i = \frac{A_i}{|x_i^*|}$$

Au premier ordre dans les incertitudes absolues sur les arguments, l'incertitude absolue sur la valeur de la fonction $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ sera obtenue par le développement de Mac-Laurin limité aux termes de premier ordre, c'est-à-dire aux termes de puissance 1 en les α_i .

$$\alpha_y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*}$$

Par l'arithmétique, nous savons que la valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de chaque terme :

$$|\alpha_y| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left| \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right|$$

Remplaçant chaque α_i par sa borne supérieure A_i , nous obtenons une borne supérieure A_y de la somme de droite, qui constitue aussi une borne supérieure de α_y :

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left| \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right| \leq \sum_{i=1}^n A_i \left| \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right| \text{ et donc}$$

$$A_y = \sum_{i=1}^n A_i \left| \left[\frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right|$$

L'erreur maximale est

$$\Delta_y = \frac{A_y}{|f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)|} = \sum_{i=1}^n A_i \left| \left[\frac{1}{f} \frac{df}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right| \text{ où encore } \Delta_y = \sum_{i=1}^n A_i \left| \left[\frac{d \ln(f)}{dx_i} \right]_{x=x^*} \right|$$

et en termes des erreurs relatives maximales sur les arguments

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \Delta_i \left| x_i \frac{d \ln(f)}{dx_i} \right|_{x=x^*}$$

Il est aisé de considérer quelques **cas particuliers** :

- **borne supérieure d'erreur sur une somme algébrique** $y = x_1 + x_2 - x_3 + \dots - x_n$.

Dans ce cas

$$\left| \frac{df}{dx_i} \right|_{x=x^*} = 1 \text{ et } \left| \frac{d \ln(f)}{dx_i} \right|_{x=x^*} = \frac{1}{y^*}$$

Et dès lors

$$A_y = \sum_{i=1}^n A_i$$

que l'on peut énoncer comme suit: «**la borne supérieure d'erreur sur une somme algébrique est la somme des erreurs absolues des termes**». Dans le langage courant si $Z = X \pm Y$, alors on note que $\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$, pour dire que l'incertitude absolue sur une somme algébrique est égale à la somme des incertitudes absolues des termes.

On peut aussi écrire ce résultat en fonction des erreurs relatives sur les arguments :

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{y^*} \Delta_i$$

Appelons M et m la plus grande et la plus petite des erreurs relatives Δ_i sur les arguments. Il vient aisément que

$$\Delta_y \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{y^*} m = m \text{ et } \Delta_y \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{y^*} M = M \text{ puisque } \sum_{i=1}^n x_i^* = y^*; m \leq \Delta_y \leq M$$

L'erreur relative maximale sur une somme algébrique est comprise entre la plus grande et la plus petite des erreurs relatives maximales sur les termes.

- **borne supérieure d'erreur sur un produit** $y = x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots$ ou sur un **quotient**

$$y = \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_j}{x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3} \dots x_n} \text{ (avec } 1 \leq j \leq n \text{)}.$$

Nous obtenons facilement par application de la formule générale

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{y}{x_i} \text{ et } \frac{d \ln(f)}{dx_i} = \frac{1}{x_i}$$

et donc

$$A_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{y^*}{x_i^*} \right| A_i \text{ et } \Delta_y = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

L'erreur relative maximale sur un produit ou un quotient est la somme des erreurs relatives sur chacun des termes. Dans certains ouvrages, l'incertitude relative est notée par

$$\delta = \frac{\Delta X}{X}, \text{ et donc } \delta(X \times Y) = \delta X + \delta Y, \text{ et } \delta\left(\frac{X}{Y}\right) = \delta X + \delta Y$$

3.2.2 Calcul des erreurs statistiques

Les sections précédentes développent une théorie de l'erreur maximale sur une fonction de plusieurs variables. Cette théorie est cependant rarement utile car les bornes ainsi obtenues sont trop larges pour rencontrer un quelconque intérêt pratique.

Imaginons mesurer une quantité physique x par n mesures indépendantes donnant les résultats $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. L'ensemble $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est appelé un **échantillon** de la quantité x . Ces résultats ne sont pas équivalents car certains d'entre eux se répéteront un plus grand nombre de fois que d'autres dans l'échantillon.

Si le résultat x_i se présente n_i fois dans l'échantillon de n mesures, nous associerons donc à chaque résultat x_i un nombre réel $p_i = n_i/n$ tel que $0 \leq p_i \leq 1$ avec :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ si } x \text{ est une variable discrète,}$$

$$\text{ou } \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) dx = 1 \text{ si } x \text{ est une variable continue variant entre } x_{\min} \text{ et } x_{\max}.$$

Le nombre p_i est appelé la **probabilité** du résultat x_i . On dira que x est une **variable aléatoire**.

1) La quantité $\mu_x = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ est appelée la **valeur moyenne** de la variable aléatoire x .

Cas particulier : si tous les résultats x_i sont équiprobables, $p_i = 1/n$ et la moyenne μ_x se réduit à une moyenne arithmétique.

2) Introduisons l'écart à la moyenne de chaque mesure $d_i = x_i - \mu_x$. L'écart type σ de l'échantillon est défini par :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu_x)^2$$

La quantité σ^2 est aussi appelée la **variance de l'échantillon**. Un cours de statistique introduira l'**écart-type σ_μ de la moyenne**, donné par :

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}$$

souvent appelé aussi l'erreur statistique de la variable x .

La quantité σ_μ^2 est appelé la **variance de la moyenne**.

Si tous les résultats sont équiprobables, on voit sans peine que

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2$$

Dans la majorité des cas, le scientifique effectue plusieurs mesures de la variable x . Il résumera l'ensemble des résultats en donnant des estimations de la moyenne μ_x et de l'écart-type σ_{μ} .

Il notera le résultat de sa mesure en écrivant : $x = \mu_x \pm \sigma_{\mu}$.

- **Erreur statistique sur une fonction** $z = f(x, y, \dots)$ de plusieurs variables aléatoires x, y, \dots (formule générale). Le cours de statistique démontrera de manière rigoureuse que la variance de la fonction z dépend des variances sur les variables x, y, \dots selon la relation suivante :

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \dots$$

- A titre d'exercice, on peut appliquer cette relation à des cas particuliers fréquemment rencontrés dans l'analyse des résultats expérimentaux. On y désigne systématiquement par σ_i l'écart-type sur la variable x_i .

| Fonction | Variance |
|---|--|
| $y = x_1 + x_2 - x_3 + \dots - x_n$ | $\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2$ |
| $y = x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n$ ou $y = \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_j}{x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3} \dots x_n}$ (avec $1 \leq j \leq n$) | $\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_1^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{x_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{x_3^2} + \dots + \frac{\sigma_n^2}{x_n^2}$ |
| $y = x^n$ | $\frac{\sigma_y^2}{y^2} = n \frac{\sigma_x^2}{x^2}$ |

4 Système de référence – Axes – Coordonnées

4.1 Système à une dimension

Pour repérer la position d'un point A sur une ligne (ou axe, qui n'est pas nécessairement rectiligne), le plus simple est de choisir un point O, dit **origine**, et un **sens** (positif) de parcours sur la ligne ; puis de mesurer la distance x entre l'origine O et le point A le long de la ligne. La quantité x ou coordonnée du point A sera positive ou négative selon que la position de A par rapport à O se trouve dans le sens de parcours ou à l'opposé (voir figure 1).

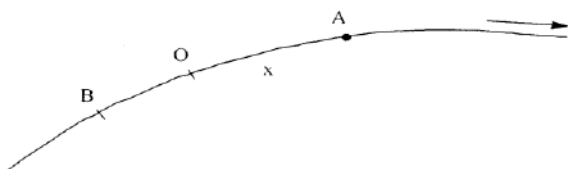


Figure 1 : système à une dimension

En résumé, le long de l'axe (1 dimension), nous avons défini :

- une origine O
- un sens de parcours.

La connaissance de la distance x suffit pour définir univoquement la position du point A.

4.2 Système à deux dimensions

S'il s'agit de repérer un point A dans un plan (2 dimensions), nous définirons de manière analogue au cas précédent :

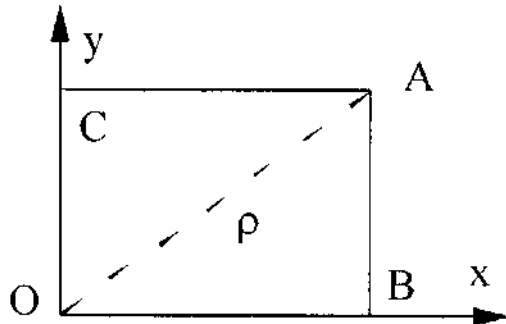


Figure 2 : coordonnées cartésiennes

- une origine 0
- deux axes (un axe par dimension) et leurs sens positifs, qui constituent le système de référence, ou système d'axes de coordonnées.

Il y a deux manières de déterminer la position du point A dans le plan :

- en **coordonnées cartésiennes**

Les deux axes sont perpendiculaires entre eux et l'on donne les distances $OB = x$ et $OC = y$ entre le point A et les axes (obtenues par projections parallèles aux axes).

x et y sont appelées les coordonnées cartésiennes du point A (figure 2). La distance ρ entre O et A s'écrit

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- en **coordonnées polaires (planes)**

On trace le segment de droite OA. La position du point A est repérée par la longueur ρ du segment OA et par l'angle ϕ entre OA et l'un des axes (OX par exemple) (voir figure 3).

ρ et ϕ sont appelées les coordonnées polaires planes du point A.

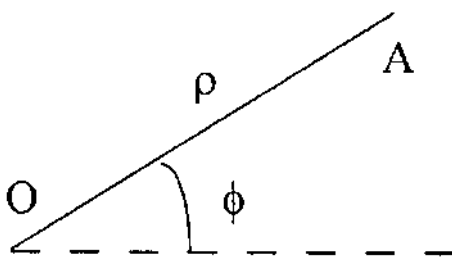


Figure 3 : coordonnées polaires

4.3 Systèmes à trois dimensions

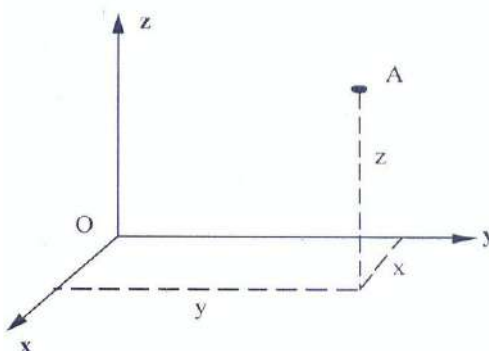


Figure 4: coordonnées cartésiennes

La généralisation de ce qui précède à trois dimensions (ou plus) ne présente pas de difficulté majeure. Il suffit de se choisir une origine O et un système d'axes orientés. Plusieurs types de coordonnées peuvent être définis, le choix étant souvent dicté par la nature ou les symétries du problème étudié. Nous n'indiquons ici que les systèmes les plus fréquemment rencontrés.

- **Coordonnées cartésiennes**

Trois axes perpendiculaires deux à deux. Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) du point A sont les distances entre A et chacun des 3 plans définis par les axes (OY,OZ) , (OZ,OX) et (OX,OY) respectivement. On obtient aussi (x,y,z) par projections parallèles aux trois axes (voir figure 4).

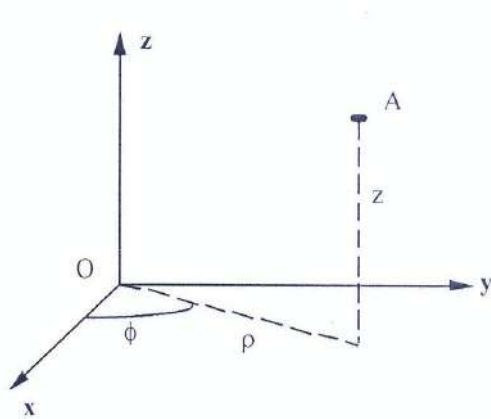


Figure 5: coordonnées cylindriques

La distance $OA = r$ est donnée par la somme quadratique

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Applications : levée de terrain, plans de pièces mécaniques, ...

- **Coordonnées cylindriques**

La position du point A est repérée, d'une part par la coordonnée cartésienne z (hauteur au-dessus du plan XOY), et d'autre part, par deux coordonnées polaires planes (ρ, ϕ) dans ce plan xOy.

Les quantités (ρ, ϕ, z) sont les coordonnées cylindriques du point A (voir figure 5).

- **Coordonnées polaires sphériques**

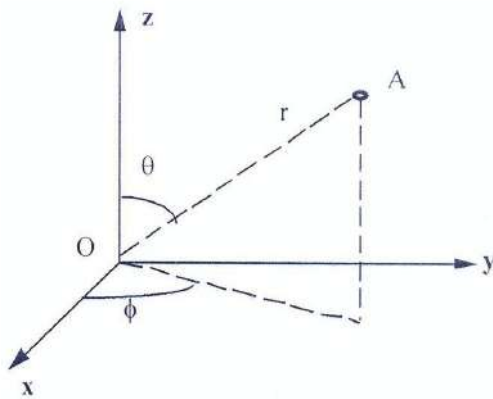


Figure 6: coordonnées sphériques

La position du point A est donnée par sa distance à l'origine O, l'angle ϕ entre la projection du segment OA sur le plan XOY et l'axe OX, et l'angle θ entre ce même segment avec l'axe Oz.

Les quantités (r, θ, ϕ) sont les coordonnées polaires sphériques du point A (voir figure 6).

Applications :

- position à la surface du globe terrestre (supposé sphérique) ; latitude et longitude.
- Repérage d'étoiles dans le ciel ; ascension droite et déclinaison.

Tableau 0.3 : Transitions entre systèmes de référence à trois dimensions.

| Système initial | Système final | | |
|------------------------------------|---|--|---|
| | Cartésien (x, y, z) | Cylindrique (ρ, ϕ, z) | Polaire sphérique (r, θ, ϕ) |
| Cartésien (x, y, z) | | $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\text{tg } \phi = \frac{y}{x}$ | $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\text{tg } \phi = \frac{y}{x}$ $\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ |
| Cylindrique (ρ, ϕ, z) | $x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ | | $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\text{tg } \theta = \frac{\rho}{z}$ |
| Sphérique (r, θ, ϕ) | $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$ | $\rho = r \sin \theta$ $z = r \cos \theta$ | |

Le tableau 0.3 donne les formules de transition entre ces trois systèmes de coordonnées. Leur démonstration est élémentaire.

5 Vecteurs et scalaires

Contrairement à la mesure des longueurs, pour spécifier univoquement un déplacement, il nous faut donner plus que la seule distance entre la position initiale et la position finale. Nous devons indiquer :

- une origine (p.ex. la position initiale ou les coordonnées d'un point) ;
- une valeur (p.ex. la distance parcourue) ;
- la direction (la droite le long de laquelle s'effectue le déplacement) ;
- le sens (vers quelle extrémité de la droite s'effectue le déplacement).

L'ensemble de ces quatre « paramètres » définit un vecteur. Le déplacement est un **vecteur** ou grandeur dirigée, par opposition à la simple mesure d'une longueur. Nous parlerons dans ce dernier cas d'un **scalaire**. La notion de vecteur est beaucoup plus large que l'exemple du déplacement évoqué ci-dessus.

Exemples :

- scalaires : longueur, intervalle de temps, masses, volumes, température,
- vecteurs : déplacement, forces, vitesse, accélération, quantité de mouvement, moment de force, moment cinétique, ...

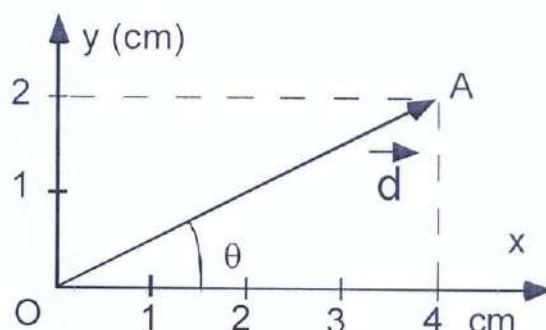


Figure 7

Sur la figure 7, le déplacement d'un mobile de O en A est défini par :

- la distance $d = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47 \text{ cm}$;
- la direction OA, repérée par l'angle θ avec l'axe des OX : $\text{tg } \theta = 2/4$;
- le sens de parcours indiqué par la flèche ;
- l'origine O du vecteur.

On représente graphiquement les vecteurs par un segment de droite, dont la direction et le sens sont indiqués par une flèche de longueur proportionnelle à la grandeur.

Un vecteur sera toujours noté par un symbole surmonté d'une flèche, pour le distinguer d'un scalaire : ainsi, le déplacement sera noté \vec{d} et sa longueur s'écrira $d = |\vec{d}|$.

Un vecteur-unité \vec{u} (des fois on préfère le noter par $\vec{1}$) est un vecteur de grandeur égale à l'unité et nous écrirons pour tout vecteur \vec{d} parallèle au vecteur-unité $\vec{d} = d\vec{u}$ (ou $\vec{d} = d\vec{1}$).

Autrement dit, multiplier un vecteur \vec{u} par un scalaire d revient à multiplier sa longueur par d sans changer la direction. Nous verrons plus loin que le sens de \vec{d} est le même que (l'opposé de) \vec{u} si le scalaire d est positif (négatif).

Le vecteur opposé à un vecteur \vec{d} est un vecteur qui a même grandeur, direction et point d'application, mais qui possède un sens opposé au vecteur \vec{d} . Le vecteur opposé à \vec{d} sera également noté $-\vec{d}$.

On peut définir les opérations entre vecteurs.

5.1 Addition vectorielle

L'addition de deux vecteurs est aisée à comprendre en termes de déplacements. Un mobile effectuant deux déplacements successifs AB et BC, représentés par les vecteurs \vec{d}_1 et \vec{d}_2 se retrouve en un point C, qu'il aurait pu atteindre en une étape unique, représentée par le vecteur \vec{d} . On écrira $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$ (figure 9).

Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une simple addition algébrique des longueurs $d = d_1 + d_2$, car chaque quantité est une grandeur dirigée.

L'addition vectorielle est commutative et distributive comme l'addition algébrique. La longueur du vecteur somme \vec{d} est

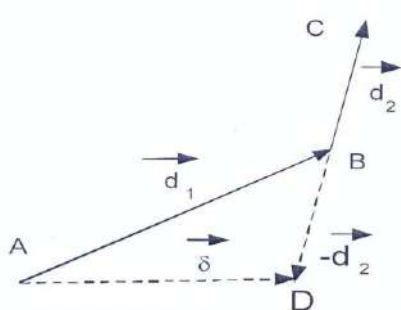


Figure 9 : différence vectorielle

donnée par $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \theta}$

En effet sur base du dessin de la figure 10 on a :

$$BD = d_2 \cos \theta ; DC = d_2 \sin \theta ;$$

$$d^2 = (AD)^2 + (DC)^2 \text{ et dès lors}$$

$$d^2 = (d_1 + d_2 \cos \theta)^2 + (d_2 \sin \theta)^2$$

$$= d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \theta$$

La direction α du vecteur-somme \vec{d} par rapport au vecteur

\vec{d}_1 s'obtient comme suit :

$$\text{tg } \alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{d_2 \sin \theta}{d_1 + d_2 \cos \theta}$$

On définit la **différence** vectorielle $\vec{\delta}$ de deux vecteurs \vec{d}_1 et \vec{d}_2 en ajoutant à \vec{d}_1 l'opposé de \vec{d}_2 , c'est-à-dire un vecteur de même grandeur que \vec{d}_2 mais de sens opposé (voir figure 9), et on écrit formellement :

$$\vec{\delta} = \vec{d}_1 + (-\vec{d}_2) = \vec{d}_1 - \vec{d}_2$$

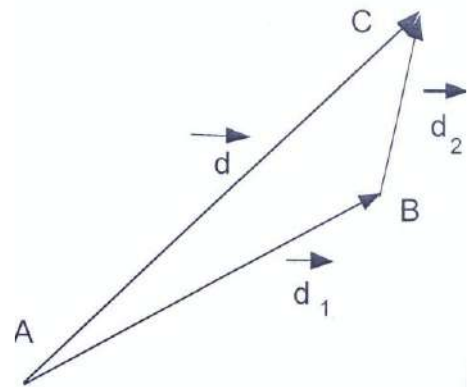


Figure 8 : addition vectorielle

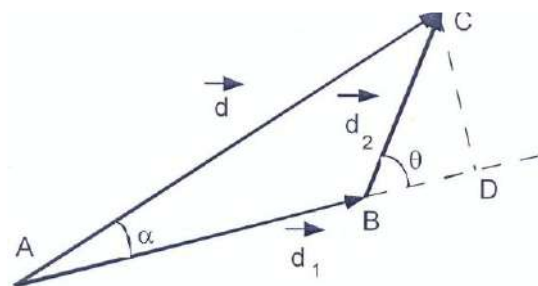


Figure 10

5.2 Composantes d'un vecteur

De la même manière que tout nombre a peut être décomposé d'une infinité de manières en une somme de deux autres nombres x et y , tout vecteur \vec{d} peut être considéré comme la somme de plusieurs vecteurs \vec{d}_i appelés les **composantes** de \vec{d} . Dans un système de référence cartésien, les grandeurs des composantes sont les projections de \vec{d} sur chacun des axes de coordonnées.

Ainsi dans un plan $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$, où les vecteurs \vec{d}_i sont perpendiculaires entre eux.

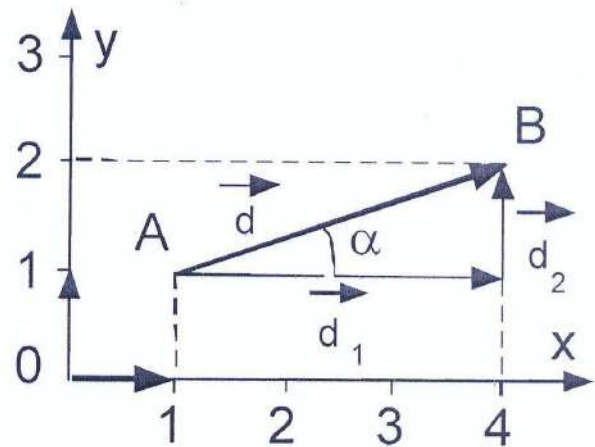


Figure 11

En termes des vecteurs unités \vec{u}_i alignés le long des axes nous écrivons aussi $\vec{d} = d_1\vec{u}_1 + d_2\vec{u}_2$ ou

encore en fonction de l'angle α entre \vec{d} et Ox,

$$d_1 = d \cos \alpha ; d_2 = d \sin \alpha ;$$

$$\vec{d} = d(\vec{u}_1 \cos \alpha + \vec{u}_2 \sin \alpha)$$

On vérifie aussi aisément que la longueur d du vecteur \vec{d} est liée à la somme des carrés de ses composantes $d^2 = d_1^2 + d_2^2$.

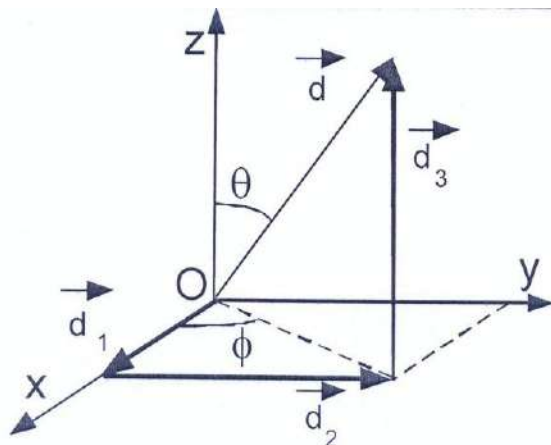


Figure 12

L'extension à 3 dimensions est immédiate pour un système cartésien : $\vec{d} = d_1\vec{u}_1 + d_2\vec{u}_2 + d_3\vec{u}_3$

et les composantes s'expriment aisément aussi en coordonnées sphériques (voir figure 12) :

$$d_1 = d \sin \theta \cos \phi ; d_2 = d \sin \theta \sin \phi ; d_3 = d \cos \theta ,$$

où θ et ϕ spécifient l'orientation spatiale du vecteur \vec{d} par rapport aux axes.

$$\text{On a aussi } d^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

5.3 Produits de deux vecteurs

Il existe deux opérations distinctes de produit entre vecteurs \vec{d}_1 et \vec{d}_2 .

5.3.1 Produit scalaire p

Le produit scalaire est un **nombre** (scalaire) p égal au produit algébrique de deux quantités: la longueur de l'un des vecteurs par la projection de l'autre sur lui (figure 13).

$$p = d_1 \cdot OA$$

Formellement, l'opération « produit scalaire » se représente par un **point** entre les deux facteurs :

$$p = \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$$

On écrira $p = \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = d_1 d_2 \cos \alpha$

On vérifie sans peine que le produit scalaire est une opération distributive pour l'addition de vecteurs ; c'est aussi une opération commutative.

Cas particuliers :

- Si \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont parallèles, le produit scalaire est le produit algébrique des deux grandeurs d_1 et d_2 .
- Si \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont perpendiculaires, le produit scalaire est nul.

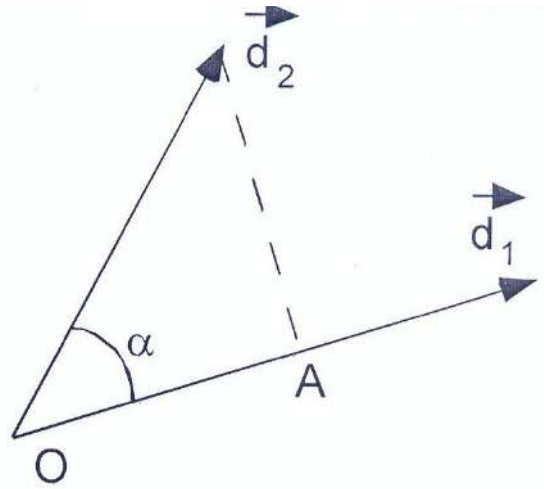


Figure 13

5.3.2 Produit vectoriel \vec{P}

Le produit vectoriel \vec{P} de deux vecteurs \vec{d}_1 et \vec{d}_2 est un **vecteur**, défini par les attributs suivants (figure 14) :

- direction : perpendiculaire au plan défini par \vec{d}_1 et \vec{d}_2 ;
- sens : sens d'enfoncement d'une vis droite dont la rotation appliquerait le premier facteur \vec{d}_1 sur le deuxième \vec{d}_2 ;
- grandeur : égale à $d_1 d_2 \sin \alpha$.

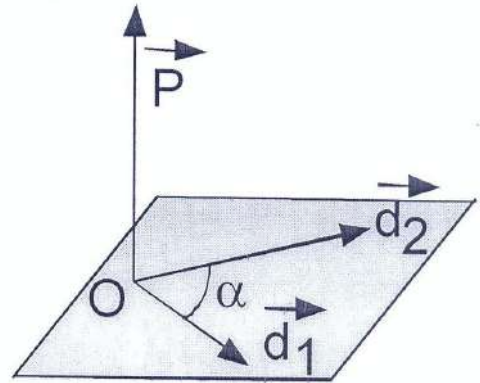


Figure 14

Formellement, l'opération « produit vectoriel » se représente par une **croix** (\times) ou le symbole \wedge entre les deux facteurs. Ainsi on écrira :

$$\vec{P} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \text{ ou encore } \vec{P} = \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2.$$

On vérifie sans peine, sur base de la définition, les propriétés suivantes du produit vectoriel :

- la grandeur du produit vectoriel est égale à $P = |\vec{P}| = d_1 d_2 \sin \alpha$,
- distributivité pour l'addition vectorielle,
- anticommutativité, c'est-à-dire que le vecteur-produit change de sens en permutant l'ordre des facteurs, mais il garde mêmes direction et grandeur.

On remarque que la quantité P représente la surface du parallélogramme construit sur les deux vecteurs (figure 15).

$$P = OC \cdot AB = d_1 d_2 \sin \alpha$$

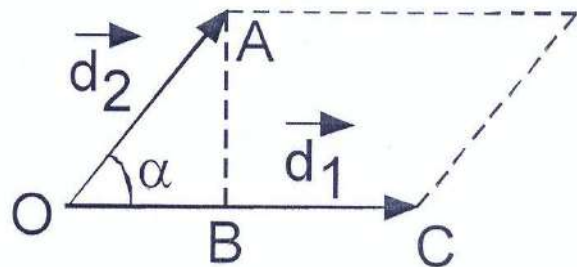


Figure 15

Cas particuliers :

- Si \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont parallèles ou antiparallèles, le vecteur-produit \vec{P} est un vecteur de grandeur nulle.

- ii) Si \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont perpendiculaires, la grandeur du vecteur-produit \vec{P} est égale au produit algébrique $d_1 d_2$ **au signe près**, selon l'ordre des facteurs.

5.3.3 Algèbre vectorielle à partir des composantes

Il est extrêmement fréquent d'avoir à effectuer des opérations vectorielles entre vecteurs dont on ne connaît que les composantes cartésiennes. Les définitions qui précèdent ne sont pas immédiatement applicables : ainsi pour le produit scalaire, par exemple, il faudrait calculer au préalable les grandeurs des deux facteurs et l'angle entre eux.

On peut toutefois éviter cette étape en exploitant la distributivité et les cas particuliers évoqués ci-dessus et appliqués aux vecteurs-unités.

Si nous appelons (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) respectivement les composantes des vecteurs \vec{a} et \vec{b} , nous pouvons écrire $\vec{a} = a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y + a_z \vec{1}_z$ et $\vec{b} = b_x \vec{1}_x + b_y \vec{1}_y + b_z \vec{1}_z$.

- Pour l'addition vectorielle, nous regroupons les termes relatifs à un même vecteur-unité pour obtenir les composantes du vecteur somme $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.
- Pour le produit scalaire, la distributivité fait apparaître des produits scalaires entre les vecteurs-unités qui sont soit nuls, soit égaux à l'unité. Il reste alors $p = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- Pour le produit vectoriel, la distributivité fait apparaître des produits vectoriels entre vecteurs-unités qui sont, soit de grandeur nulle, soit parallèle ou antiparallèle à l'un des vecteurs-unités :

Ainsi, $\vec{1}_x \wedge \vec{1}_x = \vec{1}_y \wedge \vec{1}_y = \vec{1}_z \wedge \vec{1}_z = 0$ et par la règle du tire-bouchon (ou de la vis droite),

$$\vec{1}_x \wedge \vec{1}_y = -\vec{1}_y \wedge \vec{1}_x = \vec{1}_z$$

$$\vec{1}_y \wedge \vec{1}_z = -\vec{1}_z \wedge \vec{1}_y = \vec{1}_x$$

$$\vec{1}_z \wedge \vec{1}_x = -\vec{1}_x \wedge \vec{1}_z = \vec{1}_y$$

Après simplification, il reste les composantes cartésiennes du vecteur-produit

$$(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Pour mémoriser ce résultat, il est plus simple de retenir que les composantes sont les mineurs de la première ligne d'une matrice (3 lignes et 3 colonnes) construite avec les vecteurs-unités et les composantes des facteurs du produit.

$$\begin{pmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

6 Alphabet grec

L'alphabet grec est systématiquement employé dans toutes les disciplines des sciences exactes. Il est indispensable d'en connaître tous les symboles et leur prononciation.

| Majuscule | Minuscule | Prononciation | Majuscule | Minuscule | Prononciation |
|-----------|-----------|---------------|-----------|-----------|---------------|
| A | α | Alpha | Ν | ν | Nu |
| B | β | Bêta | Ξ | ξ | Xi |
| Γ | γ | Gamma | Ο | ο | Omicron |
| Δ | δ | Delta | Π | π | Pi |
| E | ε | Epsilon | Ρ | ρ | Rhô |
| Z | ζ | Zêta | Σ | σ | Sigma |
| H | η | Eta | Τ | τ | Tau |
| Θ | θ | Thêta | Υ | υ | Upsilon |
| I | ι | Iota | Φ | φ, ϕ | Phi |
| K | κ | Kappa | Χ | χ | Khi |
| Λ | λ | Lambda | Ψ | ψ | Psi |
| M | μ | Mu | Ω | ω | Oméga |

1 CHAPITRE I : CINEMATIQUE D'UNE PARTICULE

1.1 Introduction

La plupart des objets étudiés par les physiciens sont en mouvement : depuis les particules élémentaires telles que les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes, jusqu'aux galaxies, en passant par les objets usuels et les corps célestes. On ne peut espérer bien comprendre comment fonctionne la nature que si l'on est capable de définir clairement le mouvement et de le mesurer. La branche de la physique qui **étudie les mouvements s'appelle la mécanique**.

L'étude de la mécanique se subdivise en **cinématique et dynamique**. La cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement. La dynamique, par contre, s'intéresse à ces causes : les forces. Elle relie les forces au mouvement.

Nous limiterons notre étude de la mécanique à l'étude du mouvement des particules (points matériels). Par définition un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. Bien entendu, dans la plupart des cas, il s'agit d'une simplification, les objets réels occupant généralement un certain espace. Néanmoins, ce concept est utile dans bon nombre de situations réelles où on ne s'intéresse pas aux rotations de l'objet sur lui-même ou lorsque les dimensions de l'objet peuvent être négligées. C'est notamment le cas des charges électriques en mouvement dans un circuit électrique.

On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps (voir figure I.1).

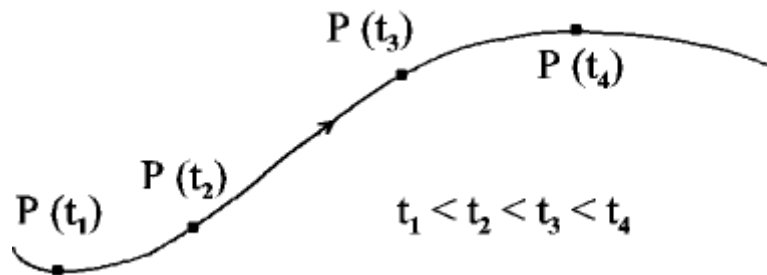


Figure I.1.

1.2 Cinématique à 1 dimension

C'est le cas particulier de la trajectoire rectiligne.

1.2.1 Repérage du mobile

Le mobile est repéré par une coordonnée cartésienne $x(t)$ sur un axe OX qui coïncide avec la trajectoire (ou qui lui est parallèle). Ceci implique le choix d'une origine, d'un sens et d'une unité de mesure de longueur (voir figure I.2).

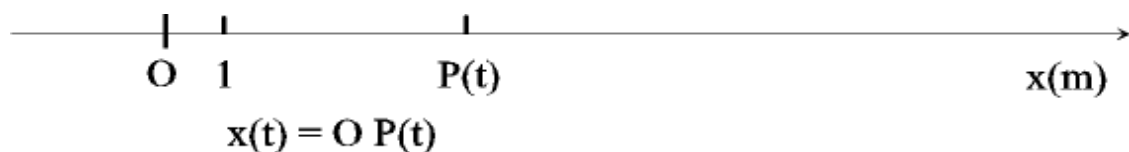


Figure I.2.

1.2.2 Vitesse moyenne

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps. Soit deux positions du mobile P_1 et P_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$\mathbf{v}_m(t_1, t_2) \equiv \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \quad (*)$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des points P_1 et P_2 . Δx est le déplacement du mobile pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Remarques :

- 1) A la fois Δx et v_m ont un signe : ils seront tous deux positifs si le mobile se déplace dans le sens de l'axe OX, négatifs dans le cas contraire ;
- 2) Sauf dans le cas d'un mouvement à vitesse constante, v_m dépend du choix de t_1 et de t_2 .

1.2.3 Vitesse instantanée

Etant donnée la remarque 2) ci-dessus, la vitesse moyenne ne peut servir à caractériser la vitesse d'un mobile à un instant donné, t . En effet, $v_m(t_1, t_2)$ dépend en général de t_2 . Cette grandeur caractérise d'autant mieux la manière dont le mobile se déplace à l'instant t que l'intervalle $\Delta t = t_2 - t_1$ est petit. Dès lors on définit la vitesse instantanée à l'instant t par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \end{aligned}$$

La vitesse instantanée d'un point matériel est la dérivée de sa coordonnée spatiale x par rapport au temps t , à l'instant considéré^(*) :

$$\boxed{\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}} \quad (1.1)$$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'} \quad (1.2)$$

Ceci implique la connaissance de la position du mobile à un instant donné t_0 , soit : $x(t_0)$.

(*) Le symbole \equiv signifie "est défini par"

(*) Pour alléger la notation, nous omettons d'indiquer explicitement la dépendance en t des variables cinématiques lorsque ce n'est pas indispensable à la compréhension : $x = x(t)$, $v = v(t)$, etc.

1.2.4 Accélération

L'accélération d'un mobile caractérise la variation de sa vitesse au cours du temps. Procédant comme pour la vitesse, on définit l'accélération à un instant t donné par :

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$$

L'accélération instantanée d'un mobile est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, à l'instant considéré :

$$a \equiv \frac{dv}{dt} \quad (1.3)$$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération, on calcule l'intégrale :

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (1.4)$$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à un instant donné t_0 , soit : $v(t_0)$.

1.2.5 Cas particuliers de mouvement rectiligne : le MRU et le MRUA

1.2.5.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Le MRU est un mouvement rectiligne à vitesse constante :

$$v(t) = v_0 \quad (1.5)$$

Par conséquent :

- $a = \frac{dv_0}{dt} \xrightarrow{\text{(en dérivant)}} a = 0 \quad (1.6)$

- $\frac{dx}{dt} = v_0 \xrightarrow{\text{(en intégrant)}} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_0 dt' \Rightarrow$

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0), \text{ pour le MRU,} \quad (1.7)$$

où $x_0 \equiv x(t_0)$. C'est une équation, représentée par une droite (voir figure I.3).

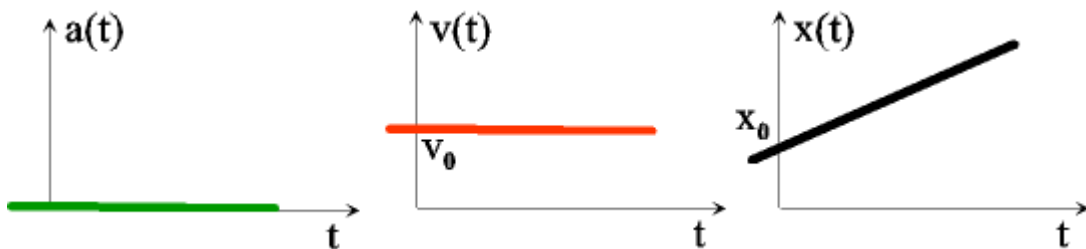


Figure I.3.

1.2.5.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Le MRUA est un mouvement rectiligne à accélération constante :

$$\boxed{a = a_0} \quad (1.8)$$

Par conséquent :

- $\frac{dv}{dt} = a_0 \xrightarrow{\text{(en intégrant)}} v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a_0 dt' \Rightarrow$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0), \text{ pour le MRUA,}} \quad (1.9)$$

où $v_0 \equiv v(t_0)$.

- $\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \xrightarrow{\text{(en intégrant)}}$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a_0(t' - t_0)] dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2, \text{ pour le MRUA}} \quad (1.10)$$

La fonction $x(t)$ est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole (voir figure I.4).

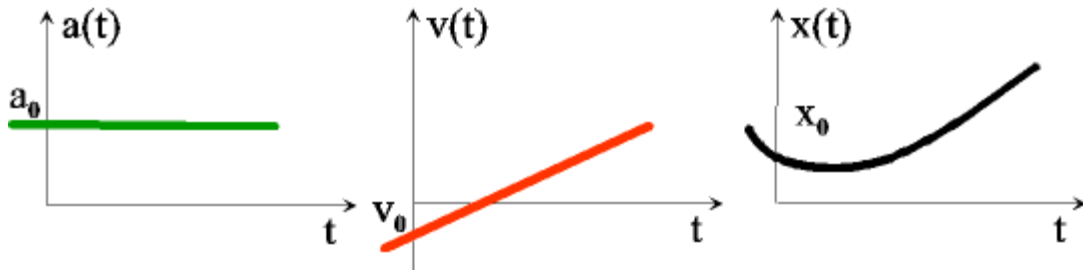


Figure I.4.

En éliminant $t - t_0$ entre les relations (I.9) et (I.10), on trouve la relation entre la variation de vitesse et le déplacement, valable uniquement pour le MRUA :

$$(1.9) \Rightarrow t - t_0 = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans (I.10): } x - x_0 &= v_0 \frac{v - v_0}{a_0} + \frac{1}{2} a_0 \frac{(v - v_0)^2}{a_0^2} \\ &= \frac{1}{2a_0} (v^2 - v_0^2) \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0 (x - x_0), \text{ pour le MRUA}} \quad (1.11)$

1.2.6 Unités

L'unité de longueur du système international d'unités (S.I.) est le mètre (m), celle du temps, la seconde (s). Par conséquent, dans le SI, les vitesses se mesurent en mètre par seconde (m/s) et les accélérations en mètre par seconde au carré (m/s²).

1.3 Cinématique à plusieurs dimensions

1.3.1 Repérage du mobile

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace à 3 dimensions ou dans un plan, la position du mobile est entièrement déterminée par son vecteur-position à chaque instant t : $\vec{r}(t)$.

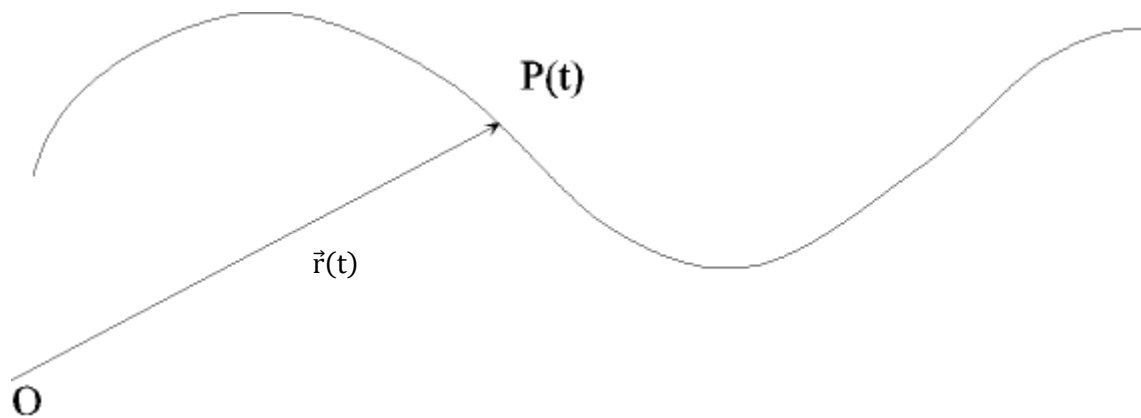


Figure 1.5.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$$

Ceci implique le choix d'une origine O. Dans un référentiel Oxyz, le vecteur-position peut s'exprimer en fonction de ses coordonnées cartésiennes : x, y et z.

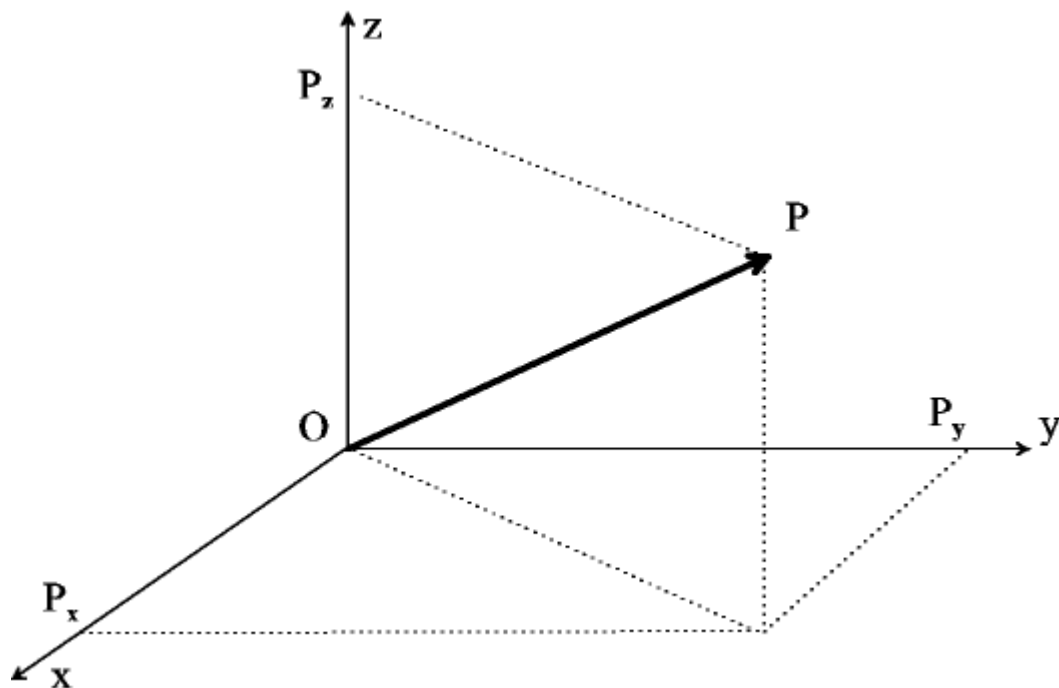


Figure 1.6.

Le vecteur-position \vec{r} s'écrit en fonction de ses coordonnées :

$$\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z \quad (I.12)$$

où $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$ sont des vecteurs de longueur unité dirigés suivant les axes Ox, Oy et Oz.

$$x = OP_x \quad y = OP_y \quad z = OP_z$$

où P_x , P_y et P_z sont respectivement les projections du point P sur les axes Ox, Oy et Oz.

1.3.2 Vitesse instantanée

Tout naturellement, on généralise la notion de vitesse instantanée vue dans le cas à une dimension, de la manière suivante :

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

où $\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ est le vecteur déplacement entre les instants t et t + Δt.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \quad (I.13)$$

La vitesse instantanée est donc un vecteur qui est la dérivée du vecteur-position par rapport au temps.

Le vecteur \vec{v} peut s'écrire en fonction de ses coordonnées dans le référentiel Oxyz, soit v_x , v_y , et v_z :

$$\vec{v} = v_x\vec{1}_x + v_y\vec{1}_y + v_z\vec{1}_z \quad (I.14)$$

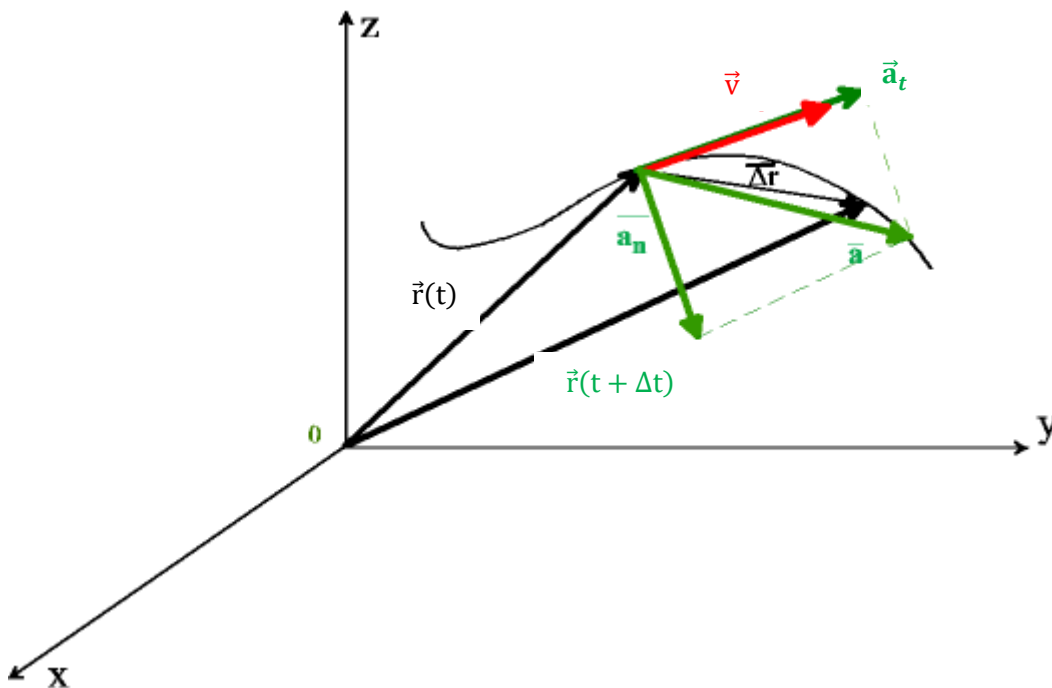


Figure I.7.

D'après (I.12) et (I.13), nous avons :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} [x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z] = \frac{dx}{dt}\vec{1}_x + \frac{dy}{dt}\vec{1}_y + \frac{dz}{dt}\vec{1}_z$$

car les vecteurs unité $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$ sont constants. Dès lors, en identifiant à (I.14),

il vient :

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (\text{I.15})$$

A la limite où Δt tend vers zéro, le vecteur $\Delta\vec{r}$ tend vers un vecteur tangent à la trajectoire (voir figure I.7). Le vecteur-vitesse est donc toujours tangent à la trajectoire. On peut donc l'écrire :

$$\vec{v} = v\vec{1}_t \quad (\text{I.16})$$

où $\vec{1}_t$ est un vecteur unité tangent à la trajectoire au point considéré, v est le module du vecteur \vec{v} . Il est donc donné par :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

1.3.3 Accélération instantanée

L'accélération instantanée s'obtient de manière analogue :

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ est la variation de vitesse entre les instants t et $t + \Delta t$.

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{I.17})$$

L'accélération instantanée est donc un vecteur qui est la dérivée par rapport au temps du vecteur-vitesse. Le vecteur \vec{a} peut s'écrire en fonction de ses coordonnées dans le référentiel Oxyz, soit a_x , a_y , et a_z :

$$\vec{a} = a_x\vec{1}_x + a_y\vec{1}_y + a_z\vec{1}_z \quad (\text{I.18})$$

D'après (I.14) et (I.17), nous avons :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [v_x\vec{1}_x + v_y\vec{1}_y + v_z\vec{1}_z] = \frac{dv_x}{dt}\vec{1}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{1}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{1}_z$$

En comparant à (I.18) et en tenant compte de (I.15), on obtient :

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}} \quad (\text{I.19})$$

Pour voir quelle est la direction du vecteur-accélération, il faut dériver l'expression (I.16) :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [v \vec{1}_t] = \frac{dv}{dt} \vec{1}_t + v \frac{d\vec{1}_t}{dt} \quad (I.20)$$

En effet, le vecteur-unité $\vec{1}_t$ n'est pas constant. Lorsque le mobile se déplace le long de sa trajectoire, le vecteur $\vec{1}_t$, toujours tangent à la trajectoire, change de direction, sauf si la trajectoire est rectiligne, auquel cas ce deuxième terme s'annule et l'accélération est elle aussi tangente à la trajectoire. On peut montrer que dans le cas général, le deuxième terme de l'expression ci-dessus est normal à la trajectoire :

$$\vec{a} = a_t \vec{1}_t + a_n \vec{1}_n \quad (I.21)$$

où l'accélération tangentielle, $a_t = \frac{dv}{dt}$, est due à la variation du module du vecteur-vitesse et l'accélération normale a_n est due au changement de direction de \vec{v} , autrement dit à la courbure de la trajectoire ; le vecteur $\vec{1}_n$ est un vecteur unité perpendiculaire à la trajectoire (voir figure I.8).

1.3.4 Cas particulier du mouvement circulaire uniforme (MCU)

Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan Oxy ; la circonférence a un rayon R et est centrée sur l'origine des axes O. Dans ce cas il est plus commode de travailler avec des coordonnées polaires ρ et φ , plutôt qu'avec des coordonnées cartésiennes.

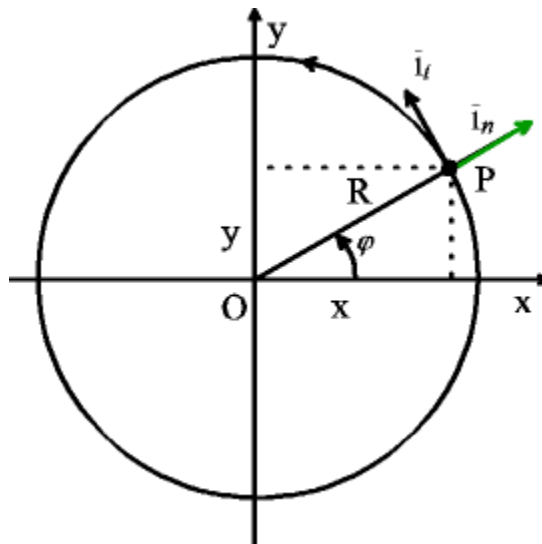


Figure I.8.

La coordonnée radiale ρ est la distance du point P à l'origine O et φ est l'angle azimutal. Il se mesure depuis l'axe Ox, dans le sens trigonométrique (voir figure I.8). Dans le SI, les angles sont mesurés en radian (rad). Cette unité est définie comme le rapport de l'arc de circonférence s , intercepté par l'angle au centre φ , divisé par le rayon de la circonférence (voir figure I.9) :

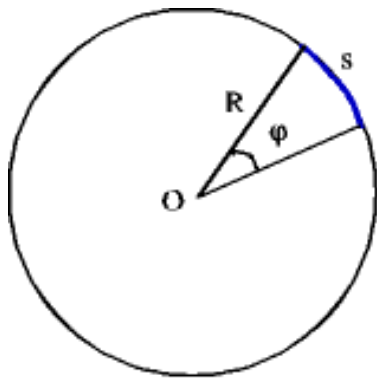


Figure 1.9.

$$\boxed{\varphi[\text{rad}] \equiv \frac{s}{R}} \quad (1.22)$$

d'où l'on déduit :

$$s = R\varphi, \text{ à condition que } \varphi \text{ soit mesuré en radian.}$$

Le radian étant un rapport de deux longueurs, il n'a pas de dimensions.

Les relations entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes peuvent être établies aisément à partir des relations trigonométriques du triangle rectangle (voir figure 1.8) :

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (1.23)$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de centre O, $\rho = R$ est constant et la seule coordonnée qui varie dans le temps est l'angle φ ; c'est elle qui détermine la position du point P à tout instant.

Pour trouver l'expression de la vitesse dans un mouvement circulaire, faisons appel à la définition de celle-ci (voir section 1.3.2) :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ou en considérant seulement le module des vecteurs : $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$.

A la limite où $\Delta t \rightarrow 0$, la longueur de la corde Δr tend vers la longueur de l'arc de circonférence Δs , intercepté par l'angle $\Delta \varphi$ (voir figure 1.10).

$$\text{Donc : } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

Ceci nous amène à définir la vitesse angulaire ω comme la dérivée par rapport au temps de l'angle azimutal :

$$\boxed{\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}} \quad (1.24)$$

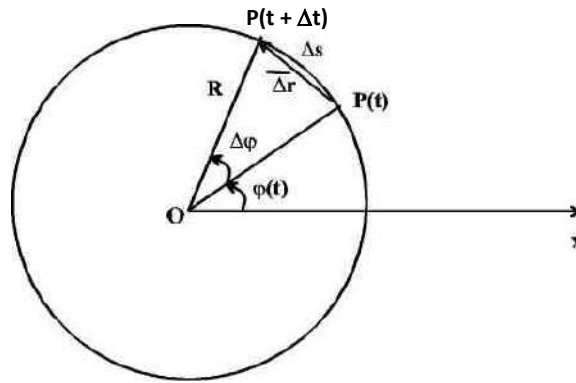


Figure I.10.

Nous pouvons donc écrire, pour tout mouvement circulaire :

$$\boxed{\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega}} \quad (I.25)$$

Cette relation exprime que le module du vecteur-vitesse est égal au rayon de la circonférence décrite par le mobile, multiplié par la vitesse angulaire de celui-ci.

On dit que le mouvement circulaire est uniforme (MCU) lorsque la vitesse angulaire ω et donc la vitesse v est constante. Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du MCU.

On a donc : $T \equiv \frac{2\pi R}{v}$ et donc :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (I.26)$$

On appelle fréquence du mouvement, le nombre de révolutions effectuées par unité de temps. La fréquence est donc l'inverse de la période :

$$\boxed{f \equiv \frac{1}{T}} \quad (I.27)$$

ou encore, à l'aide de (I.26) :

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}} \quad (I.28)$$

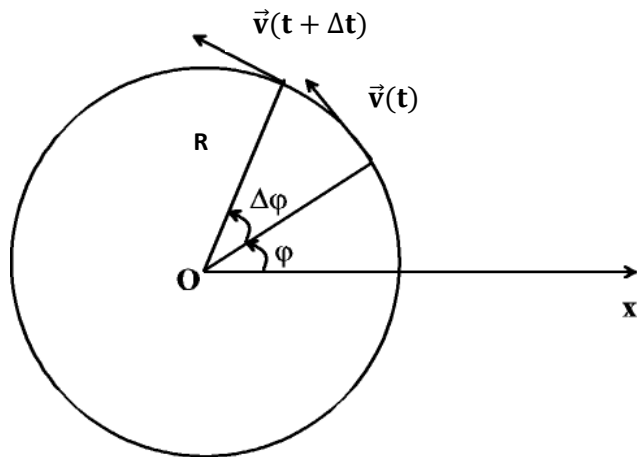
L'unité de fréquence du SI est le hertz (Hz) ; elle est égale à l'inverse d'une seconde.

Bien que v soit constant, l'accélération n'est pas nulle dans un MCU ; celle-ci est due au changement d'orientation du vecteur \vec{v} avec le temps et est donc normale (voir I.21). Pour trouver l'expression de l'accélération dans un MCU, partons de sa définition (voir I.3.3) et considérons uniquement son module :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

Pour trouver Δv , considérons le mobile aux instants t et $t + \Delta t$ (voir figure I.11.a) :

a)



b)

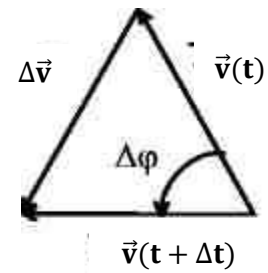


Figure I.11.

Nous avons vu que pour tout mouvement, le vecteur-vitesse est tangent à la trajectoire. Les vecteurs-vitesse $\vec{v}(t)$ et $\vec{v}(t + \Delta t)$ font donc entre eux un angle $\Delta\varphi$, le mobile ayant tourné de cet angle pendant le temps Δt . Ayant même module, le mouvement étant uniforme, ils forment donc avec $\Delta\vec{v}$ un triangle isocèle (voir figure I.11.b) semblable à celui de la figure I.10. Dès lors :

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{R}$$

Et :

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{v}{R} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{v}{R} \mathbf{v}$$

Nous avons donc montré que dans un MCU, l'accélération vaut :

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2, \text{ pour le MCU} \quad (I.29)$$

1.4 Exercices

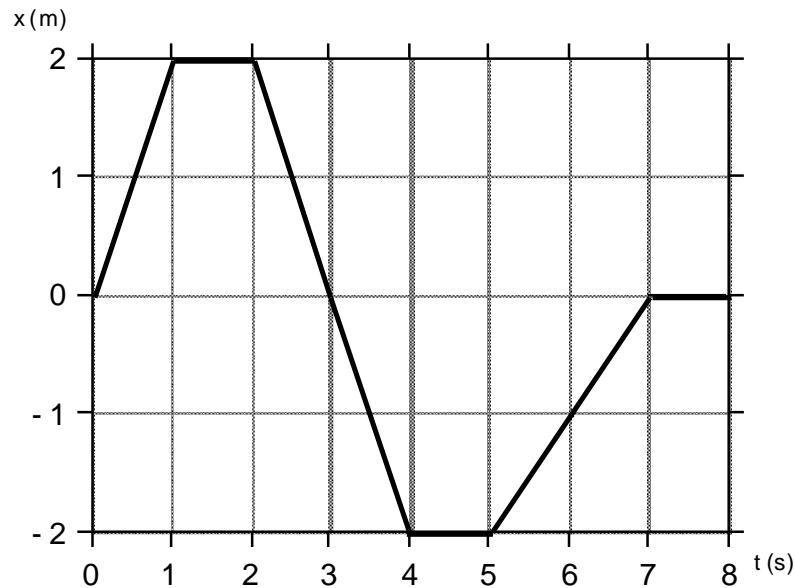
1. La figure suivante indique le déplacement d'une particule selon l'axe Ox en fonction du temps.

a) Déterminer la vitesse moyenne durant les intervalles de temps i) de 0 à 2 s et ii) de 2 à 5 s.

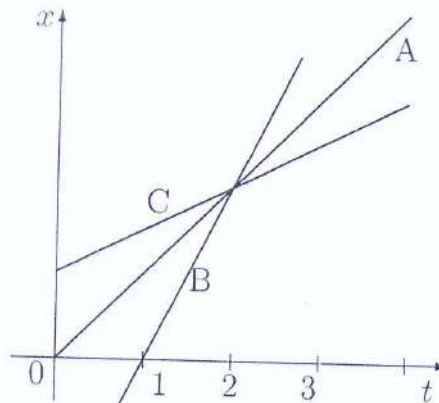
(R : 1 m/s ; -1,3 m/s).

b) Déterminer la vitesse instantanée aux temps i) $t = 0,5$ s, ii) $t = 3$ s et iii) $t = 4,5$ s. (R : 2 m/s ; -2 m/s ; 0 m/s).

- c) Indiquer à quels moments le mouvement se fait dans la direction des x positifs et à quels moments dans celui des x négatifs. (R : vers $x > 0$ quand $t \in [0,1]$ et $[5,7]$; vers $x < 0$ quand $t \in [2,4]$).



- d) Représenter sur un graphique la vitesse de la particule en fonction du temps.
2. La figure suivante représente le déplacement de trois mobiles en fonction du temps. Quel mobile a la plus grande vitesse à l'instant $t = 2$ s?



3. La position d'une balle qui roule en ligne droite est représentée par la fonction $x = 2,0 - 4,6t + 1,1t^2$, où x est exprimé en mètres et t en secondes.
- Déterminez la position de la balle à $t = 1,0$ s, à $t = 2,0$ s et à $t = 3,0$ s. (R: $-1,5$ m; $-2,8$ m; $-1,9$ m) ;
 - Quelle est sa vitesse moyenne dans l'intervalle $t = 1,0$ s à $t = 3,0$ s ? (R: $-0,2$ m/s) ;
 - Déterminez sa vitesse instantanée à $t = 2,0$ s et à $t = 3,0$ s. (R: $-0,2$ m/s; 2 m/s).
4. La figure suivante représente la vitesse d'un mobile en fonction du temps (à gauche). Lequel des graphiques de la figure (partie droite) indique l'accélération de ce mobile?

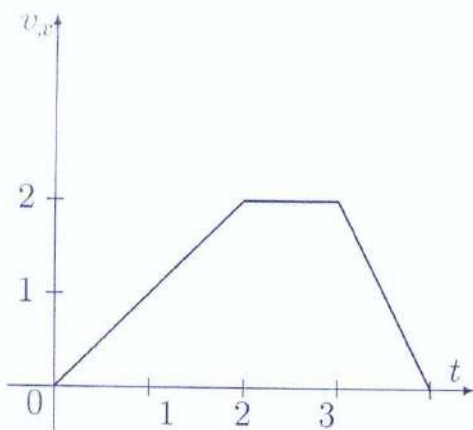
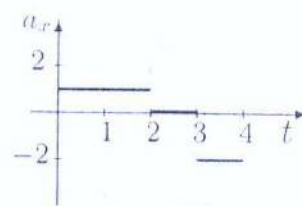
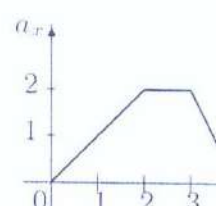


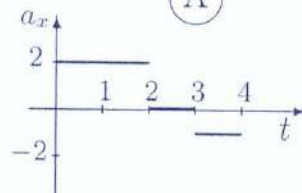
Figure 3.30: Q.5.10



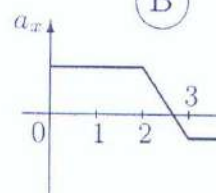
(A)



(B)

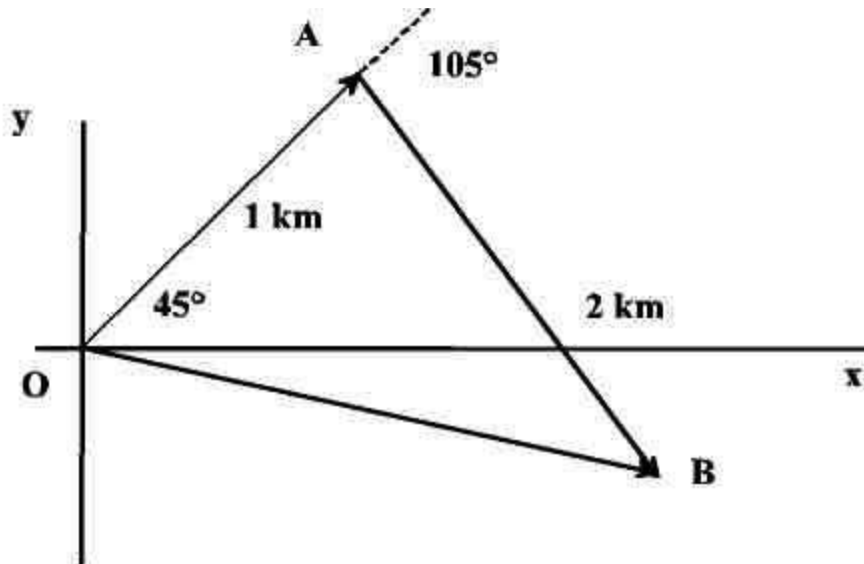


(C)

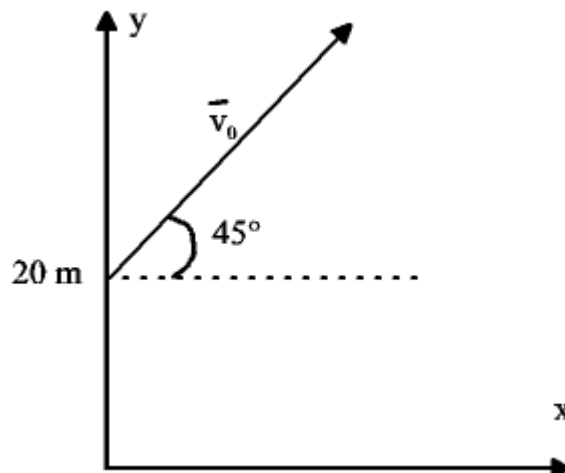


(D)

5. Un mobile P quitte un point O avec une vitesse initiale de 10 m/s et une accélération de -2 m/s^2 , suivant un même axe.
 - a) Trouvez les expressions de la vitesse et de la position de P aux temps ultérieurs. (**R** : $v(t) = -2t + 10$; $x(t) = -t^2 + 10t$.)
 - b) Quelle est la position extrême de P dans la direction positive ? A quel instant l'atteint-il ? (**R** : 25 m ; 5 s .)
 - c) Quand P repasse-t-il par O ? (**R** : 10 s .)
6. Un conducteur a garé sa voiture dans une rue inclinée. Il se trouve à une distance d en amont de sa voiture, au moment où les freins cèdent. L'inclinaison est telle que la voiture prend une accélération constante de 2 m/s^2 . Le conducteur essaie de rattraper sa voiture en courant à une vitesse supposée constante de 18 km/h . Quelle est la valeur limite de d à partir de laquelle le conducteur ne pourra rattraper son véhicule ? (**R** : $6,25 \text{ m}$.)
7. L'accélération n'est pas toujours constante ; dans le cas d'un corps se déplaçant en ligne droite dans un liquide, elle dépend de la vitesse de celui-ci et est donnée par $a = -Kv^2$ où K est une constante, et v est la vitesse. En supposant $v = v_0$ à $t = 0 \text{ s}$,
 - a) déterminer la vitesse et le déplacement en fonction du temps. (**R** : $v(t) = v_0/(v_0Kt + 1)$; $x(t) = 1/K \ln(v_0Kt + 1)$)
 - b) déterminer également v en fonction du déplacement. (**R** : $v = v_0 e^{-Kx}$.)
8. Une excursionniste quitte son campement (en O) et parcourt successivement les portions rectilignes OA et AB (voir dessin).



- a) Déterminez les composantes cartésiennes de chaque déplacement OA et AB dans le repère indiqué. (**R** : OA (0,7 km ; 0,7 km) ; AB (1 km, $-\sqrt{3}$ km)).
- b) Déterminez les composantes du déplacement total OB dans le même repère. (**R** : (1,7 ; -1)).
- c) Déterminez la longueur et la direction du déplacement total OB. (**R** : 2 km ; -31°).
9. Un projectile est lancé depuis une hauteur de 20 m avec une vitesse initiale de 15 m/s faisant un angle de 45° avec l'horizontale (voir dessin).
- a) dans le système de coordonnées schématisé ci-dessus, exprimer les coordonnées initiales du projectile. (**R** : $x_0 = 0$; $y_0 = 20$ m) ;
- b) quelles sont les coordonnées du vecteur-vitesse initiale ? (**R** : $v_{0x} = 10,6$ m/s ; $v_{0y} = 10,6$ m/s) ;
- c) on peut montrer que la vitesse instantanée de ce projectile à tout instant t ultérieur est donnée par : $v_x = v_{0x}$; $v_y = v_{0y} - gt$, où g est une constante qui vaut approximativement 10 m/s^2 .
Que vaut la vitesse de ce projectile après 0,45 s ? Quel angle fait-elle avec l'horizontale à ce moment ? (**R** : $v = 12,2$ m/s ; $\theta = 30^\circ$) ;
- d) Que valent les coordonnées x et y du projectile en fonction du temps ? (**R** : $x = v_{0x}t$; $y = y_0 + v_{0y}t - 1/2 gt^2$) ;



- e) A quel instant le projectile va-t-il entamer sa chute ? (**R** : $t = 1,06$ s).
- f) Quelle est la hauteur maximum atteinte par le projectile ? (**R** : $y_{\text{max}} = 25,6$ m).

10. Les coordonnées d'une particule en mouvement sont données par $x = t^2$ et $y = (t - 1)^2$, où x et y sont exprimés en mètres et t en secondes.
- Déterminer la vitesse moyenne et l'accélération dans l'intervalle de temps entre t et $t + \Delta t$;
 - Appliquer le résultat au cas où $t = 2$ s et $\Delta t = 1$ s et comparer avec les valeurs de la vitesse et de l'accélération à $t = 2$ s. Représenter graphiquement tous les vecteurs (vitesse, vitesse moyenne, accélération) (**R**: 4,47 m/s; 5,8 m/s; 2,8 m/s²).
11. Un volant de 3m de diamètre tourne à 120 tours/minute. Calculer sa fréquence, la période, la vitesse angulaire et la vitesse tangentielle d'un point du bord. (**R** : 2 Hz ; 0.5 s ; 12,6 rad/s ; 18,8 m/s).
12. Calculer la vitesse angulaire, la vitesse tangentielle, et l'accélération normale de la Lune, en supposant que celle-ci tourne uniformément autour de la Terre sur une circonférence de rayon $3,84 \times 10^5$ km et parcourt cette circonférence en 28 jours. (**R**: $2,6 \times 10^{-6}$ rad/s; 997 m/s; $2,6 \times 10^{-3}$ m/s²).
13. Combien de minutes après 4h l'aiguille des minutes rattrapera-t-elle celle des heures pour la première fois?
14. Une pierre est lancée verticalement vers le haut depuis le toit d'un immeuble avec une vitesse de 29,4 m/s. On laisse tomber une seconde pierre 5 s après avoir lâché la première. Quand est-ce que la première pierre dépassera-t-elle la seconde ? (Prendre $g=9,8$ m/s²) (**R** : 6,25 s)

2 CHAPITRE II : DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE

2.1 Force

La dynamique s'intéresse aux causes pour lesquelles les objets se déplacent comme ils le font. Pourquoi un objet immobile se met-il en mouvement ? Qu'est-ce qui amène un mobile à accélérer ou à ralentir ? Dans ces deux cas, c'est une action extérieure à l'objet, qui a une direction et un sens, et que l'on appelle force, qui modifie l'état de mouvement de l'objet. La force qui modifie le mouvement d'un mobile est nécessairement exercée sur ce mobile par un autre objet, soit directement par contact, comme la force de poussée de quelqu'un qui pousse un wagonnet ou la force de traction exercée par un enfant qui tire un traîneau, soit indirectement, à distance, c'est le cas de la force d'attraction de la terre sur la lune ou de la force de répulsion qui existe entre deux charges électriques de même signe.

On peut mesurer l'intensité d'une force à l'aide d'un dynamomètre, constitué d'un ressort qui s'étire devant une échelle graduée (voir figure II.1).

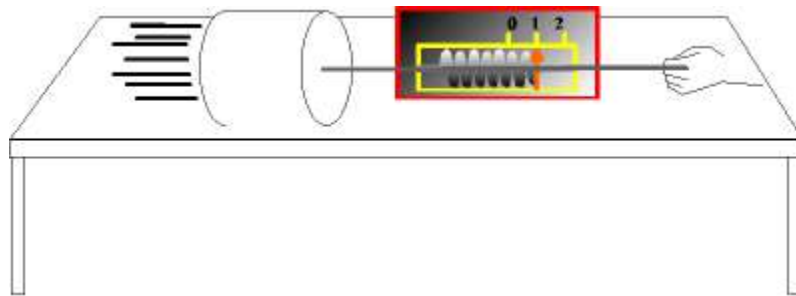


Figure II.1.

Pour calibrer le dynamomètre on décide arbitrairement de la force unité (correspondant au trait 1). En appliquant deux, trois, quatre, ... de ces forces unité identiques à un même dynamomètre, on repère les traits 2, 3, 4, ... (voir figure II.2).

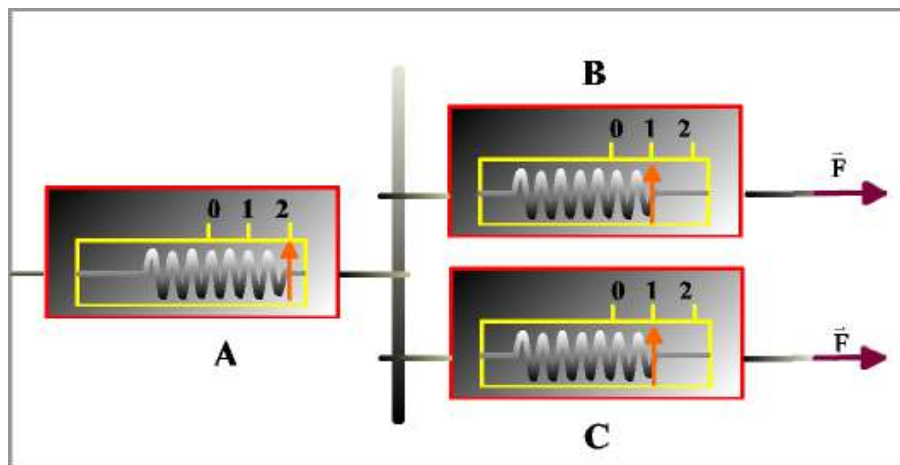


Figure II.2.

La force est une grandeur caractérisée par un module, une intensité, et une direction. Mais pour pouvoir dire qu'il s'agit d'un vecteur, il faut vérifier qu'elle obéit à la loi de l'addition vectorielle. On peut vérifier expérimentalement à l'aide de dynamomètres, qu'il en est bien ainsi. Par exemple, la figure II.3 représente une force horizontale de quatre unités, \vec{F}_1 , et une force verticale de 3 unités, \vec{F}_2 .

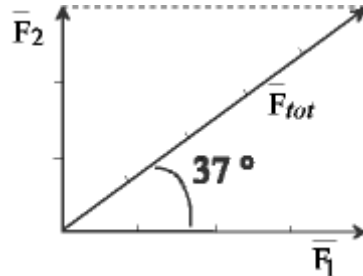


Figure II.3.

L'expérience montre que l'effet combiné de ces deux forces est le même que celui d'une force unique de 5 unités, faisant un angle de 37° avec l'horizontale. Ce sont en fait le module et la direction du vecteur somme de ces deux forces :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (\text{II. 1})$$

ce qui confirme bien la nature vectorielle de la force.

Mais quel est le lien entre la force exercée et le mouvement ? Ce problème a été résolu par Newton, qui a énoncé trois lois qui constituent les fondements de la mécanique classique.

2.2 Première loi de Newton

Nous savons par expérience qu'un objet lancé sur un plancher horizontal et abandonné à lui-même, s'arrête rapidement. Par contre si on polit soigneusement la surface de contact de l'objet avec le sol et si ce dernier est lui-aussi bien lisse, comme de la glace, par exemple, pour une même vitesse initiale imprimée à l'objet, celui-ci parcourra une distance plus grande avant de s'arrêter. Si maintenant l'objet se meut sur un coussin d'air entre lui et le sol, on verra à peine sa vitesse diminuer. D'où l'idée, que Galilée avait d'ailleurs eue avant Newton, que dans une situation idéale sans forces de frottements entre l'objet et le sol, cet objet garderait indéfiniment sa vitesse initiale. Ceci a conduit à la 1^{ère} loi de Newton, appelée aussi **loi d'inertie** :

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.

Autrement dit

| | |
|---|--------|
| si $\vec{F} = 0 \iff v(t) = v_0$, et réciproquement | (II.2) |
|---|--------|

Cela implique que si on veut qu'un objet se déplace à vitesse constante sur une surface rugueuse, il faut lui appliquer une force égale et opposée à la force de frottement de telle sorte que la force résultante qui s'applique sur l'objet soit nulle (voir figure II.4).

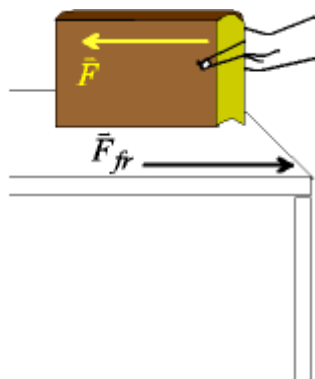


Figure II.4.

2.3 Deuxième loi de Newton et la masse

D'après la première loi de Newton, on sait qu'une force agissant sur un corps produit une accélération. Pour déterminer comment l'accélération dépend de la force, on fait varier la force appliquée à un même objet et on mesure l'accélération. On constate que si la force appliquée est deux fois plus grande, l'accélération produite est deux fois plus grande. De même pour une force trois, quatre fois ... plus grande, l'accélération produite est trois fois, quatre fois ... plus grande. L'intensité de l'accélération est donc proportionnelle à l'intensité de la force appliquée :

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{F} \quad (\text{II.3})$$

Mais que se passe-t-il pour un autre objet ? On sait que si on applique une même force à un panier à provisions plein et à un panier vide, l'accélération sera plus faible dans le premier cas. Clairement, il y a une autre grandeur qui joue dans la loi qui relie F à a et qui est liée à l'objet lui-même : c'est la quantité de matière de l'objet que l'on appelle la masse, m . L'unité de masse du SI est le kilogramme (kg) (voir définition dans la section 2.1.1 du chapitre 0). On constate expérimentalement que lorsqu'on applique une même force à un objet qui a une masse deux fois plus grande, l'accélération est deux fois plus petite : l'accélération est inversement proportionnelle à la masse.

$$\mathbf{a} \propto \frac{1}{m} \quad (\text{II.4})$$

La masse d'un objet traduit donc la manière dont cet objet résiste à une force extérieure qui tend à l'accélérer. Plus la masse est grande, plus faible sera l'accélération produite pour une même force. Un objet de masse élevée a une grande inertie ce qui veut dire qu'il faut lui appliquer une force élevée pour le mettre en mouvement. C'est pourquoi on parle parfois de masse d'inertie.

En regroupant les expressions (II.3) et (II.4), on obtient : $\mathbf{a} \propto \frac{F}{m}$ ou encore $F \propto a m$. La constante de proportionnalité peut être fixée arbitrairement à 1, à condition de choisir l'unité de force en conséquence.

L'unité de force du SI est le newton (N), c'est la force qui, appliquée à une masse de 1 kg, produit une accélération de 1 m/s². Dès lors la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (II.5)$$

En effet, l'accélération produite a la même direction que la force appliquée et la relation entre les intensités de a et de F peut s'écrire sous forme vectorielle. Il en résulte que la masse est un scalaire.

2.4 Troisième loi de Newton

Dans chaque cas où on étudie le mouvement d'un objet à l'aide de la deuxième loi de Newton, on considère les forces appliquées par un autre corps sur cet objet : le cheval qui tire la charrette, pour le mouvement de la charrette, la personne qui pousse un panier à provisions pour le panier à provisions, le marteau qui enfonce un clou pour le clou. Mais s'il est vrai que le marteau exerce une force sur un clou, de toute évidence le clou exerce lui aussi une force sur le marteau puisque la vitesse de ce dernier devient rapidement nulle lorsque les deux objets entrent en contact. Seule une force intense peut causer une décélération aussi rapide et qui d'autre que le clou peut l'avoir exercée ?

Ces considérations ont conduit Newton à énoncer sa troisième loi, connue aussi sous le nom de **principe de l'action et de la réaction** :

Chaque fois qu'un objet exerce une force sur un second objet, ce dernier exerce sur le premier une force égale et opposée.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (II.6)$$

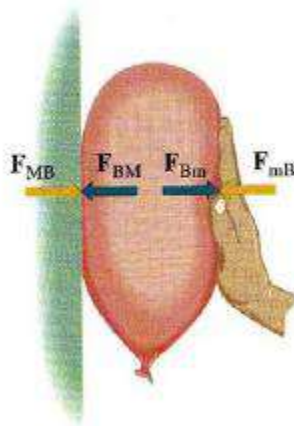


Figure II.5. Lorsqu'un ballon est pressé par une main contre un mur, il intervient 2 paires de forces : \vec{F}_{mB} et \vec{F}_{Bm} d'une part, \vec{F}_{MB} et \vec{F}_{BM} d'autre part. Toute action engendre une réaction de même intensité et de sens opposé.

Remarque importante :

Les forces \vec{F}_{12} et \vec{F}_{21} qui apparaissent dans la troisième loi de Newton ne sont pas appliquées au même objet et seule l'une d'entre elle doit être prise en considération si on désire étudier le mouvement de l'un de ces objets avec la 2^{ème} loi de Newton. Si on désire étudier le mouvement de la particule 1, il faut faire intervenir dans la loi (II.5), \vec{F}_{12} qui est la force exercée par la particule 2 sur la particule 1. \vec{F}_{21} , qui est la force exercée par la particule 1 sur la particule 2, n'intervient pas.

2.5 Applications des lois de Newton

Si l'on connaît les différentes forces qui s'exercent sur un corps, la deuxième loi de Newton permet de calculer l'accélération prise par ce corps de masse m :

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

En intégrant l'accélération (I.9), on obtient la vitesse, puis en intégrant une nouvelle fois (I.10), la position du corps en fonction du temps, à condition de connaître les valeurs initiales (x_0, v_0).

Les étapes dans la solution d problème sont les suivantes :

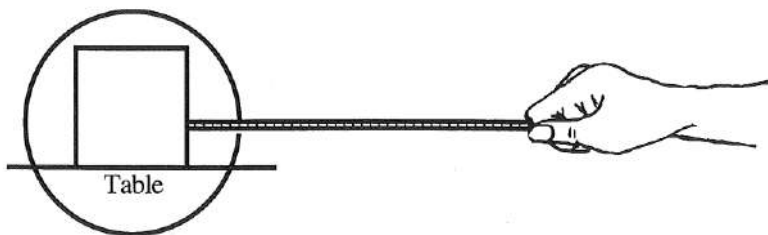
- 1) Identifier le corps à étudier ;
- 2) Trouver les forces **extérieures** qui agissent le corps.
Ces forces extérieures peuvent être exercées sur le corps en tout point où celui-ci est en contact avec son environnement (air, table, corde, ressort, etc.) : ce sont les forces de contact. A ces dernières, il faut ajouter les forces à distance, dont la plus familière est la force de pesanteur, i.e. le poids du corps.
Le diagramme des forces reprendra toutes les forces qui s'exercent sur **le corps** ;
- 3) Choisir un système d'axes approprié et appliquer la 2^{ème} loi de Newton à chaque composante ; tenir compte des **contraintes** éventuelles.

Exemples d'application

Une personne tire horizontalement une corde fixée à un bloc qui se trouve sur une table horizontale.

1. Le corps à étudier est le **bloc**. Isolons-le en l'entourant d'un cercle. Ce bloc est en contact avec l'air, la corde et la table. Généralement on néglige la force de frottement avec l'air.

La corde exerce une force de contact, appelée la **tension** dans la corde.



En principe la table exerce 2 forces de contact sur le bloc : la 1^{ère} est la force normale (\vec{N}) à la table qui doit supporter le bloc, la seconde, tangente à la table, est la force de frottement qui s'oppose au mouvement du bloc (elle sera traitée en détail plus loin). Négligeons pour l'instant cette dernière composante.

Enfin il ne faut pas oublier le poids du bloc ; cette dernière s'écrit $\vec{P} = m\vec{g}$ (II.8). Le diagramme des forces est repris ci-dessous :

Les forces de réaction \vec{P}' , \vec{N}' , \vec{T}' correspondantes aux 3 forces \vec{P} , \vec{N} , \vec{T} sont égales et opposées à ces dernières, mais surtout, elle s'appliquent à des corps **différents du bloc** : \vec{P}' est la force que le bloc

exerce **sur la terre** ; \vec{N}' est la force que le bloc exerce sur la table ; \vec{T}' est la force que le bloc exerce sur **la corde**. Ces forces ne doivent donc pas être représentées sur le diagramme des forces.



Le bloc est tiré horizontalement, vers la droite ; le choix d'un système d'axes à 2 dimensions (x, y) suffira.

L'équation à résoudre est donc : $\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}$

Projetons cette équation sur l'axe des ordonnées (axe des y) : $N - P = m a_y$.

Puisque le bloc reste sur la table, il ne peut y avoir aucun mouvement le long de l'axe des y : ceci constitue une **contrainte** pour notre problème. \vec{N} et \vec{P} doivent se compenser exactement car, dans le cas contraire, une des forces l'emporterait, donnant lieu à une accélération verticale a_y . La table rigide supporte le bloc :

$$a_y = 0 \text{ et } \sum F_y = m a_y = 0$$

La projection sur l'axe des abscisses (axe des x) donne : $T = m a_x$ et par conséquent :

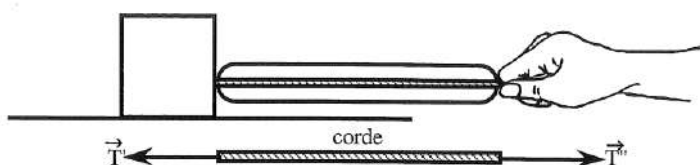
$$a_x = \frac{T}{m}$$

Si T est constant, a_x l'est également et le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

où les conditions initiales sont utilisées : à l'instant $t = 0$, $v = v_0$ et $x = x_0$.

2. Dans le même problème, considérons que le corps à étudier soit la corde,



Les seules forces qui s'exercent sur la corde sont : la force exercée par le bloc T' , qui est la réaction à la force T , et la force exercée par la main, T'' .

Si on isole la corde, la 2^{ème} loi de Newton s'écrit comme suit (toutes ces forces sont dans la direction de l'axe des x) :

$$T'' - T' = m_{\text{corde}} \cdot a_x$$

Si l'on suppose que la masse de la corde est négligeable ($m_{\text{corde}} \cong 0$) ; $T'' - T' \cong 0$ et

$$T'' \cong T'$$

La tension est la même en tout point de la corde : elle est transmise intégralement d'une extrémité à l'autre de la corde, i.e. de la main au bloc.

Ceci n'est plus vérifié lorsque la masse de la corde n'est pas négligeable ; dans ce cas, $T'' > T'$.

Exemples :

1. Considérons une force $T'' = 9 \text{ N}$ exercée par la main sur une corde de masse $m_c = 0,5 \text{ kg}$ solidaire d'un bloc de masse $m_b = 4 \text{ kg}$.

Que valent l'accélération de l'ensemble et les tensions dans la corde ?

Appliquons la 2^{ème} loi de Newton sur l'ensemble bloc-corde :

$$T'' = (m_b + m_c) \cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{T''}{(m_b + m_c)} = \frac{9}{4 + 0,5} = 2 \text{ m/s}^2$$

Appliquons la même loi sur le bloc :

$$T = m_b \cdot a_x \Rightarrow T = 4 \cdot 2 \text{ N} = 8 \text{ N}$$

On remarque que $T'' = 9 \text{ N}$ alors que $T' = T = 8 \text{ N}$.

2. Considérons le même problème en négligeant la masse de la corde :

$$T'' = (m_b + 0) \cdot a'_x \Rightarrow a'_x = \frac{T''}{m_b} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ m/s}^2$$

La tension devient alors : $T = m_b \cdot a'_x \Rightarrow T = 4 \cdot 2,25 \text{ N} = 9 \text{ N}$

Dans ce cas nous avons des tensions égales : $T'' = T = T' = 9 \text{ N}$.

2.6 Domaine de validité des lois de Newton

Les lois de Newton ainsi que les prédictions que l'on peut faire à partir de celles-ci se sont montrées extrêmement bien vérifiées par l'expérience à deux conditions : il faut les appliquer dans un référentiel particulier, dit référentiel inertiel, et les vitesses des mobiles considérés doivent être petites par rapport à la vitesse de la lumière qui est d'environ 300.000 km/s. Cette dernière condition est aisément vérifiée pour les mouvements que nous aurons à considérer dans ce cours. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut faire appel à la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.

Les lois de Newton sont vérifiées dans un référentiel Oxyz, « fixe ». On peut montrer qu'elles le seront aussi dans tout référentiel qui a un mouvement de translation uniforme (à vitesse constante) par rapport à ce référentiel fixe. Chacun de ces référentiels dans lesquels les lois de Newton sont vérifiées est dit inertiel. Par contre les lois de Newton ne sont pas vérifiées dans un référentiel en rotation ou qui accélère : il faut exercer une force pour maintenir un objet immobile sur un manège forain qui tourne ou sur la plateforme d'un tram qui accélère.

Mais comment déterminer ce fameux référentiel fixe ? En fait c'est impossible car les lois sont identiques dans tous les référentiels inertiels. Il n'y a donc pas moyen d'en identifier un qui serait au repos alors que les autres seraient en translation. La seule manière de savoir si un référentiel est inertiel c'est de vérifier que la 1^{ère} loi de Newton y est vérifiée. Alors on peut y appliquer aussi les deux autres lois. Dès qu'un

référentiel inertiel a été identifié de cette manière, tous les autres s'obtiennent par translation uniforme. Dans la suite de ce cours nous travaillerons toujours dans un référentiel supposé inertiel, du moins en première approximation. Addendum sur [Force](#) chez les animaux

2.7 Quantité de mouvement

2.7.1 Définition – conservation de la quantité de mouvement

En associant la masse à l'accélération, l'important concept de force est apparu par le biais de la loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \vec{a}$. Il n'est donc pas étonnant qu'en associant la masse à l'autre grandeur cinématique, la vitesse, une nouvelle grandeur importante apparaisse : la **quantité de mouvement** pour les mouvements rectilignes et son équivalent pour les mouvements circulaires : le **moment angulaire**, aussi appelé le moment cinétique ; cette dernière notion sort du cadre de ce cours.

La quantité de mouvement \vec{p} d'une particule est définie par :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

C'est un vecteur de même direction et de même sens que la vitesse, dont la grandeur est celle de la vitesse multipliée par la masse.

L'équation aux dimensions est MLT^{-1} et l'unité SI est le $kg \cdot m/s$.

Les lois de Newton peuvent également être exprimées en fonction de la quantité de mouvement (q.d.m.).

- a) La 1^{ère} loi de Newton exprime la conservation de la q.d.m d'une particule en l'absence de force résultante extérieure. En effet :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si $\sum \vec{F} = 0$, alors $\vec{p} = \text{constante}$: la quantité de mouvement ne varie ni en grandeur, ni en direction, ni en sens : c'est un vecteur **uniforme**.

- b) La deuxième loi de Newton peut s'écrire sous la forme :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La somme des forces est égale à la dérivée de la q.d.m par rapport au temps. Il s'agit de la formulation générale de la 2^{ème} loi de Newton.

- c) La troisième loi de Newton spécifie que les forces vont toujours par paire. Si un corps 1 est soumis à une force \vec{F}_{12} , celle-ci est due à la présence d'un corps 2 dans le voisinage ; cette force peut être une force d'action à distance, comme celle décrite par la loi d'attraction universelle, ou une force de contact, comme cela est le cas lors d'un choc élastique entre les corps 1 et 2. A la force d'action \vec{F}_{12} sur le corps 1, correspond une force de réaction \vec{F}_{21} sur le second corps, telle que :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_{12}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{21}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d(\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21})}{dt} = 0$$

Le taux de variation de la somme des q.d.m. est nul.

ou encore : $\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \text{constante}$

Ceci montre que la quantité de mouvement totale d'un système isolé constitué de 2 particules en interaction mutuelle est une constante du mouvement.

Ce résultat exprime la loi de la **conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé**. Un système est isolé lorsque les éléments qui le composent n'interagissent pas avec le milieu extérieur : il n'y a que des interactions et des échanges entre les éléments du système.

Les particules 1 et 2 qui exercent une force mutuelle \vec{F}_{12} et \vec{F}_{21} forment un système isolé s'ils ne subissent aucune force provenant de corps extérieurs au système.

Pour un système isolé comprenant plus de 2 particules, on peut généraliser et obtenir un résultat analogue :

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{constante}$$

2.7.2 Applications

2.7.2.1 Recul d'une arme à feu

Quand on tire un coup de fusil, les gaz de l'explosion exercent des forces qui repoussent la balle dans un sens et font reculer le fusil dans l'autre.

Soient M masse du fusil et m celle de la balle. Fusil et balle forment un système isolé. A partir du principe de l'action et de la réaction on peut affirmer que le fusil pousse la balle et que la balle pousse le fusil, les deux forces étant égales et opposées. Ces forces égales procurent à la balle et au fusil des accélérations inversement proportionnelles aux masses : une grande accélération à la balle, une petite accélération au fusil.

A partir de la conservation de la q.d.m. dans le système isolé balle-fusil, on doit remarquer que, avant le tir, la balle et le fusil sont au repos : la q.d.m. totale est nulle. Comme elle se conserve, elle doit rester nulle après le tir ; il faut donc

$$m\vec{v} + M\vec{V} = 0$$

où \vec{v} et \vec{V} sont les vitesses prises par la balle et le fusil respectivement. Cette relation vectorielle peut s'écrire

$$m\vec{v} = -M\vec{V}$$

Les deux vecteurs doivent être égaux et opposés.

La balle de petite masse aura une grande vitesse tandis que le fusil, de masse beaucoup plus grande, prendra une plus faible vitesse en sens opposé de la balle.

$$m \ll M \Rightarrow \|\vec{v}\| \gg \|\vec{V}\|$$

2.7.2.2 Moteur à réaction

Le réacteur projette vers l'arrière des gaz à grande vitesse. Les gaz et l'avion forment un système isolé : l'avion s'en va vers l'avant. Ce sont les gaz éjectés qui poussent l'avion vers l'avant et c'est l'avion qui pousse les gaz vers l'arrière. Ce n'est pas, comme on le dit parfois, l'avion qui, en éjectant les gaz, pousse sur l'air.

D'ailleurs, les réacteurs des cabines spatiales qui transportent les cosmonautes de la terre à la lune (ou dans l'espace) fonctionnent sur le même principe. Il n'y a pas d'air : le réacteur pousse sur les gaz et les gaz sur le réacteur.

Quand un cosmonaute fait une promenade spatiale, il utilise un pistolet à gaz pour se déplacer. Expulsant des gaz dans une direction avec une certaine q.d.m., il s'en va en sens opposé avec une quantité de mouvement de même grandeur.

Utiliser les éléments [quantité de mouvement](#) et [impulsion](#).

2.8 Force gravitationnelle et poids

2.8.1 Force gravitationnelle

En première approximation, les planètes et la terre en particulier, décrivent un mouvement circulaire uniforme autour du soleil. D'autre part, nous avons vu à la section 1.3.4 que dans un MCU, l'accélération est normale : $\vec{a} = -R\omega_0^2\vec{1}_n$. La deuxième loi de Newton (II.5), nous dit que pour que ce MCU ait lieu, il faut exercer une force centripète dirigée vers le centre de la circonférence, donc vers le soleil. Newton en conclut que le soleil exerçait une force d'attraction sur les planètes, et réciproquement, en vertu de la loi de l'action et de la réaction (II.6). Cette constatation l'a conduit à énoncer la loi de la gravitation universelle. Selon cette loi, il existe entre deux objets ponctuels de masse m_1 et m_2 , distants de r_{12} une force d'attraction dont le module F_G est donné par :

$$\boxed{F_G = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}} \quad (\text{II.7})$$

où G est la constante de gravitation universelle et vaut $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

2.8.2 Poids

Lorsqu'un objet ponctuel de masse m se trouve à la surface de la terre, il subit une force d'attraction gravitationnelle de la part de chaque molécule qui constitue la terre, ce qui résulte en une force d'attraction globale qu'on appelle le poids de l'objet, ou encore, force pesanteur. Son intensité est donnée d'après la loi de gravitation universelle par :

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \cdot \left\langle \mathbf{G} \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^2} \right\rangle$$

où les symboles $\langle \rangle$, indiquent qu'on a calculé (à l'aide d'une intégrale de volume) la valeur moyenne de l'accélération gravitationnelle exercée par chaque molécule de masse m_i , située à une distance r_i de la masse m , en tenant compte de sa direction. Cette valeur moyenne a les dimensions d'une accélération et pour cette raison est appelée accélération de la pesanteur et désignée par la lettre \mathbf{g} .

La terre n'étant pas parfaitement sphérique et homogène, \mathbf{g} dépend de l'endroit où l'on se trouve. A l'équateur \mathbf{g} vaut $9,78 \text{ m/s}^2$, elle vaut $9,83 \text{ m/s}^2$ aux pôles et à Paris ou Bruxelles, \mathbf{g} vaut $9,81 \text{ m/s}^2$. En première approximation la force pesanteur est dirigée vers le centre de la terre et $\vec{\mathbf{P}}$ est donc vertical, dirigé vers le bas :

$$\boxed{\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}}} \quad (\text{II.8})$$

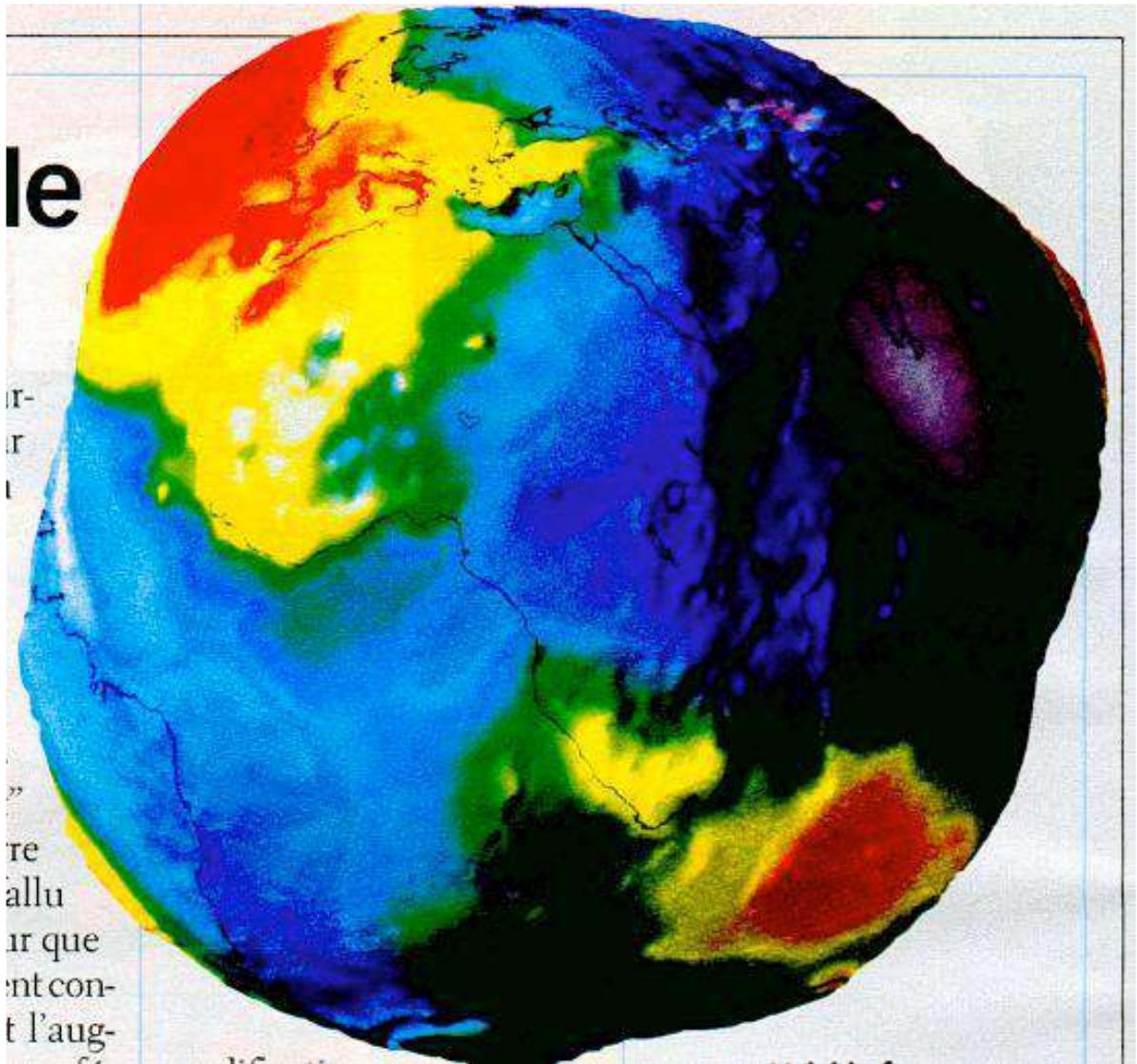


Figure II.6 : Forme de la Terre pour que g soit le même partout (géoïde).

Remarque :

Il ne faut pas confondre masse et poids comme cela se fait malheureusement dans le langage courant. La masse désigne la quantité de matière et s'exprime en kg, tandis que le poids est une force et s'exprime en newton.

La masse est une caractéristique de l'objet indépendante de l'endroit où il se trouve. Le poids dépend de la masse (voir II.8) mais il dépend aussi de l'accélération du lieu où il se trouve. Le poids d'un objet est six fois plus faible sur la lune, il est pratiquement nul dans l'espace, loin de l'influence de toute planète.

2.9 Forces de frottement.

2.9.1 Forces de frottement entre solides

Si nous lançons un bloc de masse m à une vitesse initiale v_0 sur un plan horizontal, il perd graduellement cette vitesse et s'arrête. Cependant, d'après la 1^{ère} loi de Newton, le bloc devrait continuer à se déplacer en ligne droite avec la vitesse qu'on lui a communiquée.

En effet la force résultante sur le bloc est apparemment nulle : il y a la force de la pesanteur dirigée vers le bas, qui est compensée par l'action de la table sur le bloc, dirigée vers le haut, de sorte que la résultante soit nulle (figure II.7).

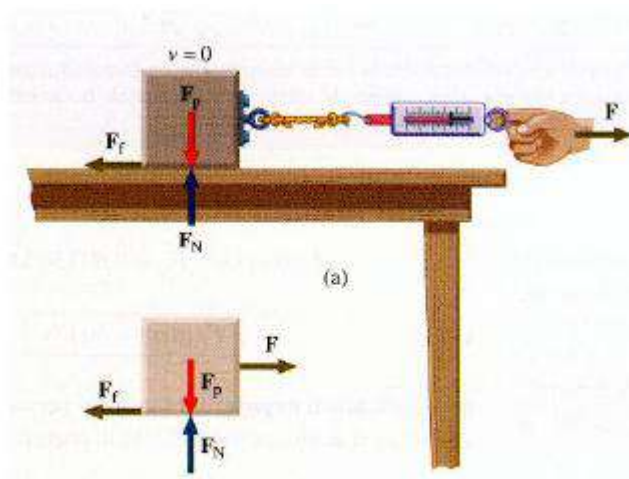


Figure II.7

Nous devons donc admettre l'existence d'une autre force sur le bloc qui s'oppose au mouvement. Cette force est appelée la **force de frottement**. Elle est due à l'interaction entre les molécules du bloc et de la table.

Expérimentalement on trouve que la grandeur de la force de frottement, notée F_f , vaut :

$F_f = \mu F_N$ où μ est une constante appelée coefficient de frottement qui décrit l'état de contact de deux surfaces ; F_N est la grandeur de la force normale appliquant un corps contre un autre.

μ est petit pour les surfaces polies, et il est grand pour les surfaces rugueuses.

Sous forme vectorielle : $\vec{F}_f = -\mu F_N \vec{1}_v$ où $\vec{1}_v$ est un vecteur unitaire dirigée dans le sens du mouvement, i.e. de même direction et même sens que la vitesse de l'objet.

Sous l'action de la force \vec{F} , l'équation du mouvement est :

$$\vec{F}_N + \vec{F}_p + \vec{F} - \mu F_N \vec{1}_v = m\vec{a} \leftrightarrow \vec{F} - \mu F_N \vec{1}_v = m\vec{a}$$

Le coefficient de frottement dépend de la nature des surfaces en contact, de leur propreté, de leur rugosité, de l'humidité de ces surfaces, etc. Pour les métaux μ varie de 0,3 à 1 (voir tableau II.1).

Tableau II.1 : Coefficients de frottement statiques et dynamiques de quelques matériaux.

| Matériaux | Coefficients de frottement | |
|---------------------------|----------------------------|---------|
| | μ_s | μ_c |
| Acier sur glace | 0,1 | 0,05 |
| Acier sur acier – sec | 0,6 | 0,4 |
| Acier sur acier - graissé | 0,1 | 0,05 |
| Corde sur bois | 0,5 | 0,3 |
| Téflon sur acier | 0,04 | 0,04 |

| | | |
|-------------------------------------|-------------|-----------|
| Chaussure sur glace | 0,1 | 0,05 |
| Bottes de montagne sur rocher | 1,0 | 0,8 |
| Semelles de cuir sur tapis | 0,6 | 0,5 |
| Semelles de cuir sur bois | 0,3 | 0,2 |
| Semelles de caoutchouc sur bois | 0,9 | 0,7 |
| Pneus de voiture sur béton sec | 1,0 | 0,7 – 0,8 |
| Pneus de voiture sur béton mouillé | 0,7 | 0,5 |
| Pneus de voiture sur béton verglacé | 0,3 | 0,02 |
| Caoutchouc sur asphalte | 0,60 | 0,40 |
| Téflon sur téflon | 0,04 | 0,04 |
| Bois sur bois | 0,5 | 0,3 |
| Glace sur glace | 0,05 – 0,15 | 0,02 |
| Verre sur verre | 0,9 | 0,4 |

En général, il existe deux sortes de frottement :

- Le frottement statique auquel est associé un coefficient de frottement statique μ_s , i.e. la force de frottement s'exerçant entre deux surfaces au repos l'une par rapport à l'autre. La force minimum nécessaire au déclenchement du mouvement correspondra au frottement statique maximum.
- Une fois le mouvement amorcé, les frottements diminuent, de sorte qu'une force plus faible suffit à conserver un mouvement uniforme. On appellera forces de frottement cinétique les forces s'exerçant entre deux surfaces en mouvement relatif ; il lui est associé un coefficient de frottement cinétique μ_c .

On a toujours $\mu_s > \mu_c$.

N.B.: μ ne dépend pas de la grandeur des surfaces en contact.

2.9.2 Forces de frottement dans les fluides

Un corps se déplaçant dans un fluide (un gaz ou un liquide) subit une force qui le ralentit. Expérimentalement on trouve que cette force, due au frottement, est donnée par la relation : $\vec{F}_f = -\kappa\eta\vec{v}$ où κ et η sont des constantes positives et \vec{v} la vitesse du corps.

κ dépend de la forme du corps, η caractérise le fluide et est appelé le **coefficient de viscosité**.

Exemple : pour une sphère, $\kappa = 6\pi R$ (ceci est connu sous le nom de loi de Stokes).

Si \vec{F} est la force extérieure s'exerçant sur l'objet, l'équation du mouvement est :

$$\vec{F} - \kappa\eta\vec{v} = m\vec{a}$$

Considérons un corps, initialement au repos, se déplaçant en MR sous l'influence d'une force extérieure. Initialement la vitesse est nulle, et donc la force de frottement est nulle. A cause de la force extérieure, le corps se met en mouvement, et sa vitesse augmente. Cela entraîne l'augmentation de la force de frottement car elle croît avec la vitesse.

A un certain moment $\|\vec{F}_f\| = \|\vec{F}\|$, et donc $\vec{F} - \kappa\eta\vec{v} = \vec{0}$ et le corps continue à se déplacer à une vitesse constante, la vitesse limite, donnée par $\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{\kappa\eta}$. Si le corps est en chute libre ($\vec{F} = m\vec{g}$) on a

$$\vec{v}_L = \frac{m\vec{g}}{\kappa\eta}$$

2.9.3 Importance des forces de frottement.

Les forces de frottement sont très importantes : elles conditionnent notre marche, l'utilisation de roues ; elles nous permettent de tenir des objets en mains, d'ouvrir le robinet, etc.

Le plus souvent, on essaie de réduire les forces de frottement qui s'opposent à un mouvement souhaité ; ceci se fait à l'aide de roues ou de roulements. Lorsqu'il y a roulements, les surfaces se déplacent en mettant en jeu des forces plus faibles que dans le cas du glissement.

Dans les fluides, les forces de frottement sont très faibles comparées aux forces de frottement entre surfaces solides. C'est pourquoi on utilise des lubrifiants liquides, tels que l'huile, qui réduisent considérablement le frottement en adhérant aux surfaces métalliques.

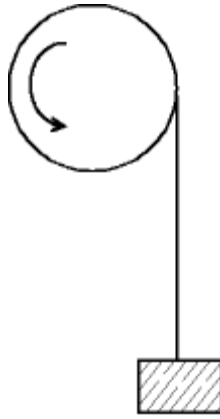
Lorsqu'on utilise de l'huile comme lubrifiant, le coefficient de frottement f vaut environ 0,1 dans le cas de frottements entre métaux. Dans le corps humain, au joint de la hanche, le liquide synovial réduit f à environ 0,003.

Lorsque nous marchons ou lorsque nous courons, nous ne sommes pas conscients des forces de frottement qui s'exercent sur nos genoux et sur les autres articulations de nos jambes. Chez les mammifères, la plupart des articulations sont lubrifiées par le fluide synovial (la synovie). Lors d'un mouvement, ce fluide s'écoule à travers les cartilages poreux qui tapissent les articulations sous l'effet de la pression qui y règne. Il est réabsorbé lorsque l'articulation est au repos, ce qui augmente le frottement et rend ainsi plus facile le maintien d'une position donnée.

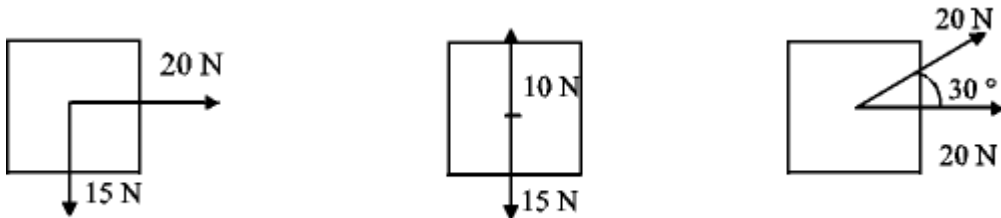
2.10 Exercices

Remarque : les réponses ont été calculées en supposant $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1. Un objet est immobile. Que peut-on en conclure quant aux forces éventuelles qui agissent sur lui ?
2. Un point matériel n'est soumis à aucune force ou est soumis à plusieurs forces qui se compensent exactement. Peut-il être en mouvement et, si oui, de quel type ?
3. Un avion de 2000 kg est en vol horizontal à vitesse constante. Que vaut la résultante des forces qui s'appliquent à cet avion ? Que vaut la force verticale de portée de l'air ? (**R** : $2 \cdot 10^4 \text{ N}$).
4. Un moteur fait tourner une poulie de rayon 25 cm à la vitesse constante de 20 tours par minute dans le sens antihoraire. Une corde passant sur la poulie soulève un bloc de 50 kg. Quelle est la force exercée par la corde sur ce bloc ? (**R** : 500 N)

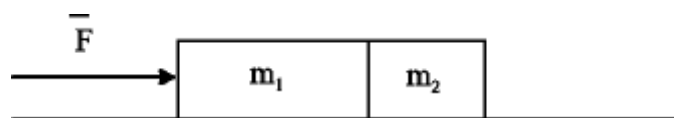


5. Dessiner les résultantes des forces s'appliquant aux objets suivants :



Que vaut la valeur absolue de l'accélération et sa direction si la masse de chacun des objets vaut 2 kg ? (**R** : $12,5 \text{ m/s}^2$, -37° ; $2,5 \text{ m/s}^2$, -90° ; $19,3 \text{ m/s}^2$, 15° ; les angles sont comptés à partir de l'axe horizontal).

6. Un monte-charge d'une masse totale de 3200 kg est retenu par un câble. Trouver la tension dans ce câble lorsque le monte-charge est au repos et lorsqu'il monte ou descend avec une accélération de 1 m/s^2 . (**R** : $32 \cdot 10^3 \text{ N}$; 35200 N ; 28800 N).
7. Soit une particule ponctuelle de masse $m = 2 \text{ kg}$ animée d'un MRUA d'accélération $a_x = 2 \text{ m/s}^2$ et $a_y = 3 \text{ m/s}^2$. A propos de la force totale qui agit sur la particule,
 - a) quelle est son intensité ? (**R** : 7,2 N)
 - b) quelle est son orientation par rapport à l'axe x ? (**R**: 56°)
8. Une balle est lancée à partir du sol selon un angle de 45° à la vitesse de 20 m/s. A quelle distance retombe-t-elle sur le sol ? (Négliger la résistance de l'air) (**R** : 40 m).
9. Quelle est la force exercée par m_2 sur m_1 dans la situation suivante ? (m_1 et m_2 peuvent glisser sans frottement sur le plan horizontal). [**R** : $m_2 F / (m_1 + m_2)$]



10. Une locomotive tire avec une force de 10 000 newton un convoi de cinq wagons de 30 tonnes chacun. Quelles sont les tensions dans les attaches entre les wagons ? (Négliger les frottements). (R : 8000 N ; 6000 N ; 4000 N ; 2000 N).

3 CHAPITRE III : TRAVAIL ET ENERGIE

En principe, les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît les positions et les vitesses initiales des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur elles, on peut prévoir l'évolution du système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop complexes. Dans bien des cas des informations intéressantes, concernant le système, peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions telles que le travail et l'énergie.

3.1 Travail effectué par une force constante

Dans le langage courant, on parle de travail intellectuel, de travail physique, de travail scientifique, artistique, etc... Les physiciens et les ingénieurs s'intéressent, quant à eux, au travail mécanique, c'est-à-dire au travail effectué par une force. Cette notion est en partie liée à la notion commune d'effort musculaire qu'il faut fournir pour déplacer le point d'application d'une force. Tout d'abord, nous allons voir comment, dans le cas particulier d'une force constante \vec{F} qui déplace un objet sur une distance d . Dans ce cas, le travail mécanique W effectué par la force \vec{F} est défini comme :

$$W = F d \cos \theta, \text{ pour une force constante} \quad (\text{III.1})$$

où θ est l'angle entre la force \vec{F} et le déplacement \vec{d} (voir figure III.1).

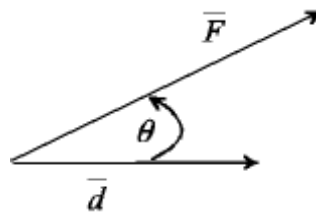


Figure III.1.

Il semble aller de soi que l'effort musculaire requis pour lever un objet dépende à la fois de son poids (la force pesanteur qui s'exerce sur lui), et de la hauteur h à laquelle on l'élève. Dans ce cas la force est dirigée vers le bas, le déplacement vers le haut et θ vaut 180° . Dès lors :

$W = -P \cdot h = -mgh$. Le travail de la force est négatif puisqu'il faut fournir un travail musculaire contre la force pesanteur.

Si un objet est suspendu à un rail horizontal sur lequel il peut glisser sans frottements, une fois qu'on lui a donné une vitesse initiale, il continuera de se déplacer à cette même vitesse (1^{ère} loi de Newton : (II.2)). Il ne faut fournir aucun effort musculaire pour que l'objet se déplace. Effectivement, avec la définition du travail ci-dessus, le travail est nul car force et déplacement sont perpendiculaires et l'angle θ vaut 90° .

Il apparaît donc que la composante d'une force perpendiculaire au déplacement ne contribue pas au travail, seule la composante qui a la même direction que le déplacement contribue. C'est pourquoi c'est la projection de \vec{F} sur le déplacement, soit $F \cos \theta$, qui intervient dans la définition III.1 du travail.

La comparaison de la définition du travail mécanique avec l'effort musculaire a ses limites. Par exemple pour maintenir dans sa main un objet à une hauteur fixe, le déplacement est nul, donc le travail mécanique est nul. Par contre le travail musculaire n'est pas nul.

La définition (III.1) peut s'écrire de manière plus concise en utilisant la notion de produit scalaire de deux vecteurs :

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}, \text{ pour une force constante}} \quad (\text{III.2})$$

On remarquera que le travail est une quantité scalaire, contrairement à la force et au déplacement qui sont des vecteurs.

3.2 Travail effectué par une force variable

Dans le cas où la force varie en intensité et/ou en direction, lors du déplacement, et que celui-ci a une forme quelconque, il faut faire appel au calcul intégral pour généraliser la définition du travail donné en III.2.

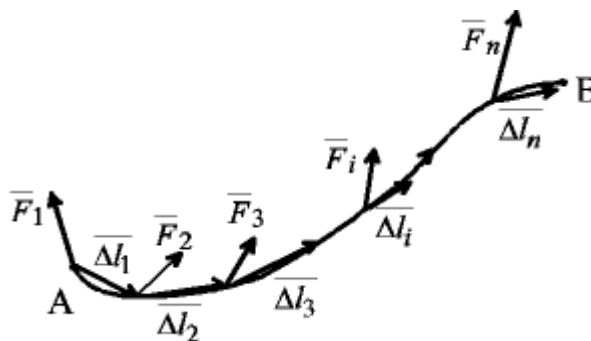


Figure III.2.

Soit la courbe AB suivant laquelle s'effectue le déplacement (voir figure III.2). Ce déplacement peut être subdivisé en n petits déplacements $\vec{\Delta l}_1, \vec{\Delta l}_2, \dots, \vec{\Delta l}_n$, suffisamment petits pour qu'en première approximation on puisse considérer que la force \vec{F} reste constante lors du déplacement $\vec{\Delta l}_i$. Dès lors le travail W effectué par la force \vec{F} , entre A et B, est donné en première approximation par :

$$W \approx \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta l}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta l}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{\Delta l}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i$$

L'approximation sera d'autant meilleure que les $\vec{\Delta l}_i$ sont petits et donc nombreux. La valeur exacte du travail sera obtenue à la limite où les $\vec{\Delta l}_i$ tendent vers zéro et n vers l'infini :

$$W = \lim_{\substack{\Delta l_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i$$

Ce qui par définition est l'intégrale curviligne de la force \vec{F} , le long de la trajectoire AB :

$$W \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

(III.3)

où $d\vec{l}$ est un déplacement infinitésimal le long de la trajectoire, c'est-à-dire tangent à celle-ci (voir figure III.3).

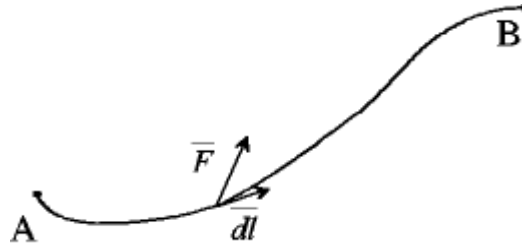


Figure III.3.

L'unité de travail du SI est le joule (J).

D'après la relation (III.1) :

$$1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$$

Un travail d'un joule correspond au travail fourni par une force de 1 newton qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa propre direction. ([Travail musculaire](#)).

3.3 Energie cinétique et son théorème

Le concept d'énergie est l'un des plus importants en sciences. Pourtant c'est un concept difficile à définir de manière générale. En effet, il existe différents types d'énergie : mécanique, électrique, chimique, thermique, etc. qui se définissent chacune séparément. Ces différentes formes d'énergie peuvent se transformer les unes dans les autres.

Nous achetons de **l'énergie électrique** emballée dans des piles ou produites et distribuée par la société d'électricité (REGIDESO). Nous utilisons de **l'énergie chimique** de la nourriture pour vivre et des carburants pour nos besoins domestiques et de transport. Les bandes de caoutchouc, les ressorts et les ligaments emmagasinent de **l'énergie élastique**. Les gouttes de pluie tombent parce qu'elles ont de **l'énergie gravitationnelle**. Nous nous chauffons et nous faisons la cuisine avec de **l'énergie thermique**. Nous pouvons produire de l'électricité ou tuer nos semblables en faisant exploser des bombes, utilisant de **l'énergie nucléaire**. Le soleil inonde la Terre de son **énergie de rayonnement**.

Dans un système isolé du monde extérieur, dit fermé, la somme de ces différentes formes d'énergie, appelée énergie totale du système, reste constante du début à la fin de n'importe quelle transformation. On dit que l'énergie totale d'un système fermé, est conservée. Les différentes formes d'énergie sont donc définies de manière à satisfaire à ce principe de conservation.

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'énergie cinétique d'un objet ponctuel qui est l'énergie que celui-ci acquiert de par sa vitesse. Dans ce cas-ci [on peut définir l'énergie comme la capacité à exécuter un certain travail](#) : une automobile lancée à faible vitesse contre une caisse posée sur le sol, va mettre cette caisse en mouvement et perdre sa propre vitesse. Pour mettre la caisse en mouvement il faut s'opposer aux forces de frottements qui existent entre la caisse et le sol. Il faut déplacer le point d'application de ces forces et donc effectuer un travail. Réciproquement, [pour faire acquérir de la vitesse](#)

à un objet, et donc lui procurer de l'énergie cinétique, il faut effectuer un travail. Il y a donc un lien étroit entre les concepts de travail et d'énergie. Travail et énergie se mesurent avec les mêmes unités.

Voyons tout d'abord comment définir l'énergie cinétique d'un objet ponctuel de masse m dans le cas où celui-ci a un MRUA d'accélération a_0 , sous l'effet d'une force constante \vec{F} . Supposons que la vitesse initiale de l'objet soit \vec{v}_0 et que la force \vec{F} soit appliquée dans le sens de \vec{v}_0 et produise un déplacement \vec{d} . Dans ce cas, force et déplacement ont même sens et :

$$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = \mathbf{F} \mathbf{d} = \mathbf{m} \mathbf{a}_0 \mathbf{d} \quad (\text{III.4})$$

D'après (I.11), on a :

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2}{2\mathbf{d}},$$

où on a posé $d = |x - x_0|$ et \mathbf{v} est la vitesse à la fin du déplacement d . En remplaçant dans (III.4), on obtient :

$$\mathbf{W} = \mathbf{m} \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}_0^2 \quad (\text{III.5})$$

La quantité $\frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}^2$, qui apparaît dans l'expression ci-dessus, se définit comme l'énergie cinétique K de la masse ponctuelle m :

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}^2 \quad (\text{III.6})$$

Dès lors, la relation III.5 peut s'écrire :

$$\mathbf{W} = \Delta \mathbf{K} \quad (\text{III.7})$$

qui exprime le fait que le travail effectué sur une masse ponctuelle est égal à la variation de son énergie cinétique. Il s'agit en fait du **théorème de l'énergie cinétique**.

Le théorème de l'énergie cinétique, exprimé sous la forme (III.7), reste valable dans le cas d'une force variable et pour une trajectoire quelconque. En effet, dans ce cas, la définition du travail de la force \vec{F} , devient :

$$\mathbf{W} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = \int_A^B \mathbf{F}_t \mathbf{d}l \quad (\text{III.8})$$

où F_t est la composante de la force, tangente à la trajectoire. La deuxième loi de Newton nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t &= m \mathbf{a}_t = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} && \text{voir relation (I.20)} \\ &= m \frac{d\mathbf{v}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dl} v && \text{(III.9)} \end{aligned}$$

En combinant (III.8) et (III.9), on obtient :

$$W = \int_A^B m \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dl} dl = \int_A^B m \mathbf{v} d\mathbf{v} = \left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right]_A^B = \Delta K .$$

Nous avons donc **le théorème de l'énergie cinétique** qui s'exprime dans le cas général par :

$$\boxed{\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2} \quad \text{(III. 10)}$$

Il dit que **le travail effectué par une force $\vec{\mathbf{F}}$ pour déplacer une masse m le long d'une trajectoire allant d'un point A à un point B est égal à la variation d'énergie cinétique de cette masse entre les points A et B.**

3.4 Energie potentielle

Alors que l'énergie cinétique d'une particule est associée à son mouvement, nous allons voir maintenant une autre forme d'énergie qui est associée à sa position. C'est pourquoi on l'appelle énergie potentielle.

Pour se rendre compte de l'existence de cette autre forme d'énergie mécanique, prenons l'exemple d'un objet de masse m lancé verticalement en l'air avec une vitesse initiale v_0 . L'objet va ralentir et sa vitesse va finalement s'annuler. La relation (I.11) permet de calculer la hauteur h à laquelle cette vitesse s'annule en posant $x - x_0 = h$ et $a_0 = -g$:

$$h = \frac{0 - v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Le signe $-$ pour l'accélération résulte de ce que le déplacement est dirigé vers le haut et l'accélération de la pesanteur, vers le bas. Ensuite l'objet va retomber sur le sol et sa vitesse va augmenter à nouveau pour atteindre la valeur suivante à son arrivée au point de lancement : $v_f^2 = 0 + 2gh = v_0^2$ (cette fois, déplacement et accélération ont le même sens). A son retour au point de départ l'objet a la même énergie cinétique qu'à l'instant initial :

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = K_0 .$$

Par contre au sommet de la trajectoire, l'énergie cinétique a disparu momentanément, pour réapparaître progressivement lors de la chute. On suppose que l'énergie cinétique s'est transformée en une autre forme d'énergie, et que la somme de ces deux formes d'énergie, appelée énergie mécanique, est restée constante pendant tout le mouvement. Clairement, dans l'exemple choisi, cette nouvelle forme d'énergie est liée à la hauteur de l'objet et donc à sa position. En effet pour une hauteur donnée $h' < h$, la vitesse de l'objet est la même à la montée et à la descente :

$$v_m^2 = v_0^2 - 2gh', \quad \text{à la montée}$$

$$v_0^2 = v_d^2 + 2gh', \quad \text{à la descente}$$

Si on admet l'idée de la valeur constante de l'énergie mécanique, une même énergie cinétique à une hauteur h' , implique une même énergie potentielle.

On va donc définir l'énergie potentielle U comme la quantité qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique K , pour que leur somme reste constante :

$$\boxed{K + U = \text{constante}} \quad (\text{III.11})$$

Dès lors, pour un déplacement produisant une variation d'énergie cinétique ΔK , la variation correspondante d'énergie potentielle, ΔU est donnée par :

$$\Delta U_A^B = U(B) - U(A) \equiv -\Delta K = -W = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

en utilisant les relations III.7 et III.3. La différence d'énergie potentielle entre les points A et B est donc donnée par :

$$\boxed{U(B) - U(A) \equiv -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}} \quad (\text{III.12})$$

Cette relation ne définit que la différence d'énergie potentielle. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près, que l'on choisit arbitrairement.

3.5 Energie potentielle de la force pesanteur

En utilisant la définition III.12, la différence d'énergie potentielle entre les points A et B, situés au voisinage de la terre (voir figure III.4), est donnée par

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{mg} \cdot d\vec{l} = -\int_{z_A}^{z_B} (-\mathbf{mg}) dz \quad (\text{III.13})$$

En effet, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est donné par la somme des produits de leurs composantes suivant trois axes de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{III.14})$$

et les coordonnées du vecteur $m\vec{g}$ sont : $(0, 0, -mg)$, celles de $d\vec{\ell}$: (dx, dy, dz) , l'axe Oz étant dirigé vers le haut.

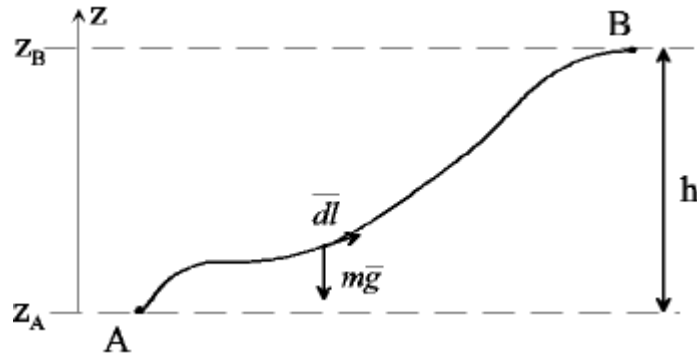


Figure III.4.

Le calcul de l'intégrale (III.13) donne :

$$U(B) - U(A) = mg(z_B - z_A) = mgh$$

Par conséquent, la différence d'énergie potentielle due à la force pesanteur est donnée par :

$$\boxed{\Delta U_g = mgh} \quad (\text{III.15})$$

où h est la différence de hauteur entre les deux points considérés. On voit que la position des points A et B dans un plan horizontal, ne joue pas, seule la hauteur du plan compte : tous les points d'un plan horizontal à hauteur constante, ont même énergie potentielle. Dans le cas de la force pesanteur, on choisit le plus souvent le niveau du sol comme niveau de référence : $U_g(\text{sol}) = 0$. Dès lors, à une hauteur h au-dessus du sol $U_g(h) = mgh$.

3.6 Forces conservatives et non conservatives

La différence d'énergie potentielle, telle qu'elle est définie par la relation (III.12), existe-t-elle pour toutes les forces ? La réponse est non. Seules les forces d'un type particulier, dites conservatives, permettent de leur associer une énergie potentielle.

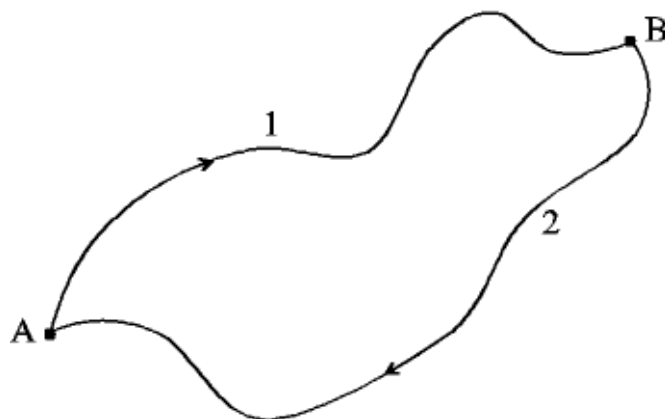


Figure III.5.

En effet, si l'énergie potentielle ne dépend que de la position, la variation d'énergie potentielle pour tout déplacement le long d'un circuit fermé, qui revient à son point de départ doit être nulle (voir figure III.5).

$$U(B) - U(A) = - \int_{A \text{ sur } 1}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{B \text{ sur } 2}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{III. 16})$$

Cette condition à l'existence d'une énergie potentielle peut encore s'exprimer en disant que le travail de la force entre A et B, ne peut dépendre du chemin suivi pour aller de A à B :

$$\int_{A \text{ sur } 2}^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{B \text{ sur } 2}^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A \text{ sur } 1}^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{d'après (III. 16)}$$

Les forces dont le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi sont dites **conservatives (ou non dissipatives ou dérivent d'un potentiel)**, les autres **non conservatives**. Cette terminologie résulte de ce que pour une force conservative, une énergie potentielle peut être définie et l'énergie mécanique, somme de cette énergie potentielle et de l'énergie cinétique, est constante : il y a [conservation](#) de l'énergie [mécanique](#). Pour les forces non conservatives il n'est pas possible de définir une énergie mécanique qui est conservée au cours du mouvement. Dans ce cas, d'autres formes d'énergie interviennent dans l'énergie totale.

La force pesanteur et la force gravitationnelle sont des forces conservatives. C'est le cas de toutes les forces qui ne dépendent pas de la vitesse. Un exemple typique de force non conservative est donné par les forces de frottements. Ces dernières tendent toujours à ralentir le mouvement et sont donc toujours de sens opposé à la vitesse. Comme $d\vec{\ell} = \vec{v} dt$,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt < 0$$

$$\text{Et } W_{AB} = \int_A^B dW < 0, \text{ de même que } \int_B^A dW < 0.$$

Sur le chemin de retour, la force change de sens de même que la vitesse. Dès lors le travail d'une force de frottement sur un circuit fermé est toujours strictement négatif. L'énergie mécanique dissipée par les forces de frottement se retrouve sous forme d'énergie thermique due à l'échauffement des surfaces en contact.

3.7 Puissance

Dans les applications industrielles de la physique, il ne suffit pas de savoir quelle quantité de travail un moteur peut fournir, il est aussi primordial de savoir combien de temps il lui faudra pour effectuer ce travail. La puissance est une grandeur qui mesure le taux de travail (le rythme avec lequel le travail est fourni) ; elle est définie comme étant une quantité de travail par unité de temps. Pour une quantité de travail ΔW fournie pendant un intervalle de temps Δt , on définit la puissance moyenne par :

$$P_m \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{III.17})$$

La puissance instantanée est obtenue en passant à la limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P} \equiv \frac{dW}{dt} \quad (\text{III.18})$$

L'unité SI de puissance est le watt (W) ; il vaut :

$$1\text{W} = 1\text{J}/1\text{s}.$$

Le watt est la puissance qu'il faut développer pour fournir un travail d'un joule en une seconde.

Il peut parfois être utile de relier la puissance instantanée à la force appliquée \vec{F} et à la vitesse \vec{v} :

$$\mathbf{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{III.19})$$

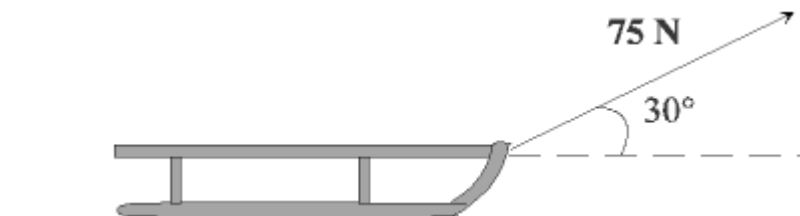
Donc :

$$\mathbf{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{III.20})$$

Addendum sur [Energie et êtres vivants](#)

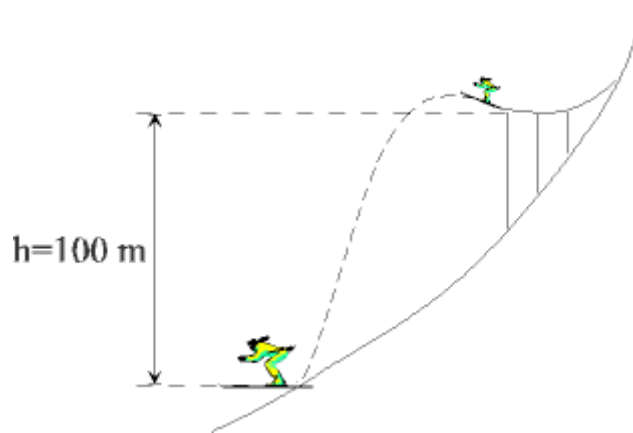
3.8 Exercices

1. Un petit astéroïde de 1000 kg dans l'espace est accéléré de l'arrêt jusqu'à 10 m/s. Etant sans poids, est-ce qu'un travail est nécessaire pendant l'accélération ? Si oui quel est ce travail ? (a) Non ; (b) Oui, 10^4J ; (c) Oui, $5 \times 10^4\text{J}$; (d) Oui, 10^4N ; (e) Oui, $5 \times 10^4\text{N}$.
2. Une femme pousse une petite voiture vers son enfant. Elle exerce sur la voiture, initialement au repos, une force horizontale constante de 5N. Elle applique cette force sur une distance de 1 m.
 - a. Que vaut le travail fourni à la voiture ? (**R** : 5 J)
 - b. Quelle est l'énergie cinétique finale de la voiture ? (**R** : 5 J)
 - c. Si la voiture a une masse de 0,1 kg, quelle sera sa vitesse finale ? (**R** : 10 m/s)
 - d. L'enfant arrête la voiture en exerçant une force \vec{F}' . Si la voiture met 0,25 m pour s'arrêter, que vaut \vec{F}' ? (**R** : 20 N)
3. Pour tirer un traîneau sur une surface horizontale, on exerce une traction de 75 N avec un angle de 30° par rapport à l'horizontale. Trouver le travail accompli quand le traîneau parcourt 8 m. (**R** : 520 J).

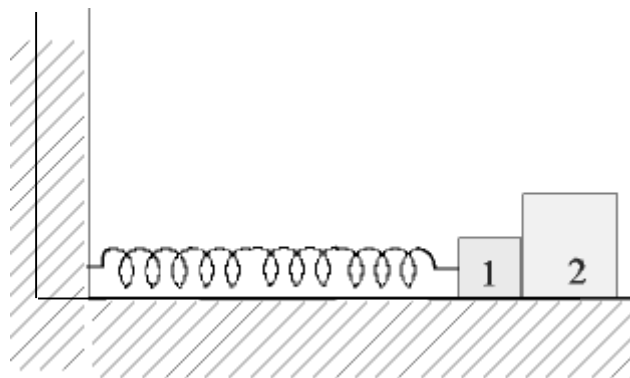


4. Un objet de masse m , initialement immobile, est accéléré par une force constante F . Que vaut son énergie cinétique après un déplacement L ? (**R** : FL).

5. Une voiture de 1000 kg dispose d'une force de freinage maximum égale à 5000 N
- Exprimer sa distance d'arrêt minimum en fonction de sa vitesse ? (**R** : $0,1 v^2$ en unités S.I.).
 - Quelle est la puissance maximum développée par les freins si la vitesse initiale de la voiture est de 108 km/h ? (**R** : 150 kW).
6. On enfonce un clou à l'aide d'un marteau de 500 g. La vitesse du marteau juste avant de frapper le clou est de 5 m/s. Le clou s'enfonce de 5 mm. Quelle est la force exercée sur le clou en supposant qu'elle est constante ? (**R** : 1250 N).
7. Un skieur lancé à une vitesse de 50 m/s quitte un tremplin de saut avec un angle par rapport à l'horizontale inconnu et atterrit en un point dont la distance verticale au tremplin est de 100 m (voir figure).
Quelle est sa vitesse juste avant l'atterrissage si on peut négliger le frottement de l'air ? (**R** : 67 m/s).



8. Un enfant de 20 kg est assis sur une balançoire au repos. Pour mettre en mouvement la balançoire (de masse négligeable), un adulte pousse sur le dos de l'enfant avec une force horizontale de 250 N sur une distance qui, projetée sur l'horizontale, vaut 40 cm. De quelle hauteur la balançoire (avec l'enfant !) va-t-elle s'élever ? (**R** : 50 cm).
- 9.



Pour comprimer un ressort d'une longueur d , il faut exercer une force $F = kd$ où k est la constante de rappel. Un ressort de constante de rappel $k = 10^4$ N/m est fixé à un mur par une extrémité. A l'autre extrémité est attaché le cube 1 de masse $m_1 = 0,3$ kg. A l'aide d'un second cube de masse $m_2 = 0,6$ kg, on comprime le ressort de 2 cm. Ensuite on le lâche. On suppose les frottements négligeables et les cubes ne collent pas l'un à l'autre.

On demande :

- a. La force de compression du ressort quand il est comprimé de 2 cm. (**R** : 200 N)
 - b. L'énergie emmagasinée dans le ressort à ce moment. (**R** : 2 J)
 - c. La vitesse du cube 2 quand il aura quitté le cube 1 c'est-à-dire lorsque le ressort aura retrouvé sa longueur d'équilibre (= longueur de ressort non comprimé). (**R** : 2,1 m/s).
10. Un store de masse égale à 1 kg et de longueur égale à 2 m s'enroule sur un axe mince placé au sommet d'une fenêtre. Quel est approximativement le travail d'enroulement ? (**R** : 10 J).

4 CHAPITRE IV : MÉCANIQUE DES FLUIDES

4.1 Statique des fluides (Hydrostatique).

4.1.1 Quelques rappels

4.1.1.1 Phases liquide et gazeuse

La matière existe communément sous différentes formes que l'on nomme souvent états. Des caractéristiques macroscopiques permettent de distinguer ces états. La masse volumique par exemple passe par trois valeurs distinctes lorsque la matière parcourt ses trois états classiques : l'état solide, puis l'état liquide, enfin l'état gazeux. Le mot fluide dénote l'habileté de couler et inclut donc les liquides et les gaz.

Les modèles atomiques sont les seuls à pouvoir donner sens aux différents états de la matière. Ces modèles sont complexes et sortent du cadre de ce cours. Nous nous limiterons donc ici à des propriétés macroscopiques élémentaires. Donnons ici un modèle simple.

Dans un solide, les atomes formant la matière se placent spontanément à une distance \vec{R}_0 l'un de l'autre. Il faut maintenant prendre en considération l'énergie associée à la température de la matière et qu'on appelle « énergie calorifique » ou chaleur. Cette énergie se transmet aux atomes sous forme d'énergie cinétique des atomes et leur permet de s'écarter de leur position d'équilibre \vec{R}_0 . Tant que cette énergie n'est pas trop grande, ils ne pourront pas s'éloigner appréciablement car ils seront rappelés par les forces interatomiques. Ils oscilleront autour de leurs positions d'équilibre \vec{R}_0 .

A l'état solide, cette oscillation est très faible et les atomes conservent une place pratiquement fixe dans la matière et donnent à celle-ci son caractère indéformable.

Lorsqu'on augmente le contenu calorifique de la matière (c-à-d la température), l'amplitude des mouvements atomiques grandit et finit par libérer les atomes du site où les figeaient les forces interatomiques sans leur permettre de s'éloigner fortement l'un de l'autre. La matière est alors en **phase liquide**.

Si on élève encore la température, l'énergie cinétique des atomes finit par dépasser l'énergie potentielle de cohésion (énergie de liaison) et la matière entre en phase gazeuse. Dans cette phase, les atomes peuvent s'éloigner l'un de l'autre sans aucune limite.

Les fluides se distinguent des solides par le fait, entre autres, qu'ils n'ont pas de forme extérieure bien définie. Elle dépendra du récipient, de la valeur des forces extérieures et des caractéristiques propres comme la tension superficielle. Un fluide ne peut pas équilibrer une force tangentielle, il va se déformer et entrer en mouvement.

Il est cependant difficile de définir la notion de fluide de façon précise. Même le diamant peut couler comme de la cire molle dans certaines conditions (si on le soumet à une pression de l'ordre de $7 \times 10^{11} \text{ Pa}$).

Un fluide est un agrégat d'atomes qui ne résiste pas notablement au [cisaillement](#).

La mobilité inhérente aux fluides (plus particulièrement l'eau) les rend indispensables à toute forme connue de la vie : n'oublions pas que nous vivons dans un aquarium qui est notre peau.

Le corps humain lui-même est un système dynamique de fluides ; nous respirons, buvons, saignons et excrétons des fluides.

4.1.1.2 Densité

- La masse volumique ρ (parfois appelée densité de la matière) est définie comme le rapport de la masse par le volume de ce corps :

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ où } m \text{ est la masse de la matière occupant le volume } V$$

Pour un liquide « idéal », la masse volumique reste constante à toute pression.

- La densité (poids spécifique) d'une substance est définie comme étant le rapport de la masse volumique de cette substance par celle de l'eau pure à 4°C. On définit souvent la densité par rapport à l'air.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} \quad d \text{ est sans dimension.}$$

4.1.2 Pression hydrostatique

4.1.2.1 Définition

Lorsqu'un fluide exerce une force sur un corps, on ne peut pas parler du point d'application de cette force car elle est répartie sur toute la surface du corps. Inversement, lorsqu'on exerce une force sur un liquide, on ne peut l'appliquer en un point isolé mais sur toute une surface.

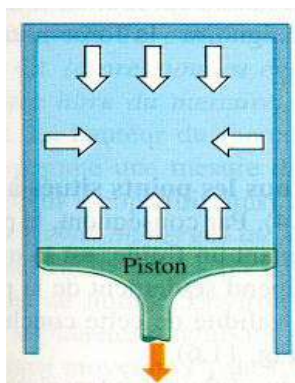


Figure IV.1.

Pour la mécanique des fluides on est ainsi amené à introduire la notion de pression comme étant la force par unité de surface :

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}; (p = \frac{F}{S} : \text{force sur surface pressée})$$

La pression est une **quantité scalaire** ; en chaque point elle a une valeur mais pas une direction (la force est toujours perpendiculaire à l'élément de surface).

L'unité S.I. de la pression est le pascal ($1Pa = 1 N/m^2$).

L'unité cgs est la barye = 1 dyne/cm²). On utilise aussi ses multiples :

- un bar = 10⁶ baryes = 10⁵ Pa.
- un millibar = 10⁻³ bar = 10³ baryes.

Autres unités :

- Le torr ou mm de mercure = pression exercée, sous l'effet de son poids, par une colonne de mercure de 1 mm de hauteur.

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &= 1,36 \times 981 = 1334 \text{ baryes} \\ &= 133,3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

- L'atmosphère correspond à une pression de 760 mm Hg

- Le « psi »= pound per square inch (livre force par pouce carré) :

$$1 \text{ psi} = 1 \text{ livre force/pouce carré}$$

$$1 \text{ livre} = 0,453 \text{ kg et } 1 \text{ pouce} = 0,0254 \text{ m}$$

4.1.2.2 Pesanteur et pression hydrostatique

La pesanteur est la cause de la pression hydrostatique. En effet, considérons un volume infinitésimal (un [timbre-poste](#) d'aire S immergé) de liquide situé à une profondeur h de la surface (cf. figure IV.2.) dans un réservoir. Cet élément de volume a la forme d'un parallélépipède d'épaisseur verticale dz .

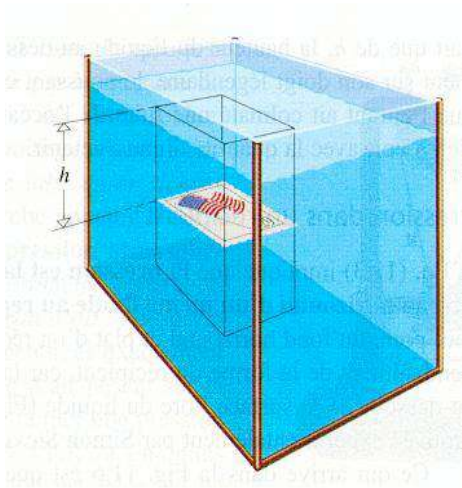


Figure IV.2.

Chaque face horizontale a une surface S . Le volume est au repos, ce qui fait que la résultante de toutes les forces sur ce volume est nulle.

Or on sait que les forces sont toujours perpendiculaires aux parois et valent (pression) x (surface).

Nous supposons que la masse volumique du liquide est constante dans tout le liquide.

Sur base de la figure IV.3, on voit que :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_p = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{F}_2 = (PS)\vec{1}_z \\ \vec{F}_3 = -(P + dP)S\vec{1}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_4 - (P + dP)S\vec{1}_z + (PS)\vec{1}_z + \vec{F}_p = 0$$

En faisant la projection de cette équation sur les différents axes, on trouve :

Suivant l'axe des Y : $F_1 = F_4$. Suivant l'axe des X , les 2 forces (omises sur la figure) s'équilibrent également.

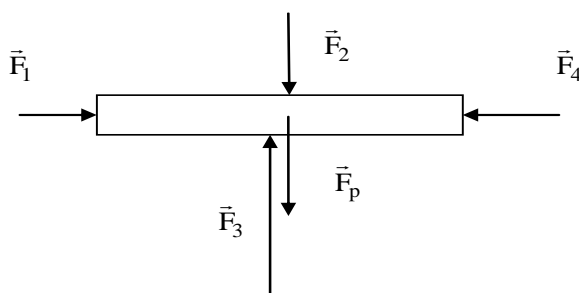


Figure IV.3.

Suivant l'axe des Z (vertical vers le bas) :

$$PS - (P + dP)S + F_p = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Or F_p est le poids de l'élément de volume :

$$F_p = g dm = g \rho dV = g \rho S dz$$

(IV.1) devient :

$$PS - (P + dP)S + g \rho S dz = 0$$

$$\Leftrightarrow PS - PS - S dP + g \rho S dz = 0$$

$$\Leftrightarrow dP = g \rho dz \Leftrightarrow \int_{P_0}^P dP' = \int_{z=0}^{z=h} g \rho dz$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P = P_0 + \rho gh}$$

où P_0 est la pression à la surface du liquide (qui peut donc être la pression atmosphérique) et h la profondeur.

Cas particulier : pression dans un récipient

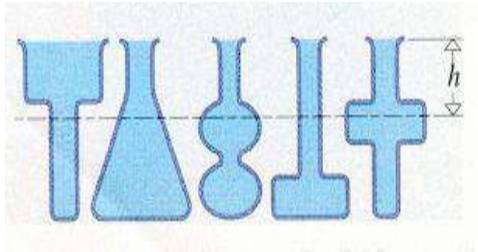


Figure IV.4.

La pression ne dépend que de la profondeur et de la masse volumique du liquide.

La pression à la profondeur h est la même, quelle que soit la forme du récipient (figure IV.4).

D'après la figure IV.5, nous pouvons écrire :

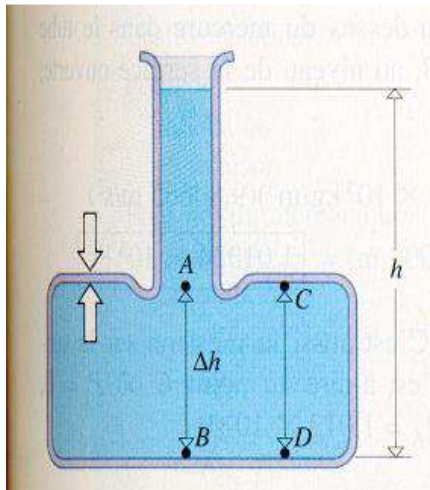


Figure IV.5

- $P_B - P_A = \rho g(h_B - h_A) = \rho g \Delta h$
- $P_D = P_B$ et $P_C = P_D - \rho g \Delta h = P_A$
- La pression en C est la même qu'en A bien qu'il n'y ait pas de liquide au-dessus de C. En C, le récipient exerce une force de réaction sur le liquide.

Application : le manomètre

C'est un tube en U (figure IV.6) contenant un liquide de masse volumique ρ et qui sert à mesurer les

pressions des gaz. Le liquide peut être du mercure ($\rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) ou, quand il s'agit de mesurer des pressions plus faibles, de l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) ou de l'huile ($\rho = 0,92 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ pour l'huile d'olive).

Le manomètre peut également servir à la mesure des pressions dans un liquide, à condition que ce liquide ne se mélange pas au fluide du manomètre.

$$P_A = P_B \Rightarrow P = P_{atm} + \rho g h \quad (IV.2)$$

où P est la pression dans l'enceinte.

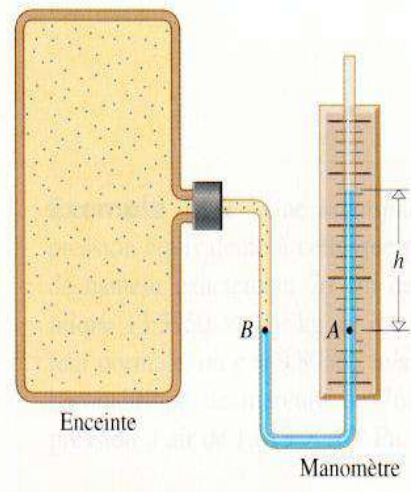


Figure IV.6.

Exercice : Deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 sont à l'équilibre dans un manomètre. Déterminer ρ_2 si ρ_1 est connue.

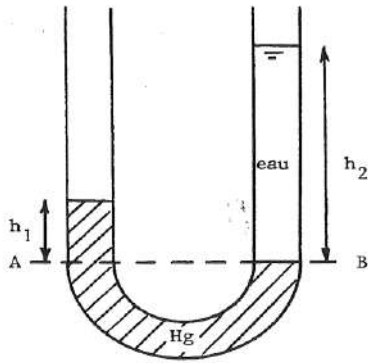


Figure IV.7.

Exemple : l'eau et le mercure

Si h_1 est la hauteur du liquide (Hg) de masse volumique ρ_1 et h_2 celle du second liquide (eau), alors $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$. On peut donc déterminer ρ_2 si ρ_1 est connue en mesurant les hauteurs h_1 et h_2 .

Pour que le fluide de la perfusion coule dans la veine (figure IV.8) il faut une différence de pression de 15 mm de Hg (2 kPa). Il faut donc une hauteur minimale de 20 cm.

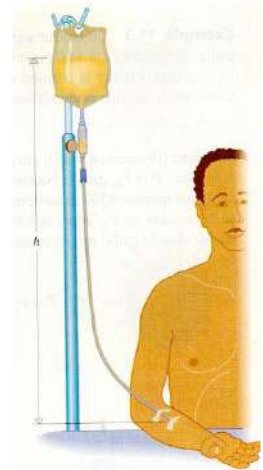


Figure IV.8.

Remarques :

- Dans l'équation (IV.2), P désigne la pression absolue. La différence entre celle-ci et la pression atmosphérique est la pression de jauge ; elle vaut exactement ρgh .
- Dans une jauge de tension artérielle, le **sphygmomanomètre**, la pression mesurée est celle d'un manchon gonflable enroulé autour du bras.

4.1.2.3 Travail des forces de pression.

Par définition, le travail est donné par la relation suivante (voir III.3) : $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. Dans le cas des forces de pression, force s'exerçant normalement à la surface, le travail est :

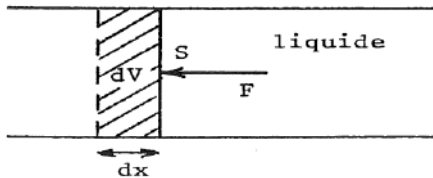


Figure IV.9.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Si la pression est constante, on a :

$$W = p(V_B - V_A)$$

4.1.2.4 Poussée d'Archimède

Un corps totalement immergé dans un liquide déplace un volume de ce liquide égal à son propre volume.

L'expérience montre aussi qu'un objet immergé semble plus léger : l'eau le pousse vers le haut, le soutenant partiellement d'une manière ou d'une autre. Archimède a précisé quantitativement le phénomène en énonçant ce qui sera appelé le **principe d'Archimède** :

Un corps immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé.

Cette force ascendante est connue sous le nom de **poussée d'Archimède**.

La poussée d'Archimède est causée par la pesanteur agissant sur le fluide. Pour le comprendre, considérons un cylindre plein, dont la base a une surface S , immergé dans un fluide de masse volumique

ρ_f . La pression manométrique sur sa base inférieure P_1 est plus grande que celle sur sa face supérieure P_h et la différence ΔP est à l'origine de la poussée d'Archimède F_A . Si l'on choisit l'axe Z dirigé vers le haut, la résultante des forces sur le cylindre vaut $\vec{F}_A = \vec{F}_B - \vec{F}_H$.

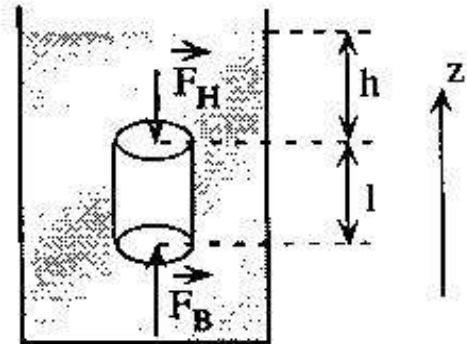


Figure IV.10.

$\Delta P = \rho_f g(h + l - h) = \rho_f g l$ où l est la hauteur du cylindre.

$$F_A = S \Delta P = \rho_f g S l = \rho_f g V = m_f g$$

- Le fluide exerce, sur le cylindre, une force verticale dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé (la masse volumique qui apparaît dans l'expression est celle du fluide).
- Si l'objet flotte, c'est effectivement la partie immergée seule qui est responsable de la poussée d'Archimède.

Remarque : Flottabilité

Si un corps de volume V_s est complètement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f , il subit une poussée égale à $V_s \rho_f g \vec{1}_z$ (si l'axe vertical OZ est dirigé vers le haut).

D'autre part le corps est soumis à son poids $-V_s \rho_s g \vec{1}_z$, où ρ_s est la masse volumique du corps.



Figure IV.11.

La force résultante (appelé aussi poids apparent) est : $\vec{R} = (\rho_f - \rho_s) V_s g \vec{1}_z$

- Si $\rho_s > \rho_f$, la résultante des forces est dirigée vers le bas ; le corps tombe au fond du récipient contenant le liquide.
- Si $\rho_s < \rho_f$, la résultante des forces est dirigée vers le haut ; le corps remonte à la surface du liquide. Il prend une position d'équilibre pour laquelle une partie seulement du solide est immergée (voir figure IV.11).

Le volume qui reste immergé ($V_{im} < V_s$) sera tel que le poids et la poussée s'équilibrent :

$$\rho_s g V_s = \rho_f g V_{im} \Rightarrow V_{im} = \frac{\rho_s}{\rho_f} V_s$$

Pour que l'équilibre du solide soit réalisé, il faut, non seulement que les grandeurs de ces forces parallèles (de sens opposées) soient les mêmes, mais également que ces forces aient même support.

Ceci revient à dire que, dans la position d'équilibre, le centre de masse (CM) du solide et le centre de poussée (CP) soient sur la même verticale. L'équilibre sera toujours stable si le CP est plus haut que le CM.

Rappels :

a) Equilibre stable, instable et indifférent

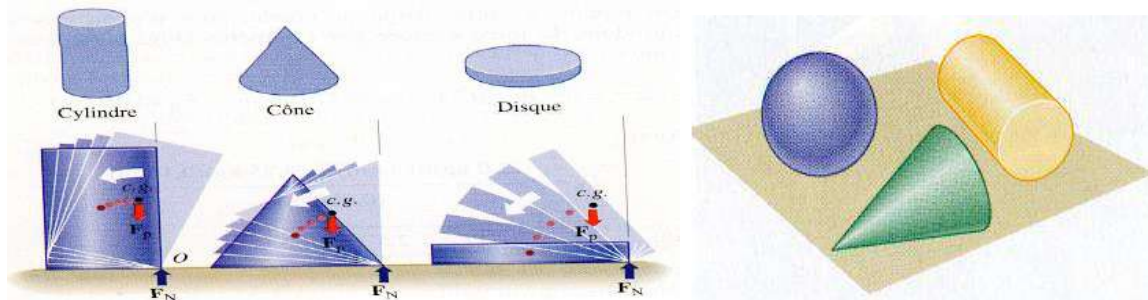


Figure IV.12.

La figure IV.12 montre différentes positions de solides en équilibre stable (figure en haut gauche), instable (figure en bas gauche), ou indifférent (figure de droite).

b) Moment d'une force

La grandeur qui détermine la possibilité qu'a une force \vec{F} pour produire une rotation est appelée le **moment de cette force** : $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, $\tau = r_{\perp} F = r F \sin \theta = r F_{\perp}$. Le point d'application de la force est l'extrémité du vecteur-position \vec{r} par rapport à O. $\vec{\tau}$ dépend à la fois de l'orientation de la force et de la position de son point d'application.

Le bras de levier d'une force \vec{F} est la distance de \vec{F} à l'axe de rotation ; c'est-à-dire la distance perpendiculaire r_{\perp} du point O à la ligne d'action de la force.

La grandeur du moment de force par rapport à O est $\tau = r_{\perp} F = r F_{\perp} = r F \sin \theta$.

Une application familière des conditions d'équilibre est donnée par l'exemple de deux personnes sur une balançoire (figure IV.14). Si leurs poids sont inégaux, ils constateront rapidement que l'équilibre implique que la personne adulte se place plus près du point d'appui.

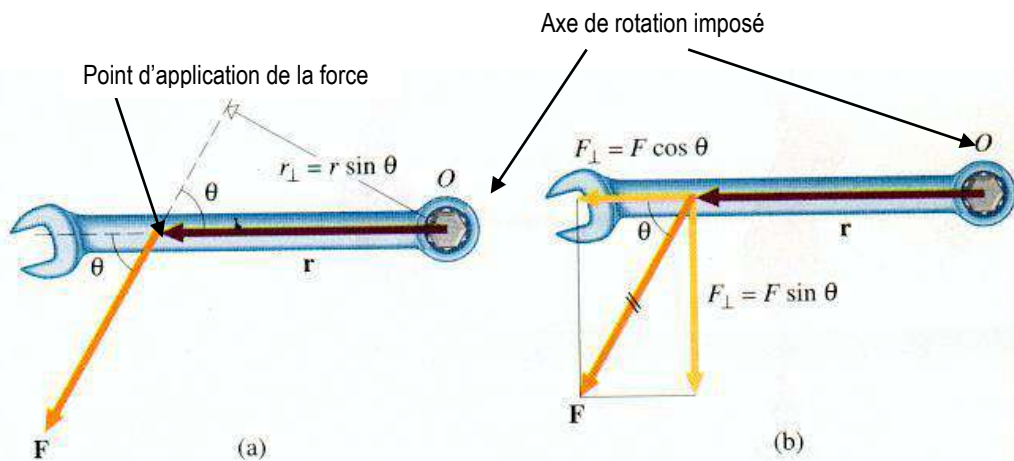


Figure IV.13.

c) Equilibre d'un corps solide

Un corps rigide est en équilibre statique si, étant dans un état de repos au départ, il y reste au cours du temps (absence de mouvement de translation ou de rotation du corps).

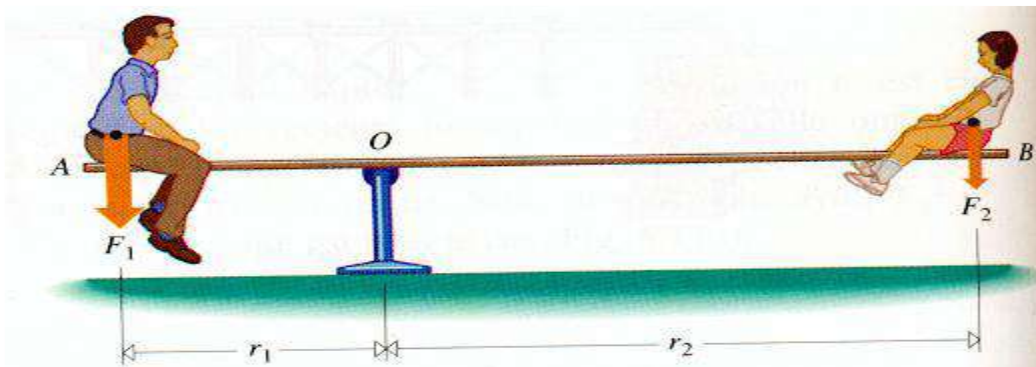


Figure IV.14

Il y a **deux conditions** à remplir par les forces agissant sur un corps rigide (en divers points d'application) pour qu'il soit en équilibre :

- la **résultante (somme) des forces extérieures** doit être nulle (empêche la translation globale du corps).

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \text{ (3 équations scalaires) (Exemple sur la figure IV.15).}$$

- la **résultante (somme) des moments des forces extérieures** doit être nulle (empêche la rotation globale du corps) : $\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = 0$ (3 équations scalaires).

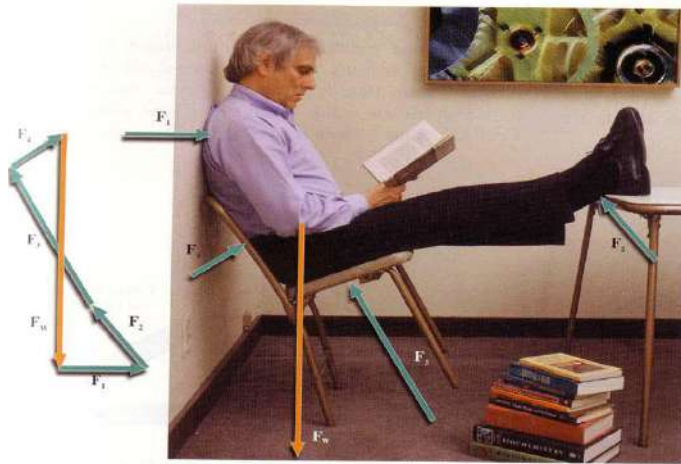


Figure IV.15. Cette personne est soumise à 5 forces : son interaction gravitationnelle avec la Terre produit une force verticale dirigée vers le bas (\vec{F}_g) ; le mur exerce une force (\vec{F}_1) la table exerce une force (\vec{F}_2) et la chaise exerce 2 forces (\vec{F}_3 et \vec{F}_4). Chacune de ces forces s'exerce dans une direction normale à la partie du corps qui la reçoit. Comme la personne est en équilibre, la résultante de toutes ces forces est nulle.

d) Applications :

i. Centre de poussée et centre de masse

La stabilité d'un bateau dépend de la position relative du centre de masse (CM) par rapport à celle du centre de poussée (CP) (figure IV.16.)

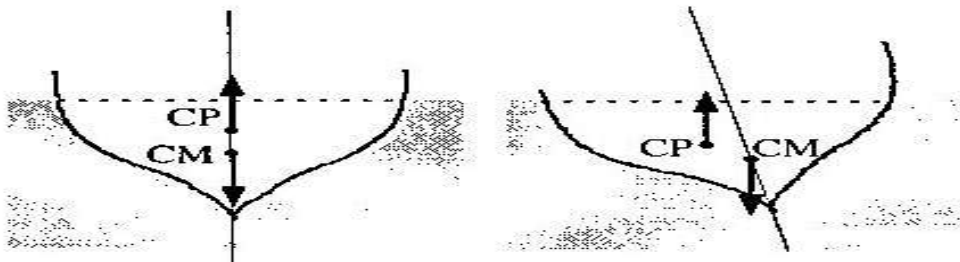


Figure IV.16.

Il faut que le CP soit plus haut que le CM pour que la poussée d'Archimède redresse le bateau en cas de vagues. Lorsqu'il se penche, un couple de forces se crée qui assure la rotation (équilibre stable) et redresse le bateau. Dans le cas inverse (CM plus haut que CP), le bateau se penche de plus en plus en et coule (équilibre instable).

ii. Equilibre d'un corps qui flotte à la surface de l'eau

Comme mentionné ci-dessus, la position du corps est stable si la somme des moments du poids et de la poussée d'Archimède est nulle, i.e. lorsque le corps est vertical (figure IV.17c) ; il faut évidemment que la personne sorte le visage de l'eau pour respirer.

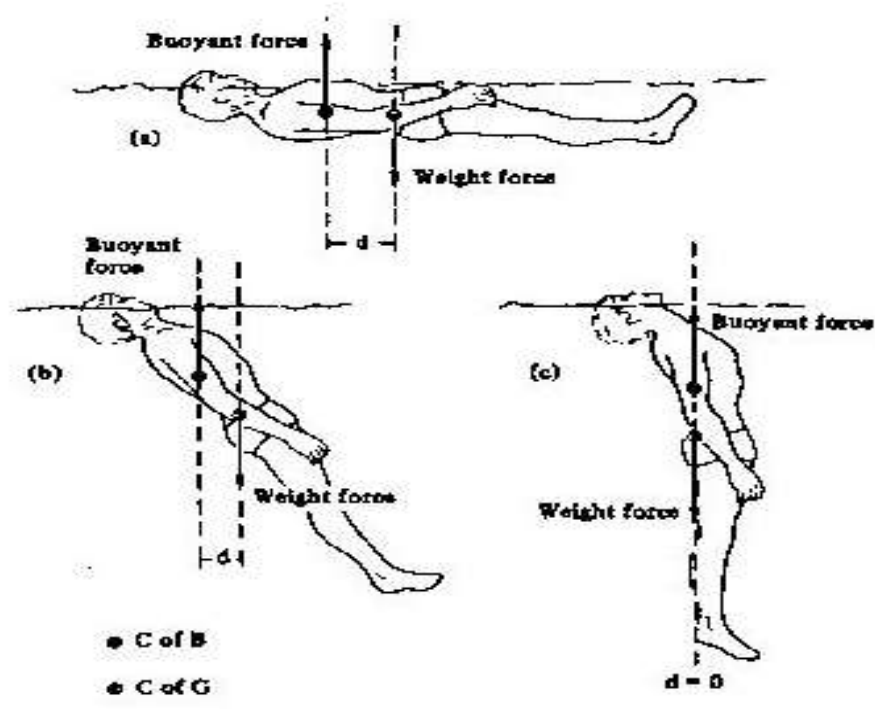


Figure IV.17

De plus, c'est un équilibre stable car si un moment apparaît, il ramène le corps à cette position d'équilibre (figure IV.17a et b) pour laquelle le point d'application de la force de poussée (buoyant force) est plus haut que celui du poids (weight forces).

4.1.2.5 Transmission des pressions par les liquides, Principe de Pascal

4.1.2.5.1 Enoncé du théorème

Un fluide transmet intégralement et en tous ses points toute variation de pression produite en un quelconque de ses points (figure IV.18).



Figure IV.18

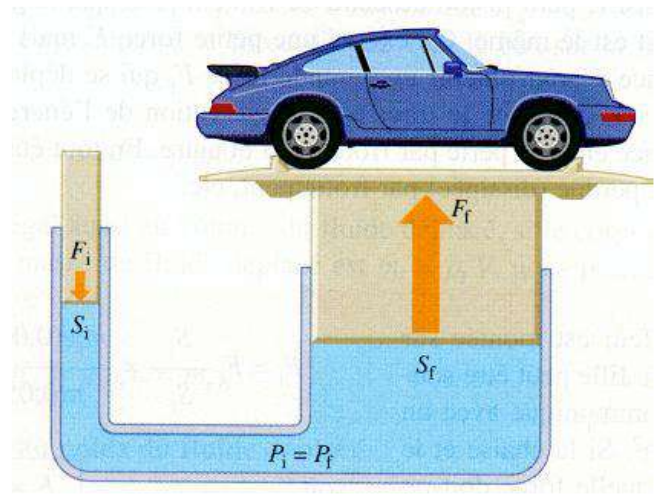


Figure IV.19

4.1.2.5.2 Application : la presse hydraulique

La figure IV.19 illustre le principe de la presse hydraulique : c'est un multiplicateur de force.

$$p_i = \frac{F_i}{S_i} = p_f = \frac{F_f}{S_f} \quad \Leftrightarrow \quad F_f = \frac{S_f}{S_i} F_i$$

On peut obtenir une force très élevée. Cette force est utilisée pour comprimer ou déformer certains matériaux entre un plateau fixe et un plateau mobile soulevé par le grand piston.

La presse hydraulique est très employée dans l'industrie car elle permet d'obtenir de très grandes forces avec une installation relativement simple. Elle sert à comprimer certaines marchandises encombrantes (pailles, coton, friperies, etc.), à déformer des métaux (tôles ondulées), à presser des graines oléagineuses ou des fruits.

4.2 Force de cohésion dans les liquides

4.2.1 Tension superficielle.

Dans les liquides réels, les forces de cohésion agissant entre les molécules ne sont pas toujours négligeables.

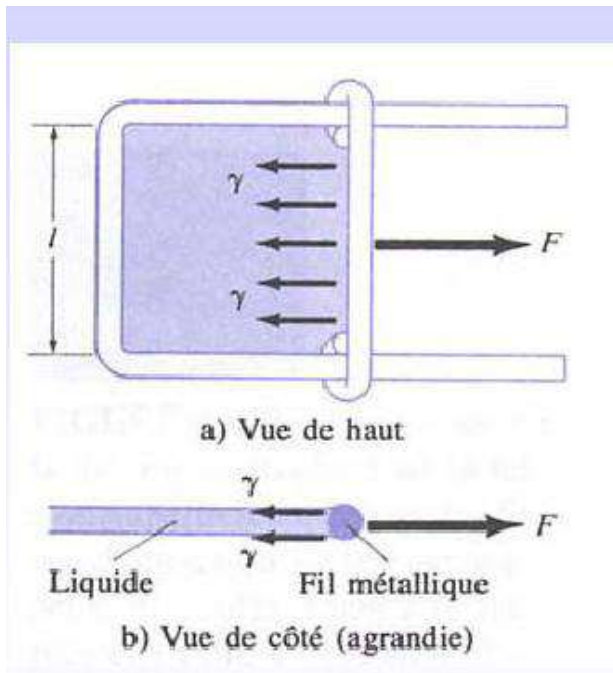
Pour apprécier cette remarque il suffit de faire une expérience très simple : si l'on verse un peu d'eau sur une table, on la voit se rassembler en gouttes plus ou moins aplaties. Cela n'est pas prévu par la définition d'un liquide (simplifié). De même, une goutte d'eau à l'extrémité d'un robinet qui coule ou une gouttelette de rosée suspendue à un brin d'herbe prennent une forme presque sphérique qui les fait ressembler à de minuscules ballons remplis d'eau ([document 1](#)). On peut faire flotter une pièce de monnaie à la surface de l'eau, même si sa masse volumique est supérieure à celle de ce fluide ([document 2](#)). La surface d'un liquide se comporte comme une membrane étirée soumise à une tension.



Figure IV.20 : La tension superficielle permet à un pengő hongrois en aluminium de ne pas couler au fond du verre d'eau (bien que l'aluminium soit plus dense que l'eau) et aux Gerris de se déplacer à la surface d'une mare.

La surface d'un liquide agit comme si elle subissait l'effet d'une tension s'exerçant parallèlement à elle et provenant des forces d'attraction qui unissent ses molécules : les forces de cohésion. Cet effet porte le nom de **tension superficielle**. Il s'agit en réalité d'une quantité, symbolisée par γ , qui se définit comme la force par unité de longueur L agissant le long de n'importe quelle ligne de la surface d'un liquide et tendant à la resserrer ([document 3](#)) :

$$\gamma = \frac{F}{L}$$



Pour bien comprendre ce concept, considérons l'instrument en forme de U de la figure IV.21 ([document 4](#)) et qui renferme une fine pellicule de liquide. A cause de la tension superficielle, il faut une force \vec{F} pour tirer le fil métallique mobile ayant deux surfaces, l'une supérieure et l'autre inférieure. La tension superficielle vaut donc :

$$\gamma = \frac{F}{2l}$$

Ce type d'instruments très sensible permet de mesurer la tension superficielle de différents liquides (voir tableau IV.1). Il faut noter l'effet non négligeable de la température.

Figure IV.21 : Appareil en forme de U muni d'un fil métallique et qui sert à mesurer la tension superficielle de la pellicule de liquide qu'il contient.

Pour comprendre ceci il faut examiner ce phénomène au niveau moléculaire. Une molécule au sein d'un liquide est soumise de la part des autres molécules à des forces de **Van der Waals** d'origine électromagnétique qui varient en r^{-7} . Ce type d'interaction décroît très rapidement et peut être négligé au-delà d'une distance de l'ordre d'une dizaine de nanomètres. A la surface de séparation de deux fluides (liquide-gaz ou liquide-liquide), la situation est différente, en particulier, l'isotropie des forces qui existe au

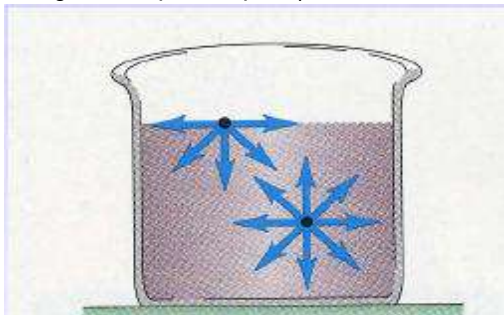


Figure IV.22 : Illustration de la théorie moléculaire de la tension superficielle : seules les forces d'attraction s'exerçant sur deux molécules, l'une à la surface et l'autre à l'intérieur du liquide, y sont représentées.

sein d'un fluide n'est plus la règle et il apparaît un système de forces différent dans la **couche capillaire** (couche de liquide proche de la surface de séparation de deux fluides et dont l'épaisseur est de l'ordre du nanomètre).

La molécule à l'intérieur du liquide est en équilibre grâce aux forces exercées sur elle dans toutes les directions par les autres molécules (figure IV.22).

Celle qui se trouve à la surface est aussi en équilibre (puisque le liquide reste immobile) même si les seules forces qui agissent sur elle proviennent de molécules situées au-dessous d'elle (ou au même niveau). Elle subit donc une force d'attraction nette dirigée vers le bas et tendant à comprimer légèrement la couche de surface – mais seulement jusqu'à un certain point puisque cette force vers le bas est contrebalancée par une autre (de répulsion) agissant vers le haut et due au contact étroit (ou aux collisions) avec les molécules situées sous la surface. Cette compression amène le liquide à réduire son aire de surface. Ainsi, l'eau prend naturellement la forme de gouttes sphériques puisqu'une sphère constitue la plus petite surface possible pour un volume donné.

Tableau IV.1 : Tension superficielle de quelques substances

| Substance | Tension superficielle (N/m) | Température (°C) |
|-----------------------|-----------------------------|------------------|
| Ethanol | $2,23 \times 10^{-2}$ | 20 |
| Huile d'olive | $3,20 \times 10^{-2}$ | 20 |
| Glycérine | $6,31 \times 10^{-2}$ | 20 |
| Eau | $7,56 \times 10^{-2}$ | 0 |
| | $7,28 \times 10^{-2}$ | 20 |
| | $6,62 \times 10^{-2}$ | 60 |
| | $5,89 \times 10^{-2}$ | 100 |
| Mercure | 0,465 | 20 |
| Sang (37 °C) | $5,8 \times 10^{-2}$ | |
| Plasma sanguin (37°C) | $7,3 \times 10^{-2}$ | |
| Solution de savon | $1,6 \times 10^{-2}$ | 20 |
| Oxygène | $1,57 \times 10^{-2}$ | -193 |

La tension superficielle permet aux insectes de marcher sur l'eau et à des objets plus denses que l'eau de flotter (figure IV.20).

4.2.2 Angles de contact et capillarité

La surface d'un liquide en contact avec une surface solide fait un certain angle avec cette surface solide (figure IV.23). L'angle de contact α est le résultat de la compétition entre les forces moléculaires liquide-liquide (force de cohésion) et liquide-solide (force d'adhésion) et dépend de la nature du solide et du liquide en présence (tableau IV.2). De plus, il dépend de l'état de propreté et du degré de poli de la surface du solide.

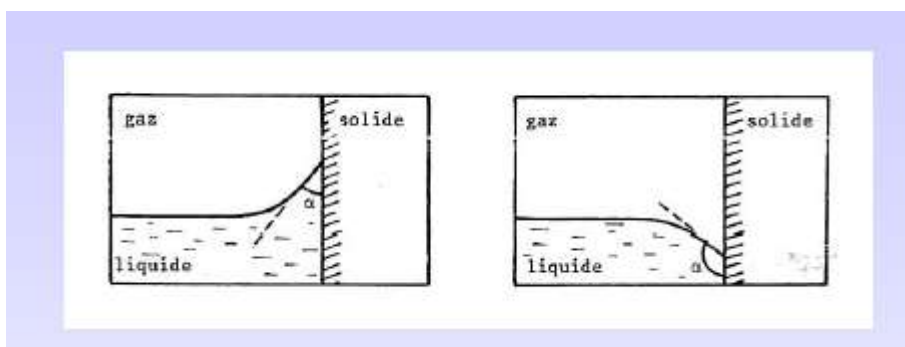


Figure IV.23 : Angle de contact pour deux liquides en contact avec une surface solide. (a) $\alpha < 90^\circ$, (b) $\alpha > 90^\circ$

Si α est inférieur à 90° , la surface du liquide se présente comme sur la figure IV.23.a ; dans un tube étroit, ce même liquide va s'élever, malgré la pesanteur, à une hauteur h (figure IV.24). Si α est supérieur à 90° , le liquide se présente comme sur la figure IV.23.b ; dans un tube capillaire, ce même liquide subira

une dépression. Si $\alpha = 90^\circ$, le niveau du liquide restera inchangé. L'ascension et la dépression d'un liquide dans un tube capillaire sont appelées phénomènes de **capillarité**.

Tableau IV.2 : Angles de contact pour quelques interfaces liquides-solide

| Interface | Angle de contact |
|-----------------------------------|------------------|
| Eau- verre propre | 0° |
| Ethanol-verre propre | 0° |
| Mercure- verre | 140° |
| Eau – argent | 90° |
| Eau - paraffine | 107° |
| Iodure de méthylène – verre Pyrex | 30° |

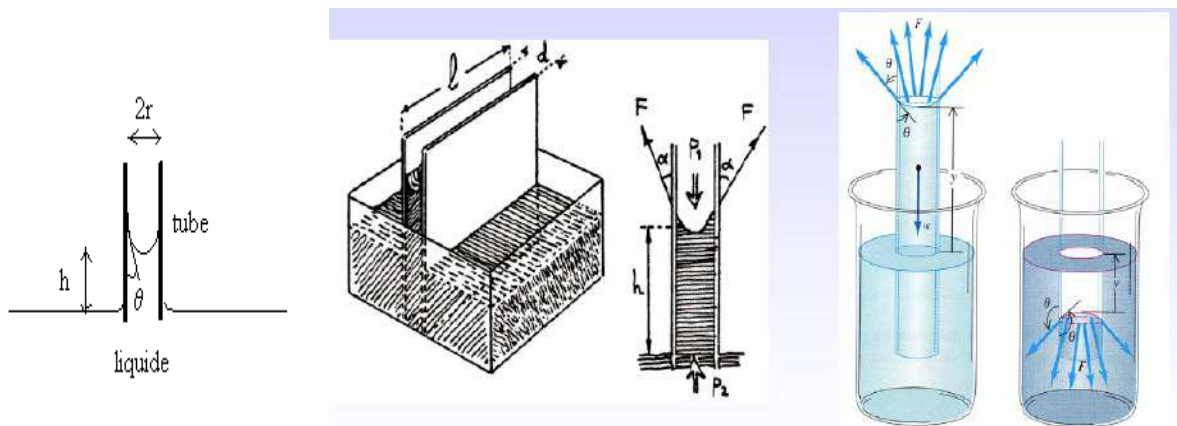


Figure IV.24 : Ascension d'un liquide dans un tube capillaire de rayon r . La hauteur d'ascension vaut h et l'angle de contact est θ (α dans le texte).

Examinons maintenant la relation entre la hauteur d'ascension du liquide dans le capillaire et l'angle de contact. Considérons un liquide de masse volumique ρ dans un tube de rayon r (figure IV.24). L'angle de contact est inférieur à 90° . La force résultante verticale est égale à la composante verticale de la tension superficielle multipliée par la longueur ℓ de la surface liquide en contact avec le tube ; cette longueur ℓ est égale à la circonférence $2 \pi r$ du tube. La résultante verticale vaut donc

$$F_v = 2r \pi \gamma \cos \theta$$

Le volume de la colonne de liquide sous la surface incurvée du liquide, appelée ménisque, vaut $V = \pi r^2 h$ et son poids est $F_w = \rho g V = \rho g \pi r^2 h$. Le liquide s'élève jusqu'à ce que $F_v = F_w$. Ceci entraîne

$$2r \pi \gamma \cos \theta = \rho g \pi r^2 h$$

Cette relation fournit la hauteur d'ascension du liquide dans un tube capillaire :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \quad (*)$$

Cette relation a les propriétés suivantes : si $\theta = 90^\circ$, alors $h = 0$ et il n'y a ni ascension, ni dépression ; si θ est supérieur à 90° , $\cos \theta$ et par conséquent h sont négatifs et il y a dépression. La hauteur

(d'ascension ou de dépression) est proportionnelle à γ et inversement proportionnelle à r . Les effets de la capillarité sont donc les plus spectaculaires pour les faibles valeurs de r .

L'équation (*) n'est valable que pour une section droite circulaire. Mais ceci ne veut pas dire que l'ascension capillaire ne se produit pas dans des tubes de forme géométrique quelconque. Dans le cas général, la hauteur dépend toujours de $\gamma/\rho g r$ où r représente maintenant une dimension caractéristique de cette géométrie et le coefficient numérique n'est évidemment plus le même. La tension superficielle est responsable de l'absorption de l'eau par les étoffes fines et poreuses dans lesquelles l'angle de contact est inférieur à 90° . Elle intervient également dans l'ascension de la sève dans les arbres.

Exemple :

La sève des arbres, qui est principalement constituée d'eau, s'élève dans un système de capillaires de rayon $r = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$. La masse volumique de l'eau est de $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la hauteur d'ascension de l'eau dans un arbre, à une température de 20°C .

Solution : Le tableau IV.1 donne $\gamma = 7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$ pour la tension superficielle de l'eau. Appliquons la formule (*)

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \\
 &= \frac{2(7,28 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1})}{(10^3 \text{ kg m}^{-3})(9,8 \text{ m s}^{-2})(2,5 \times 10^{-5} \text{ m})} \\
 &= 0,594 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Les arbres atteignant des hauteurs de plusieurs dizaines de mètres, l'ascension capillaire est incapable de rendre compte du ravitaillement en eau des arbres.

La figure IV.25.b montre la forme d'une goutte d'eau sur de la paraffine. Sous l'effet d'un agent mouillant, dont les molécules comportent des parties hydrophobe et hydrophile, la goutte prendrait plutôt la forme montrée sur la figure IV.25.a. La partie hydrophile de la molécule s'attache à la surface de l'eau, tandis que la partie hydrophobe évite les molécules d'eau et est attirée vers la surface de la paraffine.

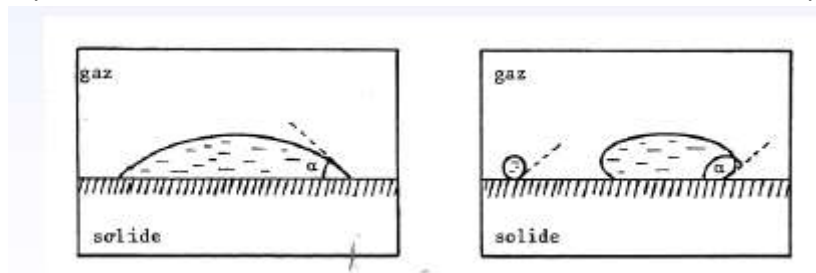


Figure IV.25 : Des gouttes d'eau sur de la paraffine (a) avec addition d'un agent mouillant, (b) Eau pure.

Des agents imperméabilisants ont l'effet contraire : ils entraînent une augmentation de l'angle de contact, ce qui fait que l'eau pénètre plus difficilement dans les pores fins d'une étoffe.

4.2.3 Loi de Laplace

La loi de Laplace est une relation liant la différence de pression entre les deux faces d'une membrane élastique ou d'un film liquide à la tension régnant dans cette membrane ou ce film.

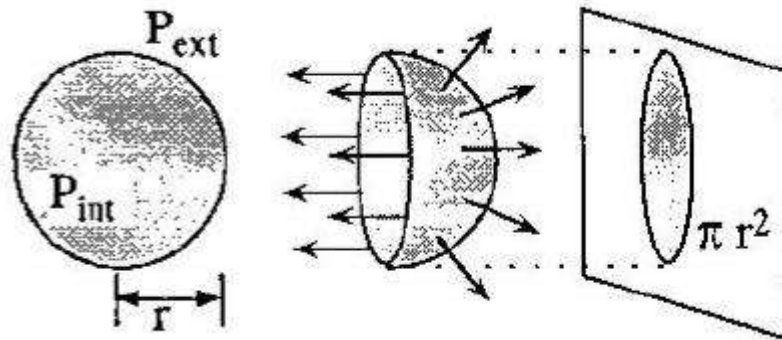


Figure IV.26 : Une membrane ou un ballon sphérique, avec des pressions intérieure et extérieure P_i et P_o . (b) La sphère est coupée en deux par un plan imaginaire. Les flèches orientées vers la gauche représentent des forces exercées par la paroi. Les flèches normales à la surface représentent les forces dues à la différence de pression.

Considérons une membrane sphérique remplie d'un fluide. La paroi de la membrane exerce une force par unité de longueur que l'on peut appeler tension de paroi γ (figure IV.26) ; cette force par unité de longueur dépend de l'épaisseur de la paroi et est donc associée à la membrane dans son ensemble, et non aux deux surfaces seulement, comme c'est le cas dans un film liquide. Les poumons et le cœur peuvent être décrits approximativement au moyen d'un modèle de membrane élastique.

Soit $\Delta P = P_i - P_o$ la différence entre les pressions intérieure et extérieure et calculons la relation qui existe entre ΔP et la tension de paroi dans le cas d'une membrane sphérique de rayon r . Supposons la sphère coupée en deux par le plan d'un grand cercle (figure IV.26.b). La force totale exercée par la tension de paroi sur l'hémisphère de droite est égale au produit de γ par la circonférence $2\pi r$ de l'hémisphère. Cette force, égale en module à $2\pi r\gamma$, est dirigée vers la gauche. Elle doit être égale et opposée à la résultante des forces que la surpression ΔP produit sur les divers éléments de surface de l'hémisphère. Les forces dues à cette pression sont, en chaque point, perpendiculaires à la surface. Par raison de symétrie, toutes les composantes s'annulent, à l'exception de celles qui pointent vers la droite. La résultante de celles-ci est égale à ΔP multipliée par l'aire projetée πr^2 . Comme il y a équilibre, on a :

$$2\pi r\gamma = (P_i - P_o)\pi r^2$$

ou, pour une membrane sphérique :

$$P_i - P_o = \frac{2\gamma}{r}$$

C'est la **loi de Laplace pour une membrane sphérique**. Elle est ainsi nommée en l'honneur du marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827), physicien et mathématicien français.

Il découle de la loi de Laplace que la différence de pression requise pour conserver sa forme à une petite sphère est supérieure à celle nécessaire pour une grande sphère. La loi de Laplace n'est pas seulement valable pour le modèle considéré, une membrane ou un ballon, mais également pour une goutte liquide sphérique.

Exemple : Considérons un ballon gonflé de rayon $r = 0,1 \text{ m}$. La pression à l'intérieur du ballon est de $1,001 \times 10^5 \text{ Pa}$. La pression extérieure vaut 10^5 Pa . Que vaut la tension de paroi ?

Solution : Appliquons la loi de Laplace :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{r}{2}(P_i - P_0) = \left(\frac{0,1 \text{ m}}{2}\right)(1,001 \times 10^5 \text{ Pa} - 10^5 \text{ Pa}) \\ &= (0,05 \text{ m})(10^5 \text{ Pa}) = 5 \text{ N m}^{-1}\end{aligned}$$

Ce résultat représente la tension qui règne dans la paroi du ballon gonflé. Comme le ballon est élastique, la tension de la paroi augmente avec le rayon.

Lorsqu'un liquide est en équilibre avec sa propre vapeur, la pression de la phase gazeuse est appelée la *tension de vapeur*. On peut l'envisager comme étant la pression nécessaire pour empêcher le liquide de s'évaporer davantage ; elle doit contrebalancer la différence de pression $P_i - P_0$ au travers d'une interface liquide-vapeur. Une goutte liquide en équilibre avec sa vapeur doit donc avoir une surpression $P_i - P_0$ égale à la tension de vapeur.

Exemple :

La tension superficielle de l'eau est de $7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$ à 20°C . La pression de vapeur de l'eau à 20°C vaut $2,33 \times 10^3 \text{ Pa}$. Quel est le rayon de la gouttelette d'eau la plus petite que l'on puisse former sans qu'elle s'évapore ?

Solution : La différence de pression ne doit pas être supérieure à $2,33 \times 10^3 \text{ Pa}$. Résolvons l'équation de Laplace par rapport à r :

$$r = \frac{2\gamma}{P_i - P_0} = \frac{2(7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1})}{2,33 \times 10^3 \text{ Pa}} = 6,25 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Quand on passe de l'extérieur à l'intérieur d'une bulle de savon, on traverse deux surfaces sphériques. Chacune d'elles est le siège d'une force de tension superficielle. Ceci entraîne un facteur 2 supplémentaire pour la surpression à l'intérieur d'une bulle :

$$P_i - P_0 = \frac{4\gamma}{r} \text{ (bulle sphérique)}$$

Pour une membrane cylindrique de rayon r , la loi de Laplace s'écrit :

$$P_i - P_0 = \frac{\gamma}{r} \text{ (tube cylindrique)}$$

En physiologie, la quantité $P_i - P_0$ est appelée la pression **transmurale**, c'est-à-dire la surpression dans un vaisseau sanguin. Il ne faut pas confondre cette pression avec la pression motrice responsable de l'écoulement du fluide à travers le vaisseau.

Examinons maintenant la variation du rayon d'une bulle de savon avec la pression extérieure. Supposons que l'on réduise la pression extérieure progressivement jusqu'à 0. Alors $P_i - P_0$ est remplacé par P_i et l'équation de Laplace s'écrit :

$$P_i = \frac{4\gamma}{r}$$

Comme P_i est supérieur à $P_i - P_0$, le premier membre de cette équation est supérieur à ce qu'il était précédemment. Comme γ est constant, le second membre ne peut augmenter et rétablir l'égalité que si

r diminue ! Mais ceci est contraire à l'expérience ; nous savons que la bulle de savon se dilatera. L'explication en est que la pression interne P_i ne reste pas constante lorsque P_0 diminue.

Exemple :

La pression à l'extérieur d'une bulle de savon de rayon r est initialement égale à la moitié de la pression intérieure. Ensuite, on réduit la pression extérieure jusqu'à $P'_0 = 0$. Trouver la nouvelle pression P'_i et le nouveau rayon r' en supposant que la tension superficielle et la température restent constantes.

Solution : Initialement, $P_0 = \frac{P_i}{2}$ et $P_i - P_0 = \frac{P_i}{2}$. Appliquons la loi de Laplace :

$$\frac{1}{2}P_i = \frac{4\gamma}{r}$$

Après avoir réduit la pression extérieure à une valeur nulle, nous avons $P'_i - P'_0 = P'_i$ et

$$P'_i = \frac{4\gamma}{r'}$$

Le rapport des 2 équations nous donne

$$\frac{P'_i}{P_i} = \frac{r}{2r'}$$

Comme la température reste constante, l'équation d'état des gaz parfaits donne $P_i V = P'_i V'$. Le volume d'une sphère étant égale à $\frac{4\pi r^3}{3}$, nous trouvons la seconde relation entre P_i et P'_i :

$$\frac{P'_i}{P_i} = \frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3}$$

En égalant ces 2 expressions de $\frac{P'_i}{P_i}$, nous trouvons $r'^2 = 2r^2$ ou $r' = 1,41 r$. Le rayon a donc augmenté comme prévu.

4.2.4 Exercices

1. Par capillarité un liquide monte de 5 mm dans un tube de 1 mm² de section. Dans un tube de 4 mm² de section, à quelle hauteur montera le liquide ? **(R : 2,5 mm)**
2. A quelle hauteur monte l'eau dans un tube capillaire de 0,2 mm de rayon ? Le liquide se raccorde tangentiellement au tube, c-à-d que l'angle θ est nul. **(R : 7,65 cm)**
3. Dans le capillaire de l'exercice précédent, quelle est la variation de pression qu'on observe en passant de l'air dans le liquide ? Est-ce une dépression ou une surpression ? **(R : 750 Pa, dépression)**

4.3 Dynamique des fluides (Hydrodynamique).

Pour décrire le mouvement d'un grand nombre de particules (molécules), nous étudions à chaque instant le vecteur-vitesse \vec{v} et la masse volumique ρ du fluide. En général, ces deux quantités peuvent dépendre à la fois de \vec{r} et du temps t .

Plutôt que de suivre le mouvement d'une molécule donnée, nous nous plaçons en un point repéré par le vecteur-position \vec{r} à l'instant t et étudions ce qui s'y passe. Les variables dynamiques utilisées sont la masse volumique et la pression.

4.3.1 Dynamique des fluides parfaits.

Un fluide est parfait s'il est :

- stationnaire, i.e. si la vitesse est indépendante du temps : $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$;
- irrotationnel, i.e. si la vitesse angulaire est nulle en tout point ;
- incompressible, i.e. si la masse volumique est constante ;
- non visqueux, i.e. qu'il n'y a pas de forces de frottement ni de force tangentielle.

Nous appellerons en outre « **ligne de flux** ou ligne de courant » la trajectoire d'une molécule du liquide. Ces lignes de flux ne se croisent pas (grâce à (b) et (c)) et peuvent former des tubes de flux. Une molécule donnée ne sort jamais de son tube de flux.

4.3.1.1 Equation de continuité.

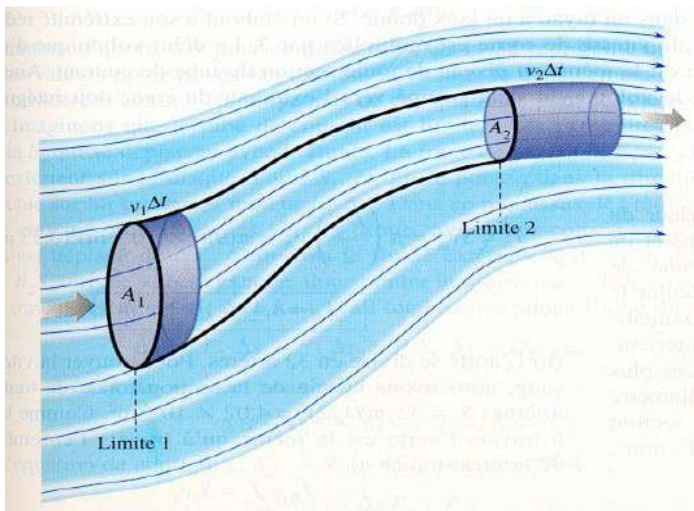


Figure IV.27

Considérons un tube de flux de sections A_1 et A_2 aux points de coordonnées \vec{r}_1 et \vec{r}_2 où les grandeurs des vitesses sont v_1 et v_2 respectivement (figure IV.27).

Le débit Q d'un fluide à travers une section est le volume qui la traverse par unité de temps : $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ (en m^3/s).

Comme aucune molécule ne peut quitter son tube de flux, il y a conservation de la masse (débit indépendant de \vec{r}).

$\Delta V = A \cdot v \cdot \Delta t$, où A est la section du tube de flux et v la vitesse.

On peut donc écrire $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ (conservation de la masse).

Pour un fluide incompressible (hypothèse c), $\rho_1 = \rho_2$, on a alors $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ ou

$Q = v A = \text{constante}$: équation de continuité.

Q est le débit volumique (en m^3/s), et ρQ est le débit massique (en kg/s).

Si la section du tube augmente, la vitesse d'écoulement diminue et vice versa. Dans le corps humain, le sang circule d'abord dans l'aorte seule (de section $\approx 2,5 \times 10^2 \text{ mm}^2$), se répartit dans les diverses artères (de section totale $\approx 2 \times 10^3 \text{ mm}^2$) puis en diverses artérioles (de section totale $\approx 4 \times 10^3 \text{ mm}^2$) et finalement en des milliards de capillaires (de section totale $\approx 2,5 \times 10^5 \text{ mm}^2$) ; la vitesse d'écoulement diminue bien qu'individuellement les vaisseaux sanguins soient de plus en plus fins.

Le débit Q d'un liquide incompressible est le même au niveau de toute section du tube de courant. Ainsi, dans le corps humain, le volume du sang pompé vers l'extérieur du cœur doit intégralement y retourner.

Exemples

1. Dans l'aorte, dont le rayon moyen est de 1 cm environ, le sang circule avec une vitesse de 30 cm/s. A quelle vitesse le sang parcourt-il les capillaires, si chacun d'eux a un rayon d'environ $4 \times 10^{-4} \text{ m}$? Comme il y a des milliards de capillaires, leur section totale atteint près de 2.000 cm^2 .
2. Estimez l'aire de la section d'une conduite pour que l'air chaud qui circule à 3 m/s puisse remplacer l'air d'une pièce de 300 m^3 toutes les 15 minutes.

4.3.1.2 Equation de Bernoulli.

Un fluide sous pression contient de l'énergie car un travail sur lui a été nécessaire pour établir cette pression. Si vous ouvrez subitement une bouteille de bière qui a été bien secoué, le fluide en sort avec plein d'énergie cinétique : de l'énergie potentielle a été emmagasiné dans le système sous forme de pression. **Un fluide dont la pression varie subit une variation d'énergie.**

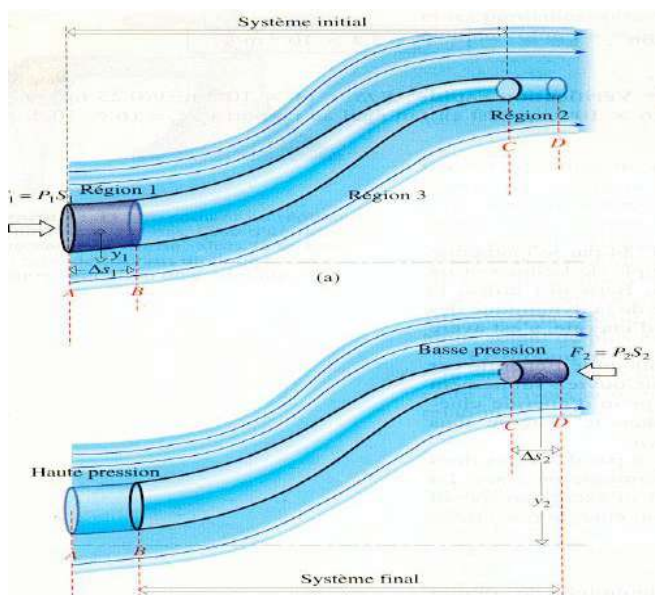


Figure IV.28

Considérons un élément de fluide idéal en mouvement sous l'influence d'une variation de pression (figure IV.28). Cette variation de pression exerce un travail qui se traduit par une variation de son énergie cinétique ou potentielle (notamment gravitationnelle) :

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U$$

Déterminons d'abord ΔW pour ce fluide. La figure IV.28 représente un tube de courant étroit, où les valeurs précisées de la pression, la vitesse, le déplacement et la hauteur, doivent être considérées comme les moyennes de ces quantités pour les éléments de volume du fluide.

La force $F_1 = P_1 S_1$ pousse le disque d'aire S_1 dans la direction du mouvement et effectue un travail $W_1 = F_1 \Delta s_1$. En conséquence, le disque d'aire S_2 s'est déplacé de Δs_2 . Cette fois le fluide extérieur agit sur le disque avec une force $F_2 = P_2 S_2$ dirigée dans le sens contraire du mouvement et exerce sur lui un travail résistant $W_2 = -F_2 \Delta s_2$.

Le travail total exercé sur le fluide du tube est donc :

$$\Delta W = F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 = P_1 S_1 \Delta s_1 - P_2 S_2 \Delta s_2$$

Comme $\Delta s_i = v_i \Delta t$, on aura $\Delta W = (P_1 S_1 v_1 - P_2 S_2 v_2) \Delta t$.

Utilisant l'équation de continuité ($S_1 v_1 = S_2 v_2 = Sv$), nous trouvons : $\Delta W = v S \Delta t (P_1 - P_2)$.

Comme la masse de l'élément de volume déplacé d'une extrémité du tube à l'autre est

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho (Sv \Delta t) \Rightarrow Sv \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho},$$

ce qui fait que

$$\Delta W = \frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2)$$

Si le fluide se déplace d'une région de haute pression à une région de basse pression, la pression lui fournit un travail.

Considérons maintenant la variation de l'énergie cinétique. Le système initial auquel nous nous intéressons est le tube de courant qui s'étend de A à C. Une masse de fluide Δm occupant la région 1 située entre A et B se déplace avec une vitesse v_1 . Au bout d'un temps Δt , cet élément est entré dans la région 3 et une masse équivalente Δm est sortie de la région 3 pour occuper la région 2 située entre C et D. Le système considéré s'étend maintenant de B à D. Le résultat effectif est donc le transfert de la masse Δm de la région 1 où la vitesse est v_1 à la région 2 où la vitesse est v_2 . La variation de l'énergie cinétique est donc :

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

La variation de l'énergie potentielle gravitationnelle est due au déplacement de Δm de la région 1 vers la région 2 :

$$\Delta U_g = \Delta m g (y_2 - y_1)$$

Comme $\Delta W = \Delta K + \Delta U$, nous obtenons :

$$\frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2) = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g (y_2 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

Réarrangeant les termes, nous pouvons écrire **l'équation de Bernoulli** :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Le long d'une ligne de courant, un fluide parfait en écoulement régulier et laminaire obéit au **théorème de Bernoulli** :

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

Dans cette équation, chaque terme a les dimensions d'une énergie par unité de volume ou densité d'énergie.

- P est la densité d'énergie de pression due aux forces internes du fluide en mouvement ;
- $\frac{1}{2}\rho v^2$ est la densité d'énergie cinétique associée au mouvement global du fluide ;
- $\rho g y$ est la densité d'énergie potentielle associée à la position dans le champ gravitationnel.

Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie. Aussi longtemps qu'aucune énergie n'entre ou ne quitte le système, la densité d'énergie totale contenue dans le fluide est constante au cours de son déplacement le long d'un tube de courant.

Remarques :

- Bien que l'équation de Bernoulli soit établie pour un fluide incompressible, elle peut être appliquée à un gaz, à condition que les variations de pression ne dépassent pas quelques pourcents.
- Si le fluide est au repos, $v = 0$ et $P + \rho g y = \text{constante}$ ou $P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1)$

4.3.1.3 Applications

4.3.1.3.1 Ecoulement d'un réservoir par un petit orifice : théorème de Torricelli

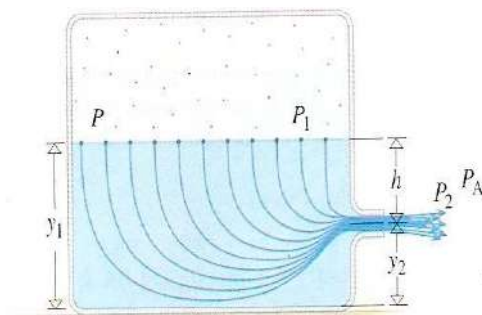


Figure IV.29.

Considérons un réservoir fermé contenant un liquide de masse volumique ρ et muni d'un orifice de surface S_2 , duquel coule vers l'extérieur (figure IV.29). Le réservoir est supposé être assez grand pour que ni le niveau du liquide ni la pression P au-dessus de sa surface ne varient de façon appréciable pendant l'écoulement.

Nous avons $P_1 = P$ et $P_2 = P_A$ (pression atmosphérique).

D'après l'équation de Bernoulli, nous trouvons :

$$P + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_A + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{où } h \text{ est la différence de}$$

$$\text{hauteur.} \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - P_A)}{\rho} + 2gh.$$

De l'équation de continuité, nous déduisons que, si $S_1 \gg S_2$, $v_2 \gg v_1$ (et v_1^2 est négligeable devant v_2^2).

Cas particulier : Si $P = P_A$ (réservoir ouvert à l'air libre), on trouve : $v_2^2 = 2gh$,

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} = \text{théorème de Torricelli.}$$

Remarques :

- Si le frottement est négligeable, le liquide jaillit avec une vitesse égale à celle qu'il aurait gagnée en chute libre à partir de la hauteur h .
- Si le jet était dirigé directement vers le haut, il atteint presque la hauteur y_1 (niveau de la surface du liquide dans le réservoir).

4.3.1.3.2 Ecoulement dans un tube de section variable : effet Venturi.

Certaines applications pratiques de la dynamique des fluides résultent de l'interdépendance de la pression et de la vitesse.

Considérons un segment de tuyau ayant une section droite S_1 , qui se rétrécit à un certain endroit jusqu'à

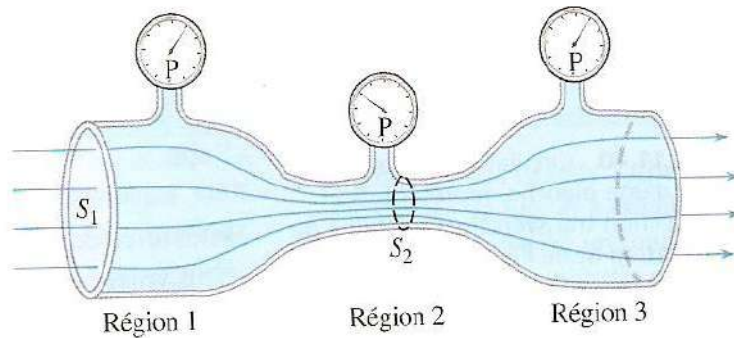


Figure IV.30

avoir une section S_2 (figure IV.30). D'après le théorème de Bernoulli dans les deux régions 1 et 2 :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad ;$$

car $y_1 = y_2$ (les deux régions sont à la même altitude).

En utilisant l'équation de continuité pour éliminer v_1 ,

on obtient :

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \frac{(S_1^2 - S_2^2)}{S_1^2}}$$

Comme $S_1 > S_2$, le second membre de l'équation est positif et donc $P_1 > P_2$; il y a donc une chute de pression dans la région étroite. Cette diminution de la pression qui accompagne l'augmentation de la vitesse est appelée **effet Venturi**.

La mesure de $P_1 - P_2$ et la connaissance des aires permettent de déterminer la vitesse v_2 ; v_1 est ensuite

fournie par l'équation $v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$.

D'autre part, si on mesure la différence de pression entre les deux régions, on peut alors calculer la valeur du débit volumique. On peut montrer que $\boxed{P_1 - P_2 = \rho gh}$

A partir des deux relations encadrées, on trouve :

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \frac{(S_1^2 - S_2^2)}{S_1^2}, \text{ et comme le débit } Q = S_1 v_1 = S_2 v_2, \text{ on aura :}$$

$$Q = \sqrt{2gh \frac{S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Applications :

- Lorsqu'un grand camion passe à côté d'une voiture, la pression entre les deux véhicules est réduite, ce qui donne l'impression au conducteur de la voiture d'être attiré par le camion. (Expérience : quand on souffle entre deux feuilles de papier parallèles, placées à une distance d'environ 2 cm)

- **L'artériosclérose** survient quand une plaque se forme sur les parois intérieures des artères, gênant le flux sanguin. Une telle obstruction en une chute de tension, par effet Venturi (figure IV.31). A une



Figure IV.31

étape avancée de la maladie, la différence de pression, à l'intérieur et à l'extérieur, peut être assez grande pour que l'artère se ferme momentanément. La tension artérielle du sang l'ouvre, pour se fermer de nouveau et ainsi de suite,

produisant une palpitation vasculaire qui peut être entendue à l'aide d'un stéthoscope.

Exemple :

Le flux sanguin à travers une artère de gros calibre d'un chien est détourné dans un débitmètre de Venturi. La partie plus large du tube a une section droite S_1 de $0,08 \text{ cm}^2$, égale à celle de l'artère. La section droite S_2 de la partie rétrécie est de $0,04 \text{ cm}^2$. La chute de tension dans le débitmètre est de 25 Pa . Quelle est la vitesse v du sang dans les artères ? (**R : $0,125 \text{ m/s}$**).

$$\left(\frac{S_1}{S_2} = \frac{0,08}{0,04} = 2 ; \rho(\text{sang}) = 1059,5 \text{ kg/m}^3. \right)$$

4.3.1.3.3 Trompe à vide.

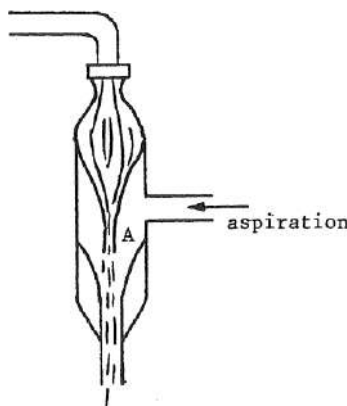


Figure IV.32

La diminution de pression produite par la diminution de section est mise à profit dans la trompe à vide. L'eau sous pression venant d'un robinet traverse en A une partie étroite ; elle acquiert une très grande vitesse et la pression en A est fortement abaissée, ce qui permet d'obtenir un certain vide.

Addendum sur l'application à la [circulation du sang](#)

4.3.2 Dynamique des liquides réels : Ecoulement visqueux.

4.3.2.1 Forces de viscosité

Le théorème de Bernoulli exprimant le principe de conservation de l'énergie ne peut plus s'appliquer à l'écoulement d'un liquide réel car une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur (chocs de particules entre elles et avec la paroi du tube).

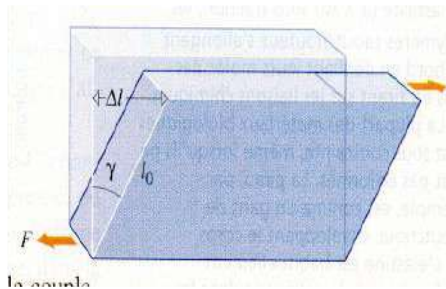


Figure IV.33

Si on applique des forces sur un corps solide, il commence à se déformer sous la contrainte de cisaillement (figure IV.33). Mais au fur et à mesure qu'il se déforme, il développe une résistance de plus en plus grande à la distorsion et il atteint bientôt une position d'équilibre avec une nouvelle forme.

Par contre, un fluide ne peut même pas s'opposer à la petite force de cisaillement : ses interactions atomiques ne sont pas assez fortes, c'est ce qui le rend fluide.

Dans les liquides il existe une résistance dynamique, due à la cohésion moléculaire (forces d'attraction de Van der Waals) : on l'appelle la **viscosité** (η).

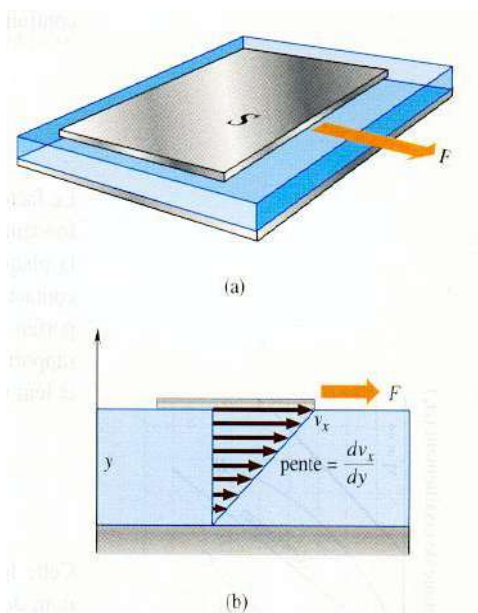


Figure IV.34

Le long d'une canalisation, le liquide réel s'écoule par glissement de lames liquides les unes sur les autres : l'écoulement est dit laminaire (ou lamellaire).

Considérons une surface plane fixe sous une couche d'épaisseur y (figure IV.34). Une plaque de surface S flotte sur le liquide. Si une force constante F lui est appliquée, la plaque accélère d'abord puis atteint très vite une vitesse limite constante v_x lorsque la force appliquée est exactement compensée par la force de viscosité. Entre 2 lames successives distantes de dy il y a une variation de vitesse dv_x .

$\frac{dv_x}{dy}$ est le gradient de vitesse.

L'entraînement des lames successives montre qu'il y a une force de frottement, ou force de viscosité, proportionnelle à la surface S des lames et au gradient de

vitesse :

$$F = \eta S \frac{dv_x}{dy}$$

Le coefficient de proportionnalité η se nomme **coefficient de viscosité dynamique** du fluide et s'exprime en Ns/m^2 (poiseuille $\text{P}\ell$ ou $\text{Pa} \cdot \text{s}$). La couche de liquide en contact avec la plaque en mouvement est entraînée avec celle-ci, tandis que la couche de liquide, en contact avec la surface fixe, est immobile, $v_x = 0$. Newton a suggéré que le fluide se comportait comme s'il était formé de couches ou de lames minces qui se déplacent, l'une par rapport à l'autre. Un tel modèle devient plus réaliste si le nombre de lames est très grand et leur épaisseur est très faible ; alors on peut écrire la loi de Newton pour la viscosité :

$$\sigma_s = \frac{F}{S} = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad \text{où } \sigma_s \text{ est une contrainte de cisaillement.}$$

Cette loi est assez bien vérifiée pour une grande classe de substances, connues sous le nom de liquide newtoniens, comme l'eau, le pétrole lampant et l'air. Elle ne s'applique pas aux liquides « épais » (figure IV.35).

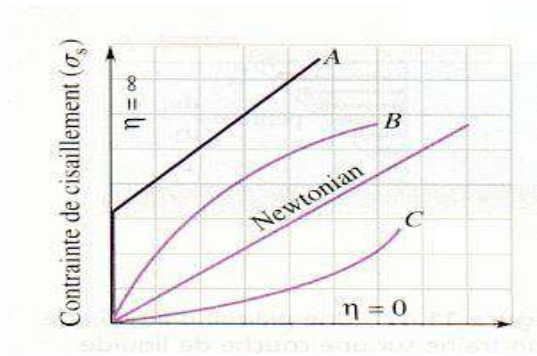


Figure IV.35

- A : dentifrice
- B : graisse
- newtonien : eau, air
- C : sable mouillé

Pour les liquides, le coefficient de viscosité diminue lorsque la température augmente, mais il augmente avec la pression. C'est la raison pour laquelle on

chauffe le goudron avant de le répandre. C'est aussi une bonne raison pour mettre une couverture sur une personne blessée : la température de ses extrémités tend à baisser à cause de la diminution du flux sanguin ; cela augmente la viscosité du sang et la situation empire.

Tableau IV.3 : Coefficients de viscosité de quelques fluides

| Fluide | Température | Coefficient de viscosité, η (Pa.s) |
|-------------------------|-------------|---|
| Eau | 0 | $1,8 \times 10^{-3}$ |
| | 20 | $1,0 \times 10^{-3}$ |
| | 100 | $0,3 \times 10^{-3}$ |
| Sang | 37 | $\approx 4 \times 10^{-3}$ |
| Plasma sanguin | 37 | $\approx 1,5 \times 10^{-3}$ |
| Alcool éthylique | 20 | $1,2 \times 10^{-3}$ |
| Huile à moteur (SAE 10) | 30 | 200×10^{-3} |
| Glycérine | 20 | 1500×10^{-3} |
| Air | 20 | $0,018 \times 10^{-3}$ |
| Hydrogène | 0 | $0,009 \times 10^{-3}$ |
| Vapeur d'eau | 100 | $0,013 \times 10^{-3}$ |

Pour les gaz, le coefficient de viscosité augmente avec la température : il est à peu près proportionnel à la racine carrée de la température absolue, mais il est indépendant de la pression.

En Biologie, on compare souvent le coefficient de viscosité d'un fluide à celui de l'eau ; on définit ainsi le coefficient de viscosité relative :

$$\eta_r = \frac{\eta}{\eta_{eau}} \text{ où } \eta_{eau} = 10^{-3} \text{ Pa.s à } 20^\circ\text{C}$$

On définit aussi le **coefficient de viscosité cinématique** $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ où ρ est la masse volumique (l'unité SI est le m^2/s mais une unité pratique est le cm^2/s appelé le stokes (Sk)), et η le coefficient de viscosité dynamique.

4.3.2.2 Loi de Poiseuille (Jean Léonard Marie, médecin français).

Considérons un fluide s'écoulant dans un tube suffisamment lentement pour que le régime soit laminaire. La couche de fluide en contact direct avec la paroi adhère à celle-ci et la vitesse d'écoulement est donc nulle au contact avec la paroi du tube (figure IV.36).

La vitesse dans une section droite du tube augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi et elle est maximum au centre du tube. Cherchons l'expression de la vitesse du fluide à une distance r de la ligne centrale passant par le milieu du tube (axe du cylindre).

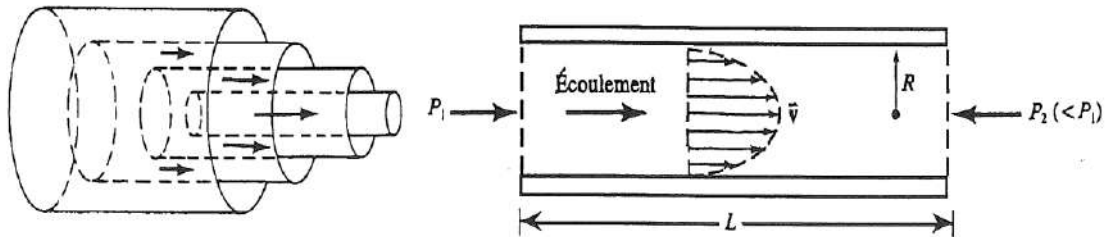


Figure IV.36

Au sein du fluide, délimitons un cylindre de rayon r (avec $r < R$) et de longueur L .

Ce cylindre est soumis à des forces de pression sur ses deux bases et est ralenti par les forces visqueuses sur sa paroi latérale. Comme il est en écoulement en régime permanent, la résultante des forces (force de viscosité et force de pression) est nulle : $|\vec{F}_f| = |\vec{F}_p|$ où F_f est la force de viscosité et F_p est la force de pression.

$$\Delta P = P_1 - P_2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_p| = \Delta P S \quad \text{où } S \text{ est la surface de la base du cylindre } (S = \pi r^2).$$

Force de viscosité : $|\vec{F}_f| = -\eta S \frac{dv}{dr}$; où $S = 2\pi r L$ est la surface latérale du cylindre. Le signe $-$ est due au fait que $\frac{dv}{dr} < 0$ car la vitesse diminue quand r augmente.

$$\text{On aura alors } \Delta P \cdot \pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^v dv' = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \int_R^r r' dr'$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)}$$

La vitesse est maximale pour $r = 0$, c.à.d. sur l'axe du cylindre.

$$v_{max} = v(r=0) = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$$

La vitesse d'écoulement s'écrit alors : $v(r) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$; c'est une fonction parabolique.

Calcul du débit volumique (en m^3/s): $dQ = v \times dS = v(2\pi r dr)$

$$Q = \int v dS = \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr \Rightarrow Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

C'est la **loi de Poiseuille** pour le débit laminaire visqueux. Elle indique qu'une viscosité élevée entraîne des débits faibles, ce qui est raisonnable. Le fait que le débit dépende si fortement de R est plus surprenant : cette dépendance en R^4 implique par exemple que de faibles variations du rayon des vaisseaux sanguins entraînent d'importantes variations dans le débit. Si le rayon d'une artère diminue (artériosclérose), alors ΔP doit être grand pour maintenir un débit constant et le cœur travaille plus.

La vitesse moyenne est égale à $v_{\text{moy}} = \frac{Q}{S} = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} = \frac{v_{\text{max}}}{2}$.

4.3.2.3 Régime turbulent. Nombre de Reynolds.

Le régime laminaire est caractérisé par le fait qu'un feuillet de fluide conserve son individualité tout au long du mouvement, lors de l'écoulement dans un tube par exemple (figure IV.27). On constate que lorsque l'on augmente la vitesse d'écoulement au-delà d'une certaine limite, le régime laminaire devient instable : les différents feuillets se mélangent, l'écoulement devient saccadé et il apparaît des tourbillons locaux: le régime devient turbulent et les lois régissant l'écoulement du fluide (lois de Poiseuille) changent complètement. En pratique, l'écoulement turbulent est traité au moyen de quelques règles empiriques, obtenues à partir de nombreuses expériences.

L'une de ces règles empiriques montre que le passage du régime laminaire au régime turbulent est lié à un nombre sans dimension, le **nombre de Reynolds**, défini par l'expression :

$$N_R = \frac{2\rho v_{\text{moy}} R}{\eta} \text{ pour l'écoulement dans un tube de rayon } R.$$

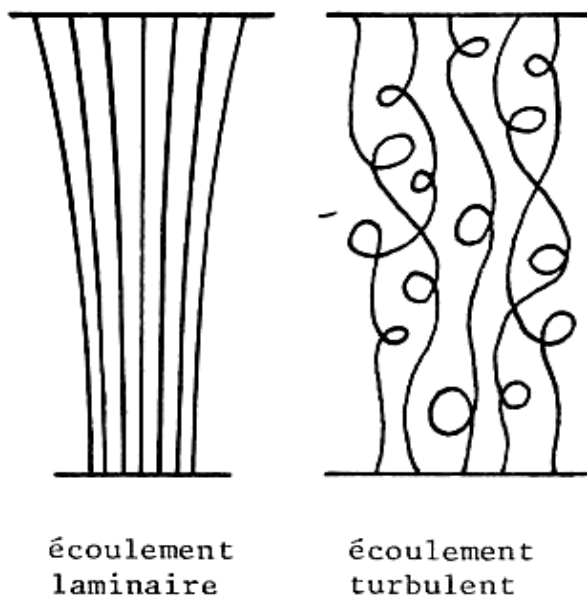


Figure IV.37

Pour une géométrie déterminée, la transition de régime laminaire vers le régime turbulent se fait au voisinage d'une valeur déterminée de N_R . Par exemple, pour un tube cylindrique, de rayon R , l'écoulement est laminaire pour $N_R < 2.000$, il est turbulent pour $N_R > 3.000$. Dans la région critique intermédiaire, l'écoulement est instable, passant continuellement d'un régime à l'autre.

Quand la canalisation est un capillaire, i.e. un tuyau de très petit diamètre, l'on n'atteint jamais une vitesse telle que le nombre de Reynolds dépasse 2.000. Dans un capillaire l'écoulement est toujours laminaire

4.4 Exercices

1. Une table à [coussin d'air](#), utilisée dans les démonstrations de Physique, supporte un chariot qui se déplace sur un mince coussin d'air d'une épaisseur de 1 mm et d'une aire de $0,04 \text{ m}^2$. Sachant que la viscosité de l'air est de $1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, trouver la force qu'il faut exercer sur le chariot pour le déplacer avec une vitesse constante de $0,2 \text{ m/s}$. (**R : $1,44 \times 10^{-4} \text{ N}$**). *Cette force est très faible ; c'est la raison pour laquelle on peut considérer une table à coussin d'air comme pratiquement dépourvu de frottement.*
2. Un tube en U contient du mercure de masse volumique $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$. Dans l'une des branches on ajoute de l'huile de masse volumique $\rho_1 = 0,85 \text{ g/cm}^3$, dans l'autre une solution aqueuse S de masse volumique $\rho_2 = 1,15 \text{ g/cm}^3$ de sorte que les surfaces de séparation liquide-air soient dans le même plan horizontal. L'huile occupe une hauteur de 20 cm, quelle est la hauteur de la colonne de la solution aqueuse. (**R : 0,48 cm**)
3. Le rayon intérieur d'une grosse artère d'un chien est de 4 mm. Le débit du sang à travers l'artère est de $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ et la viscosité vaut $2,084 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Trouver :
 - a. les vitesses moyenne et maximum du sang ; (**$1,99 \times 10^{-2} \text{ m/s}$; $3,98 \times 10^{-2} \text{ m/s}$**) ;
 - b. la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de 0,1 m (**$2,07 \text{ Pa}$**).
4. Dans l'exercice précédent, le rayon de l'artère est de 4 mm, la vitesse moyenne du sang est de $1,99 \text{ cm/s}$ et la viscosité vaut $2,084 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. La masse volumique du sang est de $1,0595 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Trouver le nombre de Reynolds et déterminer si l'écoulement est bien laminaire.

5 CHAPITRE V : ELECTRICITE ET MAGNETISME

5.1 Charge électrique et loi de Coulomb

5.1.1 Force électrique

Si on frotte vigoureusement deux règles en plastique avec un chiffon, celles-ci se repoussent. On peut le constater en en suspendant une à un fil par son milieu, ce qui lui permet de tourner librement (voir Figure V.1.a).

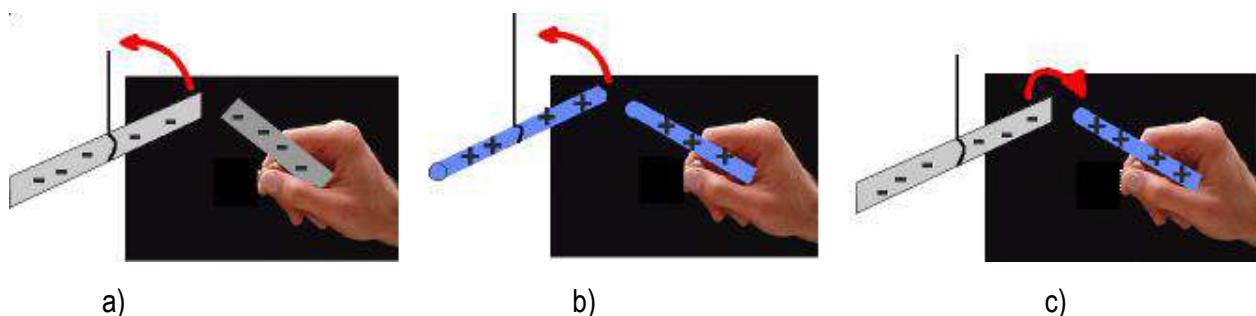


Figure V.1

L'extrémité de l'autre règle est approchée de la règle mobile en la tenant à la main. De même lorsqu'on approche deux tiges de verre frottées de la même manière, elles se repoussent aussi. Par contre lorsqu'on approche celle de verre de celle en plastique ou réciproquement, elles s'attirent (figure V.1.b et V.1.c).

La force qui entre en jeu dans l'expérience décrite ci-dessus est une force différente de la force gravitationnelle pour trois raisons. D'abord, elle est tantôt attractive, tantôt répulsive alors que la force gravitationnelle qui existe entre deux masses est toujours attractive. Ensuite, elle ne se produit entre les deux objets que s'ils sont frottés au préalable : leur seule masse ne suffit pas. Pour terminer, c'est une force beaucoup plus intense que la force gravitationnelle. La force gravitationnelle qui existe entre les règles ou les tiges est si faible qu'on ne l'observe pas. Lorsque les règles ou les tiges ne sont pas frottées, aucune attraction n'est observée. Cette nouvelle force est appelée force électrique.

5.1.2 Charge électrique

La force électrique ne se produit qu'entre deux objets qui ont une propriété particulière, qu'on appelle la charge électrique et qui apparaît notamment lorsqu'on frotte deux objets l'un contre l'autre.

Clairement, il existe deux types d'électricité différentes, celle qui apparaît sur une règle en plastique frottée et celle qui apparaît sur une tige en verre frottée. On pourrait penser que pour d'autres matériaux, il existe d'autres types d'électricité qui serait attirée par les deux premières. Il n'en est rien : tous les matériaux peuvent être rangés en deux catégories. Une fois frottés, soit ils attirent une tige en verre et repoussent une règle en plastique, soit l'inverse. Benjamin Franklin a proposé de distinguer ces deux types de charge électrique par leur signe positif et négatif. Il a choisi arbitrairement de donner le signe + aux charges électriques portées par une tige en verre frottée et le signe -, aux charges portées par une règle en plastique.

Les charges électriques de même signe se repoussent, celles de signe contraire s'attirent.

A l'heure actuelle, on explique aisément l'apparition d'une charge électrique sur un objet frotté en faisant appel à la structure atomique de la matière. La matière est constituée d'atomes (de rayon $\approx 10^{-10}$ m). Chaque atome comporte un noyau (de rayon $\approx 10^{-15}$ m) contenant des protons chargés positivement et des neutrons électriquement neutres. Des électrons, de même charge que les protons, en valeur absolue, mais de signe opposé, en nombre égal aux protons, forment la structure extérieure de l'atome. L'atome est donc électriquement neutre, les charges négatives des électrons compensant les charges positives des protons (Figure V.2).

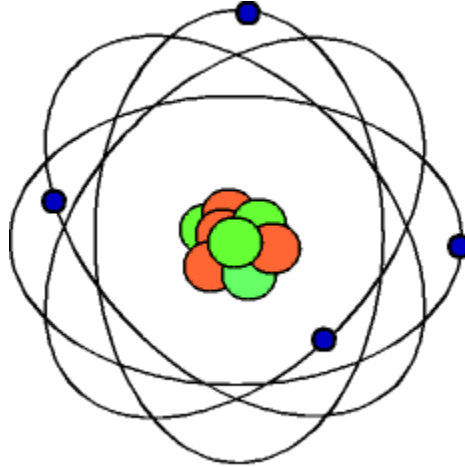


Figure V.2.

Dans certaines circonstances et notamment lorsqu'il y a frottement ou même simplement contact avec un autre objet, certains atomes de la surface de contact peuvent perdre ou gagner quelques électrons qui sont cédés ou arrachés aux atomes de l'autre objet. Les atomes dont le nombre d'électrons n'est plus égal à celui des protons, sont appelés ions. Les ions ne sont pas électriquement neutres, ils sont soit positifs, soit négatifs, suivant qu'ils aient perdu ou gagné des électrons.

L'unité SI de charge est le coulomb (C). Elle est définie en fonction du courant électrique dont nous parlerons plus tard. Le coulomb correspond à une très grande quantité de charge : en général, la charge qui apparaît sur un corps frotté est de l'ordre de 10^{-8} C, alors que la foudre fait passer jusqu'à 20 C entre un nuage et la terre.

La plus petite charge électrique qu'on ait pu isoler jusqu'à présent est celle qui est portée par un proton et est désignée par e . Elle a été mesurée pour la première fois par Millikan en 1909 et vaut à peu près :

$$e \approx 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{V.1})$$

Les charges du proton et de l'électron valent donc :

$$q_p = +e \text{ et } q_e = -e$$

5.1.3 Conservation de la charge

Lorsqu'on électrifie la règle en plastique ou la tige en verre, il n'y a pas création de charges électriques. Seulement un certain nombre d'électrons passent du chiffon à la règle ou de la tige au chiffon. Il y a transfert de charges d'un objet à l'autre : si un objet acquiert une charge $+Q$, l'autre acquiert une charge $-Q$. La somme des charges des deux objets reste nulle. Il s'agit d'un exemple de la loi de conservation de la charge électrique d'après laquelle :

La quantité nette de charge électrique produite au cours de n'importe quelle transformation est nulle.

Cette loi peut aussi s'exprimer sous la forme :

La charge électrique totale d'un système isolé reste constante.

Le terme "isolé" signifie qu'il n'existe pas de passage, tel un fil électrique ou de l'air humide, par lequel des charges pourraient entrer ou sortir du système.

5.1.4 Conducteurs et isolants

Lorsqu'on met une tige de fer en contact avec deux sphères métalliques, l'une dotée d'une forte charge électrique et l'autre neutre, on constate que la deuxième acquiert rapidement une charge électrique (voir Figure V.3a). Par contre, si on relie les deux sphères par une baguette en bois ou un ruban de caoutchouc, la sphère neutre reste neutre et la sphère électrisée, garde sa charge (voir Figure V.3.b). On dit des matériaux comme le fer qu'ils sont conducteurs d'électricité tandis que ceux comme le bois ou le caoutchouc sont isolants.

a. **Sphères métalliques reliées par une tige métallique.**



b. **Sphères métalliques reliées par un ruban de caoutchouc.**



Figure V.3.

A l'échelle atomique, on peut expliquer la différence entre conducteurs et isolants. Elle est due aux électrons de valence des atomes, ceux qui sont les plus éloignés du noyau et donc les moins liés. Dans un isolant comme le chlorure de sodium (NaCl), l'électron de valence de l'atome de sodium (Na) est pris par l'atome de chlore (Cl). Les ions Na^+ et Cl^- forment entre eux des liaisons ioniques qui conduisent à une structure cristalline dans laquelle chaque ion a une place bien déterminée (voir Figure V.4). Dans cette structure tous les électrons sont liés à un noyau particulier et ne peuvent se déplacer.

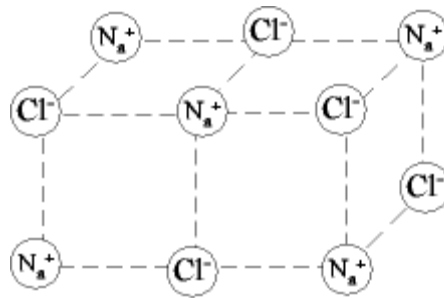


Figure V.4.

Dans les **conducteurs métalliques**, un électron de valence par atome environ est très faiblement lié à un noyau et est par conséquent libre de se déplacer aisément d'un atome à l'autre. Un courant d'électrons peut s'établir, sous certaines conditions que nous verrons plus tard, et transporter une charge d'un endroit à l'autre. Dans une solution électrolytique, où certaines molécules sont dissociées en ions de charges opposées, ou dans un gaz ionisé, tous les ions, positifs ou négatifs, peuvent se déplacer aisément et conduire l'électricité.

Un troisième groupe de matériaux, que l'on appelle **semi-conducteurs**, sont très faiblement conducteurs à l'état pur et voient leur pouvoir conducteur augmenter lorsqu'on y ajoute des impuretés. Les principaux matériaux semi-conducteurs sont le silicium et le germanium. Leurs propriétés particulières sont largement exploitées dans les circuits électroniques.

5.1.5 Charge par conduction et par induction

Un objet peut être chargé par conduction, c'est-à-dire en le mettant en contact avec un objet chargé, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un conducteur, comme c'est le cas sur la figure V.3.a.

Un objet métallique isolé peut aussi être chargé sans entrer en contact avec un corps chargé. Ce processus de charge sans contact est appelé induction. La figure V.5 représente deux sphères métalliques A et B, posées sur des socles isolants. A la figure V.5.a, elles sont en contact et forment de la sorte un seul conducteur. On approche de la sphère A une tige chargée positivement, mais sans toucher la sphère. Les électrons libres du conducteur A + B sont attirés par la charge positive de la tige et tendent à s'accumuler sur la face gauche de A, ne pouvant rejoindre la tige puisqu'il n'y a pas contact. Ces électrons laissent des ions positifs sur la face droite de B, le plus loin possible de la tige : la présence de la tige a provoqué, ou induit, une séparation des charges.

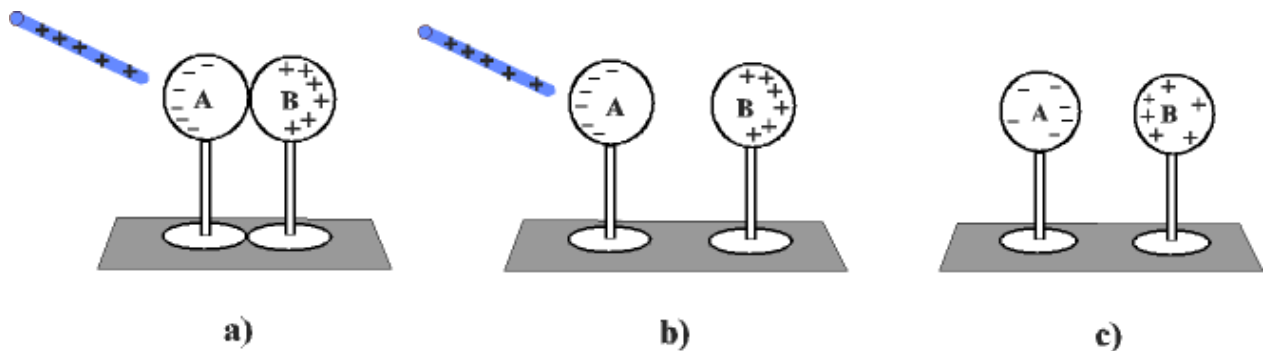


Figure V.5.

A la figure V.5.b, on sépare les deux sphères en présence de la tige, à la figure V.5.c, on retire la tige : les deux sphères ont acquis une charge opposée par induction, sans qu'il y ait eu contact avec la tige.

Une sphère métallique unique peut également se charger par induction. Lorsqu'on approche la tige chargée positivement (voir figure V.6.a), elle provoque la séparation de charges, négatives sur le côté gauche, positives, sur le côté droit de la sphère. On relie ensuite la sphère à la terre, au moyen d'une tige conductrice, comme le montre la figure V.6.b.

Le symbole \perp représente le contact avec le sol, on parle alors de prise de terre.

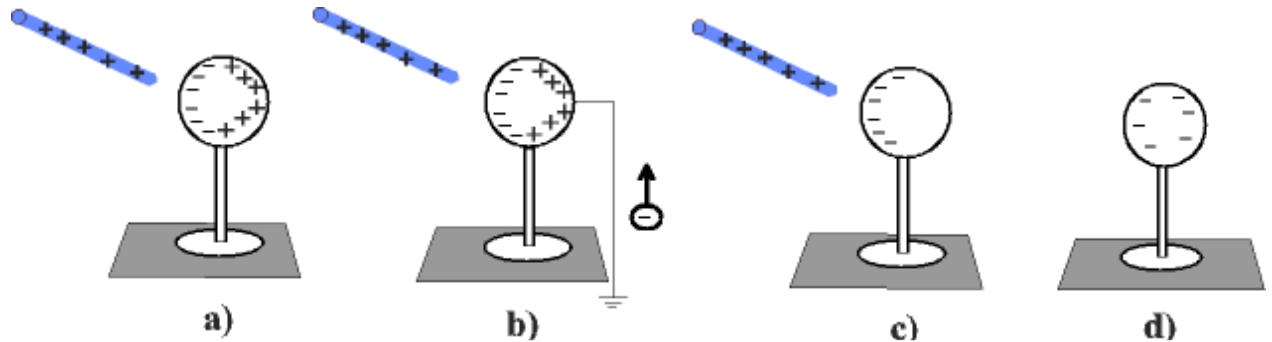


Figure V.6.

Compte tenu de sa grosseur et de sa nature conductrice, la terre peut facilement recevoir ou céder des électrons ; elle sert ainsi de réservoir de charges électriques. Dans le cas de la figure V.6.b, des électrons du sol vont être attirés par la charge positive qui apparaît sur la face droite de la sphère et vont la neutraliser. Si on coupe à ce moment la connexion avec la terre, la sphère comporte un excès de charges négatives (Figure V.6.c). Lorsqu'on retire la tige, cette charge négative se répartit uniformément à la surface de la sphère (Figure V.6.d).

5.1.6 Loi de Coulomb

C'est en 1785, que le physicien français Charles Augustin Coulomb établit expérimentalement la loi donnant la force existant entre deux charges électriques.

Pour mesurer les forces, Coulomb se servit d'une balance de torsion dans laquelle un dispositif en forme de haltère constitué d'une petite sphère métallique de charge Q_1 et d'un contrepoids est suspendu à un fil de soie (Figure V.7).

Lorsqu'on approche de la sphère suspendue une autre sphère de charge Q_2 , la force de répulsion existant entre les deux sphères provoque la rotation de l'haltère et une torsion du fil de soie. A l'équilibre, la distance entre les deux sphères est r et la force exercée par le fil tordu compense exactement la force électrique F existant entre les deux sphères. La mesure de l'angle de torsion permet dès lors de déduire la valeur de la force électrique.

En faisant varier séparément la distance r et les charges Q_1 et Q_2 portées par les deux sphères, Coulomb a observé que la force électrique est proportionnelle à chacune des charges Q_1 et Q_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles, ce qui se résume par :

$$F \propto Q_1$$

$$F \propto Q_2$$

$$F \propto 1/r^2$$

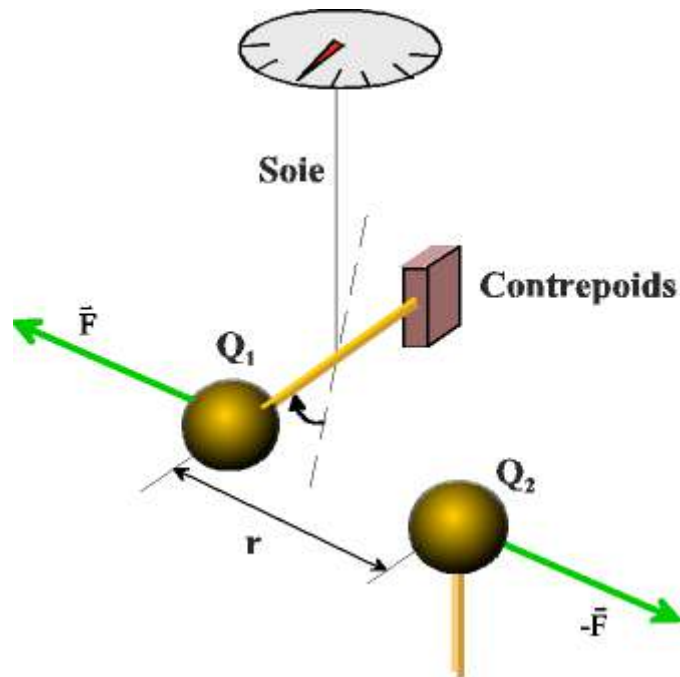


Figure V.7.

En d'autres termes :

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}, \quad (V.2)$$

où k est une constante de proportionnalité qui dépend du choix d'unité. Dans le SI, k prend la valeur suivante :

$$k = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \approx 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (V.3)$$

Pour des raisons qui sortent du cadre de ce cours, cette constante est souvent écrite en fonction d'une autre constante ϵ_0 , qui est appelée permittivité du vide; elle est définie par la relation suivante :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (V.4)$$

ce qui permet de calculer sa valeur en fonction de celle de k . La permittivité du vide vaut :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = (8,854187817...) \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2, \quad (V.5)$$

ou, en arrondissant :

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

On remarquera l'analogie qui existe entre la loi de Coulomb, exprimée par la relation (V.2) et la loi de la gravitation universelle (II.7). Les charges électriques jouent ici le rôle des masses.

L'équation (V.2) donne le module de la force qui existe entre deux charges électriques. Le vecteur force électrique est dirigé suivant la droite qui relie les charges Q_1 et Q_2 , vers l'autre charge si les charges sont de signes opposés, dans le sens contraire si les charges sont de même signe (Figure V.8 a et b).

a) Charges de signes opposés : $Q_1 Q_2 < 0$.



b) Charges de même signe : $Q_1 Q_2 > 0$.

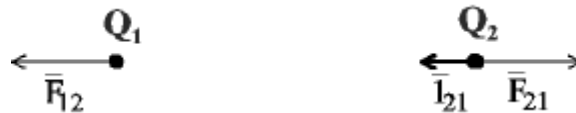


Figure V.8.

En accord avec la troisième loi de Newton, on a :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

où \vec{F}_{12} est la force exercée par Q_2 sur Q_1 et \vec{F}_{21} , la force exercée par Q_1 sur Q_2 .

La loi de Coulomb peut s'exprimer sous forme vectorielle de la manière suivante :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{1}_{21} \quad (V.6)$$

où r_{12} est la distance entre les deux charges et $\vec{1}_{21}$ est un vecteur unité dirigé de 2 vers 1 (Figure V.8.b). On peut vérifier aisément qu'avec ce choix du sens du vecteur-unité, \vec{F}_{21} est dirigé vers Q_2 dans le cas de charges de signes opposés et est bien répulsive dans le cas de charges de même signe.

5.1.7 Principe de superposition

La force électrique étant, comme toutes les forces, une grandeur vectorielle, les forces électriques exercées par différentes charges électriques : Q_2, Q_3, \dots, Q_n , sur une charge Q_1 , se calculent indépendamment l'une de l'autre et s'ajoutent vectoriellement. La force totale exercée sur la charge Q_1 par les autres charges, est donnée par :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}. \quad (V.7)$$

Exemple :

Calculer la force qui s'exerce sur la charge Q_1 , due à la présence des charges Q_2 et Q_3 . Les trois charges sont situées aux sommets d'un triangle rectangle (Figure V.9).

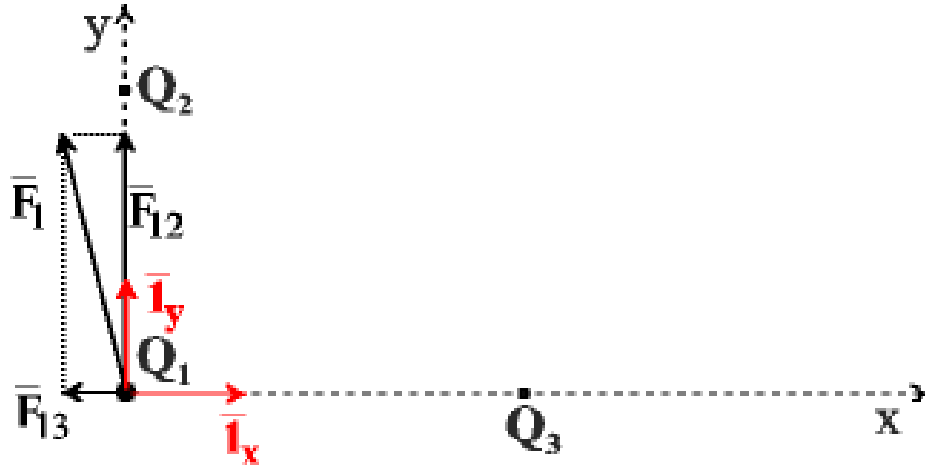


Figure V.9.

Les charges Q_1 , Q_2 et Q_3 valent respectivement : $30 \mu\text{C}$, $-60 \mu\text{C}$ et $40 \mu\text{C}$. La distance entre Q_1 et Q_2 est de 1 m, celle entre Q_1 et Q_3 , 2 m.

- a) On calcule les modules des forces exercées par chacune des charges électriques en utilisant la loi de Coulomb :

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{12}^2} = 9 \times 10^9 \frac{30 \times 10^{-6} \times 60 \times 10^{-6}}{1^2} = 16,2 \text{ N}$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_3|}{r_{13}^2} = 9 \times 10^9 \frac{30 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-6}}{2^2} = 2,7 \text{ N}$$

- b) On choisit un système de coordonnées d'axes x et y dans lequel on écrit chaque force en fonction de ses composantes et des vecteurs unités $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$ (Figure V.9) :

$$\vec{F}_{12} = 16,2 \vec{1}_y \text{ car les charges } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ sont de signes opposés et s'attirent}$$

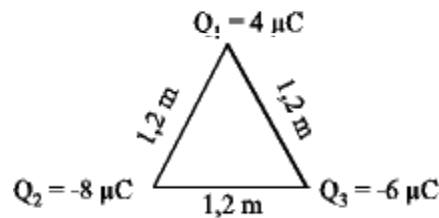
$$\vec{F}_{13} = -2,7 \vec{1}_x \text{ car les charges } Q_1 \text{ et } Q_3 \text{ sont de même signe et se repoussent.}$$

- c) On effectue la somme vectorielle des différentes forces en ajoutant entre elles les composantes x et les composantes y :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = (0 - 2,7) \vec{1}_x + (16,2 + 0) \vec{1}_y \text{ N} \\ &= -2,7 \vec{1}_x + 16,2 \vec{1}_y \text{ N} \end{aligned}$$

5.1.8 Exercices

1. Jusqu'à quelle distance faut-il rapprocher deux électrons pour que la force électrique qui s'exerce entre eux soit égale au poids de l'un d'eux mesuré à la surface de la Terre? ($m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$). (**R** : 5,1 m).
2. Dans un modèle simplifié de l'atome d'hydrogène l'électron décrit autour du proton une orbite circulaire de $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$ de rayon.
 - a) Quelle est la force d'attraction entre le proton et l'électron ? (**R** : $8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$).
 - b) Quelle est la vitesse de l'électron ? (**R** : $2,2 \times 10^6 \text{ m/s}$).
3. Une charge ponctuelle $+Q$ est maintenue au point A. Où faut-il placer un objet ponctuel de masse m et de charge $+Q$ pour qu'il soit en équilibre sous l'effet combiné de son poids et de l'interaction avec la charge située en A. Même question pour un objet ponctuel de masse m et de charge $-Q$. (**R** : $\pm(kQ^2/mg)^{1/2}$).
4. Quelle doit être la charge portée par une particule de masse égale à 2 g pour qu'elle reste stationnaire lorsqu'elle est placée dans un champ électrique dirigé verticalement vers le bas d'intensité 500 NC^{-1} . (**R** : $-0,4 \times 10^{-4} \text{ C}$).
5. On place trois particules dotées respectivement de charges électriques valant $+4 \mu\text{C}$, $-8 \mu\text{C}$ et $-6 \mu\text{C}$ aux sommets d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1,2 m (voir figure). Déterminez la grandeur et la direction de la force nette s'exerçant sur chacune d'elles et attribuable aux deux autres. (**R** : 0,30 N, 275° ; 0,26 N, 139° ; 0,26 N, 30° ; les angles sont comptés depuis l'axe Q_2Q_3).



5.2 Champ électrique

La notion de champ a été introduite par les physiciens pour tenter d'expliquer comment deux objets peuvent interagir à distance, sans que rien ne les relie. A la fois la loi de la gravitation universelle de Newton et la loi de Coulomb en électrostatique, impliquent une telle interaction à distance. Il n'y a pas de fil qui relie la terre au soleil; celui-ci exerce son attraction à distance. De même, deux charges électriques s'attirent ou se repoussent dans le vide sans que rien ne les relie, sans aucun support matériel. Pour tenter d'expliquer cela, Michael Faraday a introduit la notion de champ électrique. Si une charge Q_1 a un effet à distance sur une charge Q_2 qui se trouve éloignée, c'est parce que la charge Q_1 met tout l'espace qui l'entoure dans un état particulier : la charge Q_1 , de par sa présence, produit en tout point de l'espace qui l'entoure, un champ électrique et c'est l'interaction de ce champ électrique avec la charge Q_2 qui produit la force que cette dernière ressent. Cette notion de champ s'est révélée très utile et très pratique. Elle a pu être utilisée pour décrire d'autres forces fondamentales que la force électrique et elle permet de décrire les phénomènes de manière élégante.

5.2.1 Définition du champ électrique

Pour définir le champ électrique en un point de l'espace, on y place une petite charge d'essai positive q et on regarde la force de Coulomb \vec{F} qui s'exerce sur elle, due à la présence des charges électriques environnantes qui créent le champ électrique. Le champ électrique en ce point est défini comme la force par unité de charge :

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}, \quad q > 0 \quad (\text{V.8})$$

Le champ électrique est donc une grandeur vectorielle. L'unité SI de champ électrique est le newton par coulomb (N/C).

La charge d'essai doit être petite pour qu'on puisse faire l'hypothèse qu'elle ne perturbe pas elle-même le champ électrique environnant.

A une distance r d'une charge ponctuelle Q , le champ électrique est donné par la loi de Coulomb (V.2) :

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{V.9})$$

Le champ électrique tout comme la force de Coulomb est radial, il s'éloigne de la charge Q si celle-ci est positive (Figure V.10.a) et se dirige vers celle-ci si elle est négative (Figure V.10.b).

En effet, la petite charge d'essai positive q est repoussée par Q si celle-ci est positive, attirée par Q si celle-ci est négative.

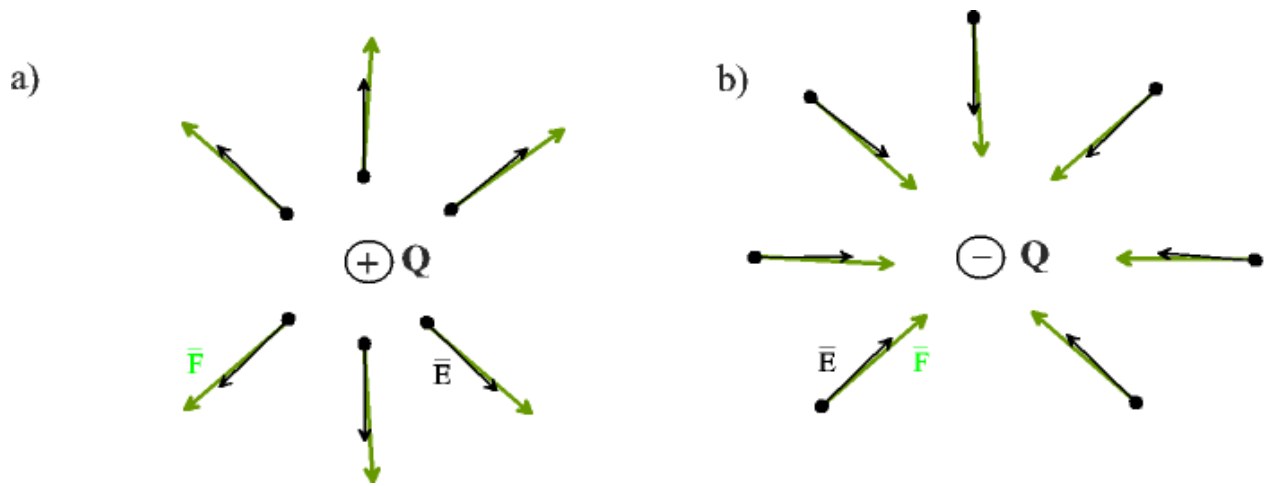


Figure V.10.

Remarque :

Il y a un champ électrique autour de Q même en l'absence de la petite charge d'essai qui sert à le mettre en évidence.

De la définition du champ électrique, il résulte que la force \vec{F} subie par n'importe quelle charge Q placée en un point de l'espace où règne un champ électrique \vec{E} , est donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{E}} \quad (V.10)$$

D'après cette relation, si la charge Q est positive, la force qu'elle ressent a le même sens que le champ électrique, si elle est négative, elle subit une force de sens opposé au champ électrique (Figure V.11.a et b).

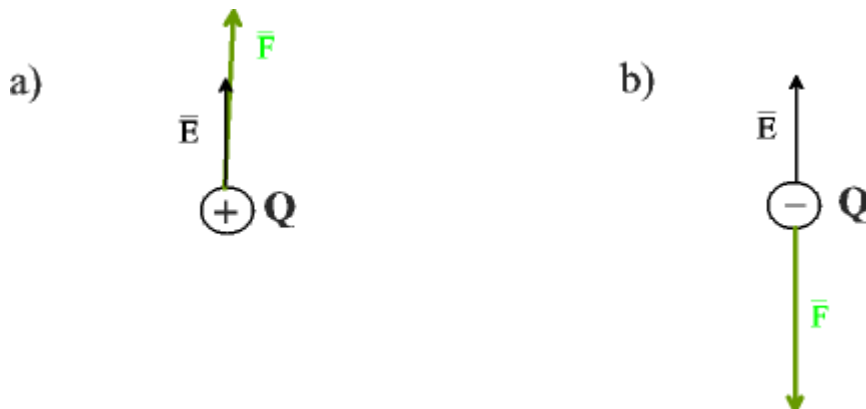


Figure V.11.

Le principe de superposition qui s'applique à la loi de Coulomb (voir section 5.1.7) s'applique également au champ électrique. Pour calculer le champ créé en un point par un ensemble de n charges Q_i , on détermine d'abord séparément le champ \vec{E}_1 dû à Q_1 , le champ \vec{E}_2 dû à Q_2 , etc. Le champ résultant \vec{E} est égal à la somme vectorielle des champs individuels \vec{E}_i .

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (\text{V.11})$$

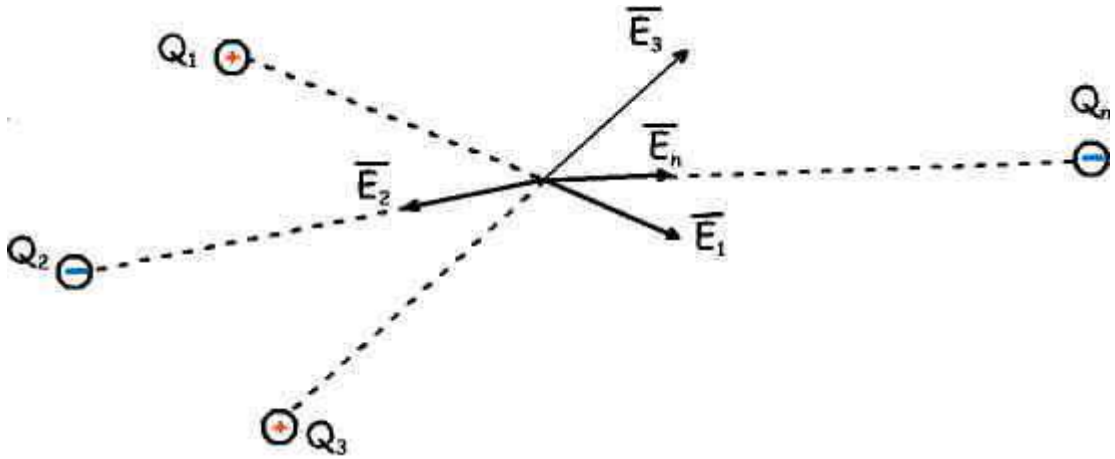


Figure V.12.

5.2.2 Champ électrique dû à une distribution de charges

Dès que le nombre de charges augmente, la relation (V.11) ne permet plus de calculer le champ électrique, les calculs devenant trop complexes. Dans beaucoup de cas on pourra faire l'approximation que la charge électrique est répartie de manière continue dans l'espace et remplacer la somme (V.11) par une intégrale. Le calcul de cette intégrale est grandement simplifié lorsque la distribution de charge est uniforme, c'est-à-dire de même densité partout dans l'espace considéré.

Pour calculer le champ électrique \vec{E} , en un point P, dû à une distribution de charge uniformément répartie dans une certaine région de l'espace (figure V.13), on divise l'espace en petits morceaux contenant chacun une charge Δq , distants de r du point P.

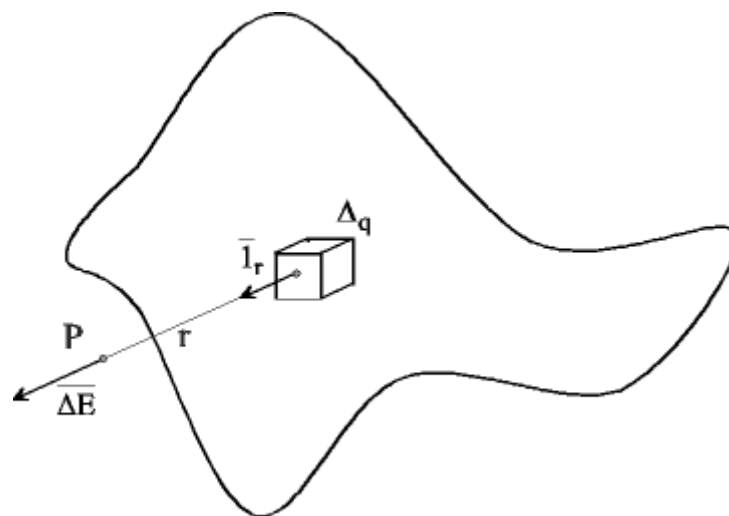


Figure V.13.

La charge Δq a été choisie suffisamment petite pour pouvoir être considérée comme ponctuelle. Dès lors le champ électrique en P dû à Δq , $\Delta \vec{E}$, est donné par la loi de Coulomb :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{1}_r, \quad (\text{V. 12})$$

où $\vec{1}_r$ est un vecteur-unité dirigé de Δq vers P.

Pour obtenir le champ électrique total en P, on applique le principe de superposition en sommant les champs électriques $\Delta \vec{E}$ dus à toutes les charges Δq contenues dans l'espace considéré :

$$\vec{E} = \sum \Delta \vec{E}, \quad (\text{V. 13})$$

ce qui donne en notation différentielle, pour une charge infinitésimale dq (voir (V.12)) :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{1}_r, \quad (\text{V. 14})$$

et pour le champ total (voir (V.13)) :

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{1}_r, \quad (\text{V. 15})$$

5.2.2.1 Calcul du champ électrique dû à un plan infini uniformément chargé

Outre qu'il illustre le calcul d'un champ électrique par la relation (V.15), cet exemple nous sera utile pour calculer la capacité d'un condensateur plan. Nous allons calculer le champ électrique en un point P situé à une distance L d'un plan comportant une distribution de charge uniforme. Pour caractériser cette distribution de charge définissons la densité surfacique :

$$\sigma \equiv \frac{dq}{ds}$$

où dq est la charge infinitésimale contenue sur une surface d'aire infinitésimale ds du plan (voir figure V.14).

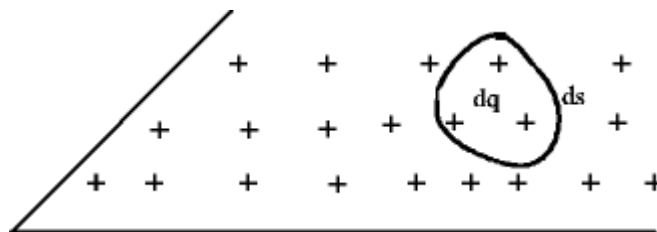


Figure V.14.

La densité surfacique est donc une charge par unité de surface, la même sur tout le plan dans le cas d'une distribution uniforme.

Pour calculer le champ électrique au point P (voir Figure V.15), choisissons un système de référence cartésien, Oxyz, dont l'axe Oz est perpendiculaire au plan et passe par le point P et divisons le plan en petits éléments pour lesquels le champ est aisé à calculer.

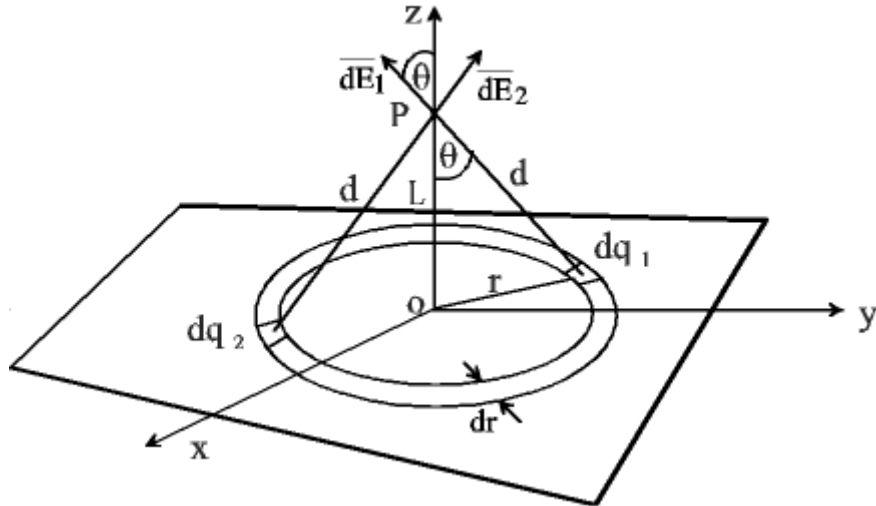


Figure V.15.

Considérons tout d'abord l'anneau de rayon r , d'épaisseur infinitésimale dr , centré sur O . Dès lors, l'aire de cet anneau vaut $2\pi r dr$. Divisons maintenant l'anneau en petits segments de longueur infinitésimale contenant une charge dq et remarquons que le champ en P dû à n'importe laquelle de ces charges dq est le même en module : $dE_1 = dE_2$. En effet toutes ces charges dq sont à la même distance d de P . Par contre leur direction n'est pas la même. Toutefois leurs projections dans le plan Oxy s'annulent deux à deux pour deux charges dq_1 et dq_2 diamétralement opposées. Par conséquent le champ électrique $d\vec{E}$ dû à l'anneau de rayon r est dirigé suivant l'axe Oz et :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma \times 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos\theta \vec{1}_z,$$

où θ est l'angle entre $d\vec{E}_1$, $d\vec{E}_2$, etc... et l'axe Oz , il est le même pour toutes les charges dq_i , par symétrie et vaut :

$$\cos\theta = \frac{L}{d}.$$

Comme de plus, $d = \sqrt{L^2 + r^2}$, on a finalement :

$$dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{Lr dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} \quad (\text{V.16})$$

Le champ électrique total en \vec{E} s'obtient en sommant les contributions dE de tous les anneaux formant le plan Oxy , c'est-à-dire en intégrant l'expression (V.16) pour le rayon r de l'anneau allant de zéro à l'infini :

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\sigma L}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma L}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}}$$

Le résultat de l'intégrale peut être trouvé dans une table d'intégrales (ou calculé directement) :

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + L^2)^{3/2}} = \left[\frac{-1}{(x^2 + L^2)^{1/2}} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{L}$$

Dès lors, nous avons le résultat important que le champ électrique au voisinage d'un plan infini uniformément chargé vaut

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{1}_z} \quad (\text{V.17})$$

Remarquons qu'il ne dépend pas de L ce qui veut dire que le champ électrique est uniforme au voisinage d'un plan uniformément chargé : en tout point il lui est perpendiculaire et a une intensité $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, quelle que soit la distance du point P au plan. Si le plan est chargé positivement, comme nous l'avons supposé implicitement sur la figure V.15, \vec{E} s'éloigne du plan. Si le plan est chargé négativement, \vec{E} se dirige vers le plan (voir figure V.16 a et b).

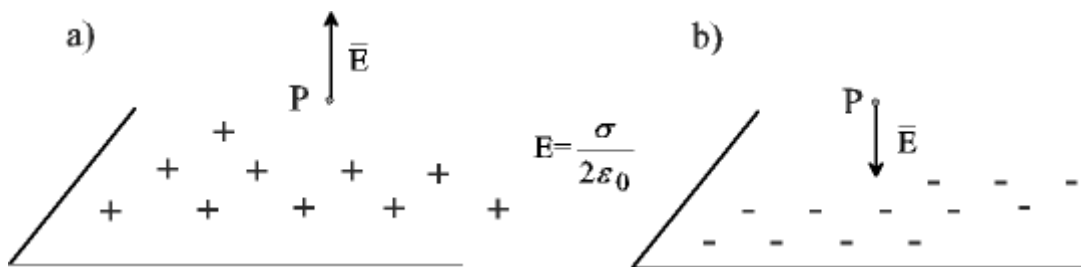


Figure V.16.

5.2.2.2 Calcul du champ électrique dû à deux plans parallèles, uniformément chargés de charges opposées

Pour calculer le champ électrique dû à cette configuration, nous allons appliquer le principe de superposition. Le champ électrique dû au plan chargé positivement vaut $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ et s'éloigne de ce plan (voir figure V.17.a), celui dû au plan chargé négativement vaut aussi $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ mais est dirigé vers ce plan (voir figure V.17.b).

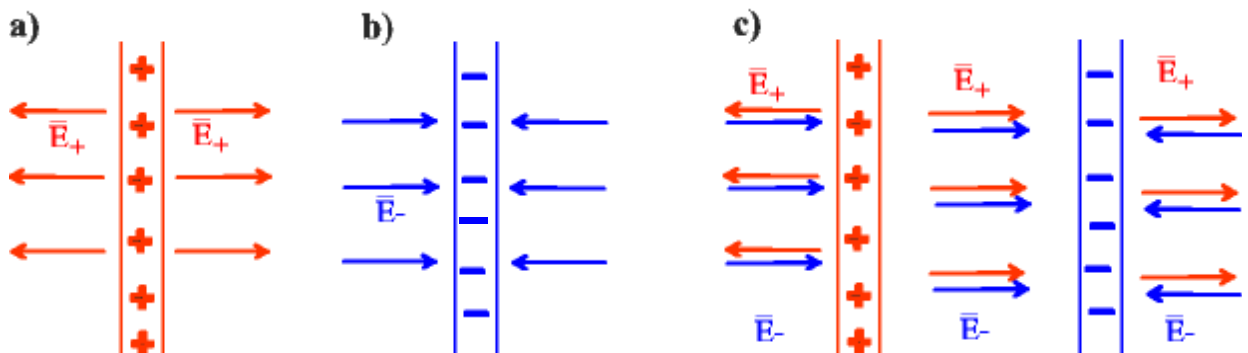


Figure V.17.

La figure V.17.c. illustre la superposition des champs \vec{E}_+ et \vec{E}_- dus au plan chargé positivement et au plan chargé négativement. On constate qu'à l'extérieur des deux plans, à gauche et à droite de la figure, les deux vecteurs sont de sens opposés ; étant de même intensité $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, ils s'annulent : à l'extérieur de

deux plans de charges opposées, le champ électrique est nul. Entre les deux plaques, les deux vecteurs ont même sens et s'ajoutent pour donner un champ électrique double :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{V. 18})$$

Il est dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir figure V.18).

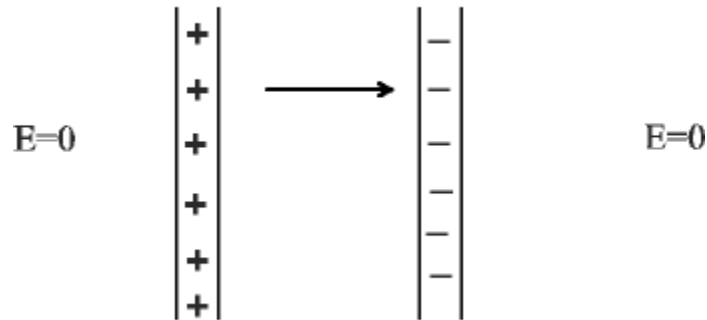


Figure V.18.

Remarquons que ces résultats obtenus, pour des plans infinis, restent valables pour des plans finis pourvu que l'on soit suffisamment loin des bords.

5.2.3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique

Lorsqu'on désire étudier le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ électrique \vec{E} , il suffit tout simplement d'appliquer la 2^{ème} loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, et d'exprimer le fait que la force est celle due au champ électrique, $\vec{F} = q\vec{E}$, ce qui donne :

$$q\vec{E} = m\vec{a} \quad (\text{V.19})$$

ou encore :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad (\text{V. 20})$$

Une fois déterminée l'accélération à l'aide de la relation ci-dessus, on est ramené à un problème de cinématique comme ceux traités dans le chapitre I.

Remarquons que pour appliquer la 2^{ème} loi de Newton, la force qui y intervient est la **force totale** qui s'exerce sur la particule et qu'en toute rigueur il aurait fallu tenir compte, dans la relation (V.19), du poids de la particule, $m\vec{g}$. Toutefois, les particules chargées ont généralement une masse tellement petite que le poids peut être négligé vis-à-vis de la force de Coulomb. C'est notamment le cas pour une charge élémentaire telle que l'électron ou le proton. Calculons l'intensité des deux forces mises en jeu dans le cas d'un électron, qui a une masse de $9,1 \times 10^{-31}$ kg, et est accéléré par un champ de $2,0 \times 10^4$ N/C :

$$mg = (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (9,81 \text{ m/s}^2) = 8,9 \times 10^{-30} \text{ N}$$

$$qE = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (2,0 \times 10^4 \text{ N/C}) = 3,2 \times 10^{-15} \text{ N}$$

$$\frac{mg}{qE} \approx 3,2 \times 10^{-15}$$

et mg est donc bien négligeable par rapport à qE . Ceci reste vrai dans le cas d'un proton dont la masse est à peu près 2000 fois plus grande que celle de l'électron.

Exemple :

Un électron se trouve dans un champ uniforme de $2,0 \times 10^4 \text{ N/C}$ entre deux plaques parallèles de charges opposées, situées à 2 cm l'une de l'autre. Immobile au départ, il se trouve à proximité de la plaque négative. Une fois accéléré, il passe par un minuscule trou dans la plaque positive (voir Figure V.10). Quelle vitesse a-t-il lorsqu'il passe par le trou ?

Nous avons vu en (2.2), que loin des bords de telles plaques, le champ électrique est perpendiculaire aux plaques et dirigé de la plaque positive vers la plaque négative. Par contre la force subie par l'électron :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

est dirigée en sens opposé étant donné que sa charge est négative. L'électron va bien se diriger vers le trou avec une accélération d'intensité a , donnée par la relation (V.20) :

$$a = \frac{e}{m}E = \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} \times (2,0 \times 10^4 \text{ N/C}) = 3,5 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

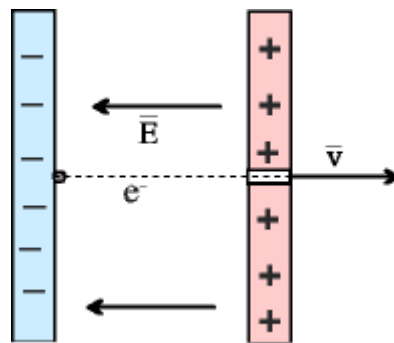


Figure V.19.

Il parcourt une distance $2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$ avant d'atteindre le trou et part avec une vitesse initiale nulle. Dès lors l'application de la relation (I.10), valable pour un MRUA, donne :

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times (3,5 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \times (2,0 \times 10^{-2} \text{ m}))} = 1,2 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

Dès qu'il a franchi le trou, l'électron garde cette vitesse qui reste constante puisqu'en dehors des plaques le champ électrique, et donc l'accélération, sont nuls.

5.2.4 Exercices

1. Un proton ($m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) immobile se trouve en suspension dans le champ gravitationnel à proximité de la surface de la terre et dans un champ électrique uniforme \vec{E} . Quelle est la grandeur, la direction et le sens de \vec{E} ? (R : 10^{-7} N C^{-1} ; vertical dirigé vers le haut).
2. Déterminez le champ électrique au point où se trouve une charge de $0,5 \mu\text{C}$ sur laquelle s'exerce une force $\vec{F} = (3\vec{1}_x - 5\vec{1}_y) \times 10^{-3} \text{ N}$. (R : $(6\vec{1}_x - 10\vec{1}_y) \times 10^3 \text{ NC}^{-1}$).

3. Une charge de $2,5 \times 10^{-8}$ C est placée dans un champ électrique uniforme dirigé verticalement vers le haut dont l'intensité est de 5×10^4 NC⁻¹. Quel est le travail de la force électrique agissant sur la charge quand celle-ci se déplace de
- a) 45 cm à droite (R : 0 J) ;
 - b) 80 cm vers le bas (R : 10^{-3} J) ;
 - c) 260 cm vers le haut avec un angle de 45° par rapport à l'horizontale. (R : $2,3 \times 10^{-3}$ J).

5.3 Potentiel électrique

Au chapitre III, nous avons vu que lorsqu'une force est conservative, il est possible de lui associer une énergie potentielle qui conduit à une loi de conservation de l'énergie. Nous allons voir que la force de Coulomb entre charges électriques est conservative. On peut par conséquent définir une énergie potentielle électrique, qui dépend de la position des charges électriques, et appliquer la loi de conservation de l'énergie aux problèmes d'électricité.

L'énergie potentielle électrique caractérise un ensemble de charges. En électricité, on préfère souvent travailler avec le potentiel électrique qui caractérise un point de l'espace, tout comme le champ électrique : le champ électrique donne la force de Coulomb par unité de charge en un point donné, le potentiel électrique est défini comme l'énergie potentielle par unité de charge.

5.3.1 La force de Coulomb est conservative

La force de Coulomb qui existe entre deux charges électriques (voir V.6) dépend de la distance r entre les deux charges et est dirigée suivant la ligne qui joint les positions des deux charges. C'est ce qu'on appelle une force centrale. En outre, elle ne dépend d'aucune autre variable cinématique telle que la vitesse, par exemple. La force exercée par la charge q_2 sur la charge q_1 peut donc s'écrire sous la forme :

$$\vec{F}_{12} = F(r)\vec{1}_r \quad (\text{V.21})$$

où

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{V.22})$$

et $\vec{1}_r$ est un vecteur de longueur unité, dirigé suivant la ligne qui joint les positions des charges q_1 et q_2 , dirigé de q_2 vers q_1 .

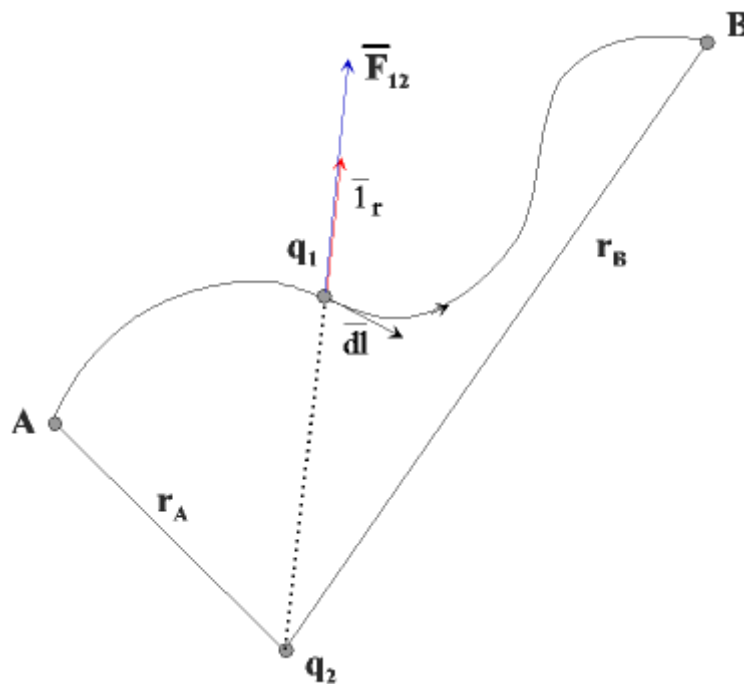


Figure V.20.

Pour montrer qu'une telle force est conservative, nous allons montrer que son travail entre deux points quelconques de l'espace, A et B, ne dépend pas du chemin suivi, seulement des positions de départ et d'arrivée (voir figure V.20).

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mathbf{F}(r) \vec{1}_r \cdot d\vec{\ell}$$

Le vecteur de longueur infinitésimale $d\vec{\ell}$ tangent à la trajectoire peut être décomposé en un vecteur de longueur infinitésimale $d\vec{r}$, dirigé suivant $\vec{1}_r$ et un vecteur de longueur infinitésimale $d\vec{t}_g$, perpendiculaire à $\vec{1}_r$ (voir Figure V.21) :

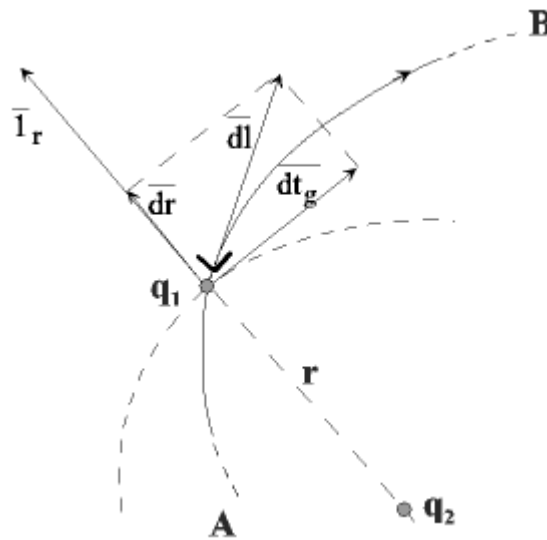


Figure V.21.

Dès lors le travail de \vec{F}_{12} de A à B devient :

$$\int_A^B \mathbf{F}(r) \vec{1}_r \cdot (d\vec{r} + d\vec{t}_g) = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(r) dr \quad (\text{V.23})$$

où dr est la longueur du vecteur $d\vec{r}$. En effet, $\vec{1}_r \cdot d\vec{t}_g = 0$ car $d\vec{t}_g$ est perpendiculaire à $\vec{1}_r$ et $\vec{1}_r \cdot d\vec{r} = dr \vec{1}_r \cdot \vec{1}_r = dr$.

L'expression du travail entre A et B ci-dessus (V.23), se réduit à une intégrale simple dont le résultat ne dépend que de r_A et r_B et pas du chemin particulier pour aller de A à B. Ceci montre que la force de Coulomb est bien conservative, comme toute force centrale qui ne dépend que de r .

5.3.2 Energie potentielle électrique

La force électrique étant conservative (voir V.21), nous pouvons définir l'énergie potentielle de la même manière qu'au chapitre III (voir (III.2)) :

$$\Delta U = U(B) - U(A) = - \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{V.24})$$

où \vec{F}_E est la résultante des forces électriques dues à un ensemble de charges, qui s'exerceraient sur une charge électrique qui serait déplacée de A à B suivant n'importe quel chemin.

Dans le cas où seules deux charges électriques q_1 et q_2 sont concernées les relations (V.23) et (V.22) s'appliquant à la situation décrite par la Figure V.20, permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (V.25)$$

Regardons quel est le contenu physique de la relation (V.25). Supposons que les charges q_1 et q_2 soient de même signe. La force de Coulomb est alors répulsive. Si $r_A < r_B$, cela veut dire que l'on éloigne les deux charges l'une de l'autre, le travail à fournir est négatif puisque les charges tendent à s'éloigner d'elles-mêmes. Le travail de la force, lui, est positif et la variation d'énergie potentielle est négative. En effet $\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}$ et $\Delta U < 0$ (voir V.25)). Donc $U(B) < U(A)$. Lorsqu'on éloigne deux charges de même

signe, leur énergie potentielle électrique diminue. Si on les rapproche, il faut fournir un travail contre la force électrique. Le travail de cette dernière est négatif et l'énergie potentielle électrique augmente, comme pour un rocher que l'on amènerait au sommet d'une montagne.

En répétant le raisonnement ci-dessus dans le cas de deux charges de signes opposés, qui conduisent à une force de Coulomb attractive, on constate que lorsqu'on les éloigne, leur énergie potentielle augmente, lorsqu'on les rapproche, elle diminue, comme pour un rocher qui dévalerait la pente d'une montagne.

Lorsqu'il n'y a pas d'autres forces que la force électrique qui entrent en jeu, la loi de conservation de l'énergie (III.11) nous dit que si les charges gagnent de l'énergie potentielle électrique, elles perdent de l'énergie cinétique : elles ralentissent comme une pierre lancée en l'air; si elles perdent de l'énergie potentielle électrique, elles gagnent de l'énergie cinétique : elles accélèrent, comme une pierre qui tombe.

Nous avons vu au chapitre III qu'une relation telle que (V.24) définit la différence d'énergie potentielle entre deux points. Pour connaître l'énergie potentielle en un point, il faut choisir arbitrairement la valeur de celle-ci en un point de référence. En électricité, il est souvent commode de choisir comme niveau de référence d'énergie potentielle nulle, l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) \equiv 0 \quad (V.26)$$

Dès lors si dans l'expression (V.25), on fait tendre $r_A \rightarrow \infty$ et $r = r_B$, on obtient :

$$\lim_{r_A \rightarrow \infty} \Delta U = U(r) - \lim_{r_A \rightarrow \infty} U(r_A) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \lim_{r_A \rightarrow \infty} \frac{1}{r_A} \right)$$

Et :

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r}} \quad (V.27)$$

La relation (V.27) ci-dessus donne l'énergie potentielle électrique d'un système de deux charges électriques q_1 et q_2 distantes de r . On remarque qu'elle est positive si les charges q_1 et q_2 sont de même signe, négative si elles sont de signe opposés.

5.3.3 Potentiel électrique et les différences de potentiel

La force de gravitation universelle, vue au chapitre II (II.7), et la force de Coulomb, vue à la section 5.1, (V.6) ont la même forme mathématique : toutes deux sont en $1/r^2$; elles dépendent de l'inverse du carré de la distance entre les masses m_1 et m_2 ou entre les charges q_1 et q_2 ; dans la loi de Coulomb, le rôle des masses m_1 et m_2 est joué par les charges q_1 et q_2 , celui de la constante de gravitation G par le facteur $1/4\pi\epsilon_0$. Cette similitude a permis de définir une énergie potentielle dans les deux cas et de faire des comparaisons entre situations "mécaniques" et situations "électriques".

Il y a toutefois une différence entre les deux forces : la force gravitationnelle est toujours attractive tandis que la force électrique est tantôt attractive, tantôt répulsive, suivant le signe respectif des charges électriques. Cela a pour conséquence qu'en électricité, l'énergie potentielle électrique n'est pas très pratique à utiliser, car elle change de signe avec le signe de la charge que l'on considère (voir relation V.27). Voyons ce que cette particularité implique comme complication dans un exemple, celui de deux plaques conductrices parallèles, infinies, distantes de d et chargées de manière uniforme d'électricité de signes contraires (voir figure V.22).

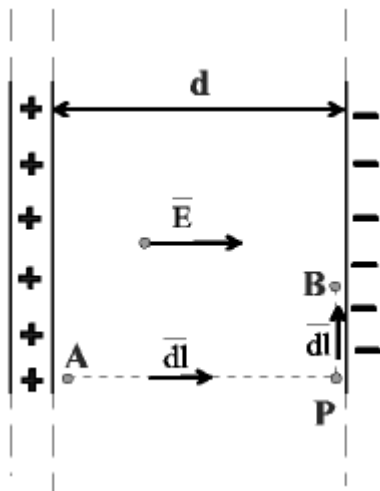


Figure V.22.

Nous avons vu que dans une telle situation, le champ électrique régnant entre les deux plaques est uniforme, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ où σ est la charge par unité de surface, et que le champ \vec{E} est perpendiculaire aux plaques, dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir figure V.18).

Dès lors, si l'on place une charge électrique q n'importe où entre les deux plaques elle subit une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Supposons qu'on amène cette charge q depuis un point A, situé contre la plaque positive, vers un point B, situé contre la plaque négative. La différence d'énergie potentielle entre ces positions A et B est donnée par :

$$\Delta U = U(B) - U(A) = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La force électrique étant conservative, le chemin choisi pour aller de A à B n'importe pas et nous allons le choisir pour faciliter le calcul de l'intégrale ci-dessus, soit $AB = AP + PB$, où AP est un trajet perpendiculaire aux plaques et PB, parallèle à celles-ci. Le long de AP, $d\vec{\ell}$ est parallèle à \vec{E} et $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E d\ell$, tandis que sur le trajet PB, $d\vec{\ell}$ est perpendiculaire à \vec{E} et $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

Dès lors :

$$\begin{aligned} \Delta U &= -q \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -qE \int_{\ell_A}^{\ell_B} d\ell \\ &= -qE(\ell_B - \ell_A) = -qE d \end{aligned} \quad (V.28)$$

Remarquons tout d'abord que la différence d'énergie potentielle ΔU est la même quel que soit l'endroit où le point A est situé sur la plaque positive et quel que soit l'endroit où B est situé sur la plaque négative : **tous les points d'une plaque sont à la même énergie potentielle.**

Pour une charge positive :

$$q > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U < 0 \quad \Rightarrow \quad U(B) < U(A)$$

Pour une charge négative :

$$q < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U > 0 \quad \Rightarrow \quad U(B) > U(A).$$

Donc pour une charge positive, c'est en A que l'énergie potentielle est la plus élevée, tandis que pour une charge négative, c'est en B qu'elle est la plus élevée.

Pour éviter ce changement de signe avec la charge q considérée, on travaille plus volontiers avec le potentiel électrique $V(r)$, défini comme étant l'énergie potentielle électrique par unité de charge :

$$\boxed{V(r) \equiv \frac{U(r)}{q}} \quad (V.29)$$

Le potentiel électrique en un point de l'espace, dû à un ensemble de charges, est égal à l'énergie électrique de cet ensemble de charges auquel on adjoint une petite charge d'essai q , de signe quelconque, située au point considéré, divisée par cette charge q .

De même, la différence de potentiel entre deux points de l'espace est donnée par la différence d'énergie potentielle divisée par la charge :

$$\boxed{\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q}} \quad (V.30)$$

Appliquons cette notion de potentiel et de différence de potentiel à l'exemple ci-dessus des deux plaques chargées.

Pour une charge positive :

$$q > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} < 0 \Rightarrow V(B) < V(A)$$

Pour une charge négative :

$$q < 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} < 0 \Rightarrow V(B) < V(A)$$

C'est la plaque positive qui est au potentiel le plus élevé, quelle que soit la charge que l'on envisage de placer entre les plaques.

Il n'en reste pas moins que si on place une charge positive entre les deux plaques, elle va aller du point de potentiel le plus élevé vers le point de potentiel le plus bas, comme une pierre qui tombe d'une montagne. En effet, la force électrique qu'elle subit, $\vec{F} = q\vec{E}$, a même sens que le champ électrique, c'est-à-dire de la plaque positive vers la plaque négative (voir Figure V.22). Une charge négative, quant à elle, va aller du point de potentiel le plus bas vers le point de potentiel le plus haut. En effet, la force électrique qu'elle subit, $\vec{F} = q\vec{E}$, est de sens opposé à \vec{E} et est donc dirigée de la plaque négative vers la plaque positive.

Le comportement de la charge négative est comme le serait celui d'un objet de masse négative, s'il en existait, ou celui d'un trou dans le sol qui se comblerait par la chute de roches depuis le sommet d'une montagne. La chute des roches crée un trou au sommet de la montagne et fait disparaître le trou au pied de la montagne : le trou, considéré comme un objet, de masse négative, a remonté la pente de la montagne !

En fait, la notion de potentiel électrique a l'avantage de caractériser de manière unique un point de l'espace par rapport aux charges qui l'entourent, sans qu'il soit besoin d'y placer une charge, tout comme le champ électrique est défini en un point de l'espace sans qu'il y ait nécessairement une charge à cet endroit. Mais attention, le champ électrique est une quantité vectorielle alors que le potentiel électrique est une quantité scalaire.

L'unité d'énergie potentielle électrique du SI est la même que celle de l'énergie potentielle mécanique et que celle du travail, soit le joule (voir III.2). L'unité de potentiel électrique du SI est le volt (V) :

$$1V \equiv 1 J/C \tag{V.31}$$

5.3.4 Relation entre le potentiel et le champ électrique

A partir des relations (V.24) et (V.30), on établit aisément la relation qui existe entre potentiel et champ électrique :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-\int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{\ell}}{q} = \frac{-\int_A^B (q\vec{E}) \cdot d\vec{\ell}}{q}$$

D'où l'on tire :

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \tag{V.32}$$

5.3.5 L'électronvolt

Lorsqu'on étudie les énergies qui entrent en jeu au niveau moléculaire et atomique, on découvre que celles-ci sont extrêmement petites par rapport à l'unité d'énergie du SI, le joule. Comme il est peu pratique d'avoir à manipuler des puissances de 10, pour ce genre d'étude, on préfère travailler avec une autre unité d'énergie, plus petite, l'électronvolt (eV).

Un électronvolt se définit comme l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V.

Etant donné que la charge d'un électron vaut $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (voir V.1) et que $U = qV$ (relation (V.29)), on a :

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{V.33})$$

Même si l'électronvolt peut s'avérer être une unité plus pratique à utiliser au niveau des particules, il ne faut pas oublier que ce n'est pas une unité du SI. Quand on effectue des calculs, il faut d'abord la convertir en joules à l'aide du facteur de conversion ci-dessus.

5.3.6 Potentiel électrique attribuable à une charge ponctuelle

Replaçons-nous dans le cas de la Figure V.20 et calculons le potentiel électrique $V(r)$ à une distance r de la charge q_2 :

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

en utilisant la relation (V.27) qui implique qu'on ait choisi, comme niveau de référence, une énergie potentielle et un potentiel nuls à l'infini.

Effectivement :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

Dès lors, avec cette convention, le potentiel électrique à une distance r d'une charge ponctuelle Q , vaut :

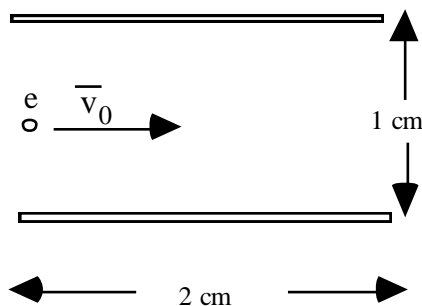
$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (\text{V.34})$$

Remarquons qu'il est positif si $Q > 0$, négatif dans le cas contraire.

5.3.7 Exercices

1. Un électron acquiert une énergie cinétique de $6,4 \times 10^{-16} \text{ J}$ lorsqu'il subit une accélération due à un champ électrique en passant d'une plaque A à une plaque B. Quelle est la différence de potentiel entre les deux plaques? Laquelle possède le potentiel le plus élevé? (R : 4000 V ; $V(B) > V(A)$)
2. Quelle distance sépare deux plaques parallèles reliées à une pile de 45 V, si le champ électrique entre elles a une intensité de 1500 NC^{-1} ? (R : 3 cm)

3. Le potentiel à une certaine distance d'une charge ponctuelle est de 600 V et le champ électrique de 200 NC^{-1} .
- Quelle est cette distance? (R: 3 m)
 - Que vaut cette charge? (R : $2 \times 10^{-7} \text{ C}$)
4. La distance moyenne des protons dans un noyau atomique est d'environ 10^{-15} m . Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle électrique de deux protons dans le noyau. Exprimer le résultat en J et en eV . (R : $2,3 \times 10^{-13} \text{ J}$; $1,44 \times 10^6 \text{ eV}$)
5. Une très grande (\approx infinie) plaque métallique plane est à un potentiel V_0 . Elle porte une charge uniformément répartie d'une densité surfacique $\sigma (\text{C} / \text{m}^2)$. Déterminez le potentiel à une distance x de la plaque (R: $V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$).
6. Une particule alpha (2 protons, 2 neutrons) est envoyée avec une énergie cinétique de 4 MeV sur un noyau d'atome de mercure dont le nombre de protons est 80.
- Quelle est la distance d'approche minimale? (R : $5,76 \times 10^{-14} \text{ m}$)
 - Comparer avec la valeur du rayon nucléaire ($\approx 10^{-14} \text{ m}$).
7. Deux charges ponctuelles, $q_1 = 2 \times 10^{-7} \text{ C}$ et $q_2 = 3 \times 10^{-7} \text{ C}$, sont placées sur un axe x à une distance de $0,10 \text{ m}$ l'une de l'autre ; le sens de l'axe x va de q_1 vers q_2 .
- 1°) Calculer le champ électrique résultant et le potentiel :
- au point médian entre les charges (R : $-3,6 \times 10^5 \text{ V/m} \times \vec{1}_x$; $9 \times 10^4 \text{ V}$),
 - au point situé entre les deux charges sur la droite les joignant à $0,04 \text{ m}$ de la première charge (R : $3,75 \times 10^5 \text{ V/m} \times \vec{1}_x$; $9 \times 10^4 \text{ V}$),
 - au point situé à l'extérieur de ces deux charges sur la droite les joignant à $0,04 \text{ m}$ de la première charge (R : $-1,3 \times 10^6 \text{ V/m} \times \vec{1}_x$; $6,34 \times 10^4 \text{ V}$),
 - à un point situé à $0,10 \text{ m}$ de chacune des deux charges (R : $(-4,5 \times \vec{1}_x + 39 \times \vec{1}_y) \times 10^4 \text{ V/m}$; $4,5 \times 10^4 \text{ V}$).
- 2°) Quel est le travail nécessaire pour déplacer une charge de $4 \times 10^{-7} \text{ C}$ du point défini en c) au point défini en d) (R : $-7,6 \times 10^{-3} \text{ J}$).
8. La différence de potentiel entre deux plaques parallèles de 2 cm de long, séparées de 1 cm , est de 100 V .



Un électron est projeté avec une vitesse initiale v_0 de 10^7 m/s dans une direction perpendiculaire au champ. Quelle est la vitesse de l'électron (grandeur et direction) lorsqu'il émerge des plaques ($m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$)? (R : $1,1 \times 10^7 \text{ m/s}$; $1,1 \times 10^7 \text{ m/s}$; $19,6^\circ$ par rapport à l'horizontale)

5.4 Courant électrique, résistance et piles

Les paragraphes précédents portaient sur les charges électriques au repos. Nous allons maintenant étudier les effets liés à **des charges en mouvement**, c'est-à-dire à des courants électriques. Quelles sont les conditions pour qu'il y ait courant électrique ? Il faut tout d'abord qu'il y ait des charges qui soient libres de circuler, comme les électrons de conduction dans un conducteur ou les ions dans une solution électrolytique. Il ne peut s'établir un courant dans un isolant. Ensuite, il faut mettre les charges en mouvement sous l'effet d'une force. C'est ce qui se produit s'il existe un champ électrique et donc une différence de potentiel. Jusqu'en 1800, des potentiels élevés pouvaient être obtenus en accumulant des charges statiques par frottement. Ces potentiels étaient capables de créer de grosses étincelles qui déchargeaient instantanément l'appareil et ne permettaient donc pas de maintenir un courant de charges électriques stable. Pour cela, il a fallu attendre l'invention de la pile électrique par Volta.

5.4.1 Pile électrique

Volta découvrit que lorsqu'on plongeait deux conducteurs différents ou un conducteur et du carbone dans une solution d'eau acidulée ou alcaline, il apparaissait une différence de potentiel entre les deux matériaux appelés électrodes. La solution est appelée électrolyte. Lorsqu'on relie les deux électrodes par un conducteur, un courant de charges continu s'établit car la différence de potentiel se maintient pendant une période relativement longue.

La différence de potentiel entre les deux électrodes d'une pile, aussi appelées bornes, provient de l'existence de réactions chimiques entre les ions contenus dans la solution et ces dernières. Il s'agit d'un exemple de transformation d'énergie chimique en énergie électrique. Les réactions chimiques qui se produisent dans une pile sont en général assez complexes et dépendent de la nature des électrodes et de l'électrolyte. Nous nous contenterons ici d'en résumer le principe.

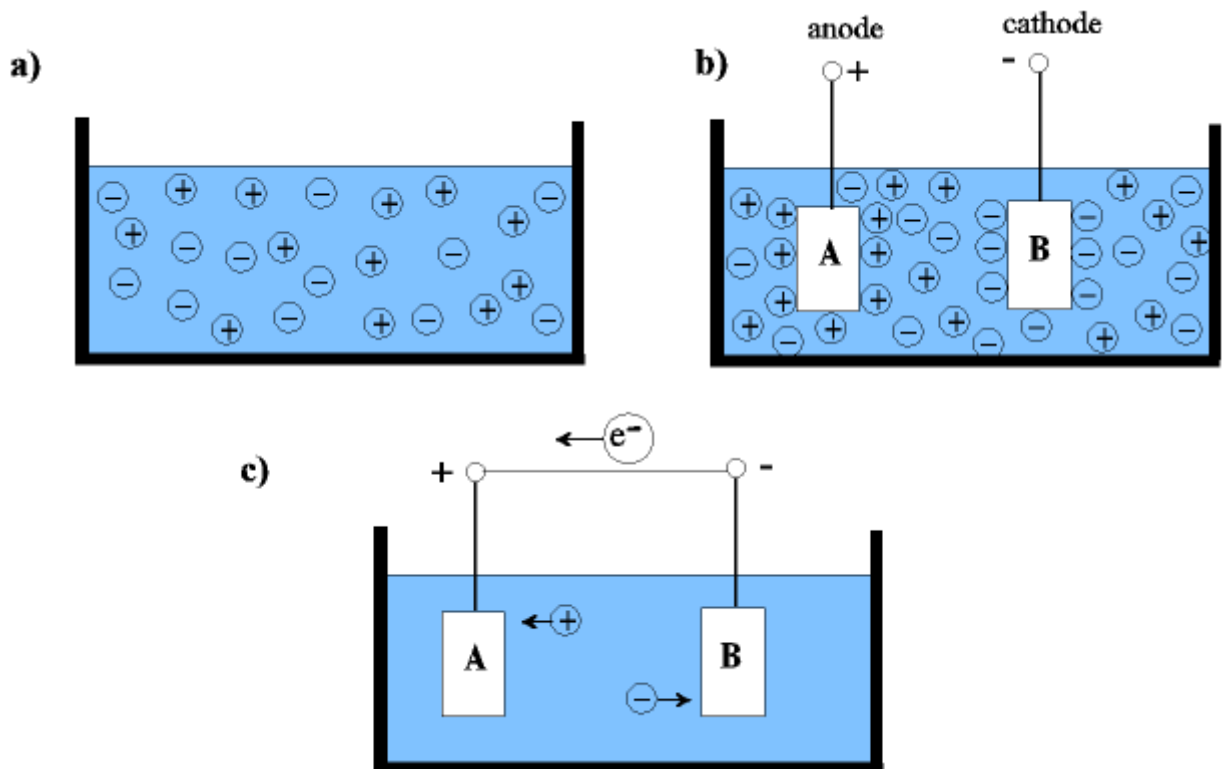


Figure V.23.

Un acide mélangé avec de l'eau se dissocie pour donner des ions positifs et négatifs (figure V.23.a). L'une des électrodes, soit l'électrode A, a une affinité pour les ions positifs qui viennent y réagir et laissent une **charge positive : on l'appelle l'anode**. L'autre électrode, l'électrode B, attire les ions négatifs qui lui apportent une **charge négative**, on l'appelle la **cathode** (figure V.23.b). Au fur et à mesure que les charges s'accumulent sur les électrodes, leur affinité pour les ions diminue et la réaction s'arrête lorsqu'une charge donnée est atteinte, correspondant à une certaine différence de potentiel, la différence de potentiel nominale de la pile.

Lorsqu'on relie les deux bornes de la pile par un conducteur, un courant d'électrons s'établit de la borne – vers la borne +. Ce courant tend à faire diminuer la charge négative de la cathode et vient neutraliser une partie de la charge positive de l'anode. Dès lors les électrodes attirent à nouveau les ions de l'électrolyte et un courant d'ions s'établit dans ce dernier, de sorte à maintenir constante la différence de potentiel entre les deux électrodes (figure V.23.c).

Les réactions chimiques qui se produisent aux électrodes transforment celles-ci progressivement. Lorsque l'une d'elles est totalement transformée, le courant cesse de circuler.

Remarque :

Pour qu'un courant continu s'établisse, il ne suffit pas d'avoir une différence de potentiel (ex. : figure V.23.b), il faut aussi que les charges puissent circuler dans une boucle fermée (ex : figure V.23.c). Dans le cas d'une pile, la boucle fermée est constituée du conducteur qui relie les deux bornes, des électrodes et de l'électrolyte situé entre ces dernières.

La différence de potentiel, ou tension, qui existe entre les bornes d'une pile dépend des matériaux utilisés pour fabriquer la pile et est typiquement de l'ordre du volt. Lorsqu'on monte deux ou plusieurs piles de manière à relier la borne positive de l'une à la borne négative de sa voisine, on dit qu'elles sont associées en série et leurs tensions s'additionnent. Ainsi, dans une lampe de poche, la tension entre les extrémités de deux piles de 1,5 V mises bout à bout de cette manière vaut 3,0 V.

5.4.2 Courant électrique

Lorsque des charges sont en mouvement, que ce soient des électrons dans un conducteur ou des ions dans un électrolyte ou dans un gaz, ou encore des charges dans le vide, le flux de charges au travers d'une surface est caractérisé par une grandeur que l'on appelle l'intensité du courant électrique.

Si pendant l'intervalle de temps Δt , une charge nette ΔQ traverse la surface, l'intensité moyenne du courant électrique est définie par :

$$I_m \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{V.35}$$

Si le flux n'est pas constant, on définit l'intensité instantanée du courant par :

$$\boxed{I \equiv \frac{dQ}{dt}} \tag{V.36}$$

obtenue en faisant tendre Δt vers zéro dans l'expression (V.35). L'intensité du courant électrique, ou courant électrique en abrégé, est donc un débit d'écoulement des charges à travers une surface. L'unité SI de courant électrique est l'ampère (A) qui, d'après la relation (V.35), vaut :

$$1 \text{ A} \equiv 1 \text{ C/s} \quad (\text{V.37})$$

Bien que l'intensité du courant électrique définie ci-dessus soit une quantité scalaire, il est d'usage, dans les circuits électriques, d'indiquer le sens du courant par une flèche. Du point de vue du courant, un flux de particules chargées positivement se déplaçant dans un sens, est équivalent à un flux de particules chargées négativement se déplaçant en sens opposé. Par convention, on a choisi pour le sens du courant, celui du mouvement des charges positives, bien que dans les conducteurs, on sache actuellement que ce sont des électrons, donc des charges négatives, qui se déplacent en sens opposé au sens conventionnel du courant. En effet, l'adoption de cette convention remonte à deux siècles, à une époque où on croyait que le courant électrique dans les conducteurs était dû à un mouvement de charges positives.

La figure V.24 montre le schéma d'un circuit électrique constitué d'une pile et d'un conducteur. La pile est représentée par le signe $\text{—} | \text{—}$, la ligne la plus longue représentant la borne positive.

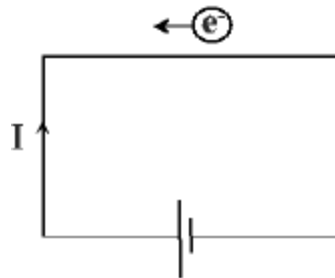


Figure V.24.

Le courant conventionnel, celui qu'auraient des charges positives, s'écoule dans le conducteur, de la borne positive vers la borne négative, c'est-à-dire en sens contraire de celui des électrons. Par contre, à l'intérieur de la pile, dans l'électrolyte, il s'écoule de la borne négative vers la borne positive.

5.4.3 Résistance

Nous venons de voir que lorsqu'il existe une différence de potentiel V entre deux points d'un circuit fermé, il s'établit un courant I . Pour une valeur de V donnée, la valeur de I correspondante dépend de la nature des matériaux qui constituent le circuit. Dans le cas d'un conducteur, par exemple, les électrons de conduction subissent de nombreux chocs avec les atomes du milieu. Ces chocs les freinent dans leur progression, ce qui explique qu'il faille maintenir une différence de potentiel, donc une force, pour maintenir un courant constant. Dans le vide, des charges électriques soumises à une différence de potentiel constante, accélèrent et voient leur vitesse augmenter indéfiniment. Dans la matière, l'action de freinage des charges, dépend du matériau considéré et on définit une grandeur appelée résistance :

$$R \equiv \frac{V}{I} \quad (\text{V.38})$$

En effet, ce rapport indique comment le matériau résiste au passage du courant lorsqu'on lui applique une différence de potentiel. Pour une valeur donnée de la tension V , un courant I deux fois plus intense s'établit dans un circuit qui a une résistance deux fois plus petite : $I = \frac{V}{R} \propto \frac{1}{R}$, à V fixé. L'unité de résistance du SI est l'ohm (Ω). D'après la relation (V.38), on voit que :

$$1,0 \Omega \equiv 1 \text{ V/A} \quad (\text{V.39})$$

Une résistance d'1 Ω laisse passer un courant de 1 A lorsqu'on lui applique une différence de potentiel de 1 V.

Georg Simon Ohm a étudié systématiquement la résistance d'un grand nombre de matériaux. Il lui est apparu que pour un grand nombre d'entre eux, en particulier les métaux à température ambiante, leur résistance est indépendante de la tension appliquée, et donc du courant qui y circule, pour un large domaine de valeurs. Ce fait est connu sous le nom de loi d'Ohm bien qu'il ne s'agisse pas véritablement d'une loi mais d'une observation qui n'est valable que pour certains matériaux et dans certaines conditions. Ces matériaux sont appelés **conducteurs ohmiques**.

Pour les conducteurs ohmiques, on a la loi d'Ohm :

$$\mathbf{V = R I, \text{ avec R constant.}}$$

(V.40)

Pour les conducteurs ohmiques, leur caractéristique, c'est-à-dire la fonction $I = f(V)$ qui donne le courant en fonction de la tension appliquée, est linéaire (voir figure V.25).

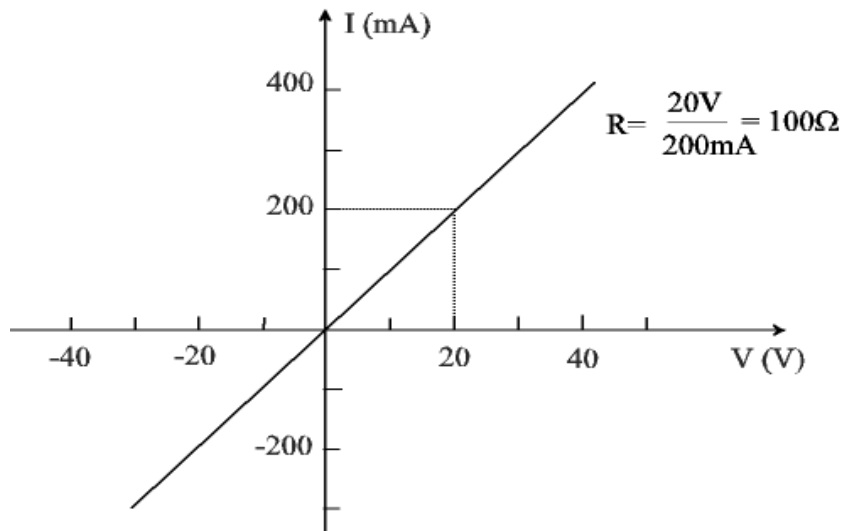



Figure V.25 : Caractéristique d'un conducteur ohmique.

Dans un circuit, un élément avec une résistance ohmique significative est représentée par :



Ces éléments sont connectés entre eux et aux autres éléments du circuit, tels qu'une pile par exemple, par des fils conducteurs dont la résistance est généralement négligeable, représentés par une simple ligne.

Il y a beaucoup de matériaux qui ne sont pas ohmiques et n'obéissent pas à la loi d'Ohm. C'est le cas notamment d'une diode. Une diode est un élément qui laisse passer facilement le courant lorsque la différence de potentiel est positive (résistance négligeable) mais empêche son passage lorsque celle-ci est négative (résistance très grande). Dans les schémas électriques, les diodes sont représentées par le signe : , le sens de la flèche indiquant le sens passant.

Les diodes sont utilisées dans de nombreux dispositifs électriques. Elles peuvent être utilisées, par exemple, pour permettre de charger une batterie tout en l'empêchant de se décharger.

5.4.4 Résistivité et conductivité

On a constaté expérimentalement que la résistance R d'un fil homogène est directement proportionnelle à sa longueur L et inversement proportionnelle à l'aire de sa section, A : il s'agit de la **loi de Pouillet**. En d'autres termes :

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (V.41)$$

où la constante de proportionnalité ρ , appelée résistivité, dépend du matériau utilisé. Dans le SI, elle s'exprime en $\Omega \cdot m$. L'inverse de la résistivité :

$$\sigma = 1/\rho, \quad (V.42)$$

porte le nom de conductivité et s'exprime en $(\Omega \cdot m)^{-1}$ ou en siemens/mètre ($S m^{-1}$).

La conductance est l'inverse de la résistance :

$$G = \frac{1}{R}$$

L'unité de conductance est le siemens (S) ou ohm^{-1} (Ω^{-1}).

La relation (V.41) s'explique si on se rappelle que la résistance trouve son origine dans les chocs des charges électriques en mouvement avec les atomes du milieu. En effet, si le fil est deux fois plus long, il y aura deux fois plus de chocs et la résistance sera deux fois plus grande. Par contre, si l'aire de la section du fil est deux fois plus grande, deux fois plus de courant pourra passer et la résistance sera deux fois moindre. Exactement comme une baignoire qui se vide deux fois plus vite si l'orifice du tuyau de vidange a une surface deux fois plus grande.

Pour la plupart des conducteurs, la résistivité varie entre 10^{-8} et $10^{-6} \Omega \cdot m$; pour les isolants, elle varie de 10^{12} et $10^{20} \Omega \cdot m$. Les semi-conducteurs ont une résistivité de l'ordre de l'ohm mètre ($\Omega \cdot m$).

La résistivité des matériaux dépend de la température. En général, celle des métaux augmente avec la température. En effet, sous l'effet de la chaleur, les atomes accélèrent leurs mouvements d'agitation thermique aléatoires, ce qui tend à freiner plus la progression des électrons de conduction. En première approximation, la résistivité des métaux croît linéairement avec la température :

$$\rho_T = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (V.43)$$

où ρ_T désigne la résistivité à une température T , ρ_0 , la résistivité à une température de référence, T_0 , et α , le coefficient thermique de résistivité. Dans le tableau V.1 on trouve les valeurs de la résistivité et du coefficient thermique, valables à une température de 20°C , pour quelques matériaux usuels.

On remarque dans le tableau V.1, qu'effectivement, le coefficient de température des métaux est positif et très faible, inférieur au pourcent. Ceci explique que l'élévation de température des conducteurs due au passage d'un courant a une influence négligeable sur leur résistivité et conduit à la loi d'Ohm pour cette classe de conducteurs : leur résistance est constante ; elle ne dépend pas de l .

Les valeurs de la résistivité et du coefficient thermique du tableau V.1, montrent aussi que les propriétés de conduction de l'électricité varient fortement d'un matériau à l'autre. Un bon conducteur a une résistivité de l'ordre de $10^{-8} \Omega m$ tandis que pour un bon isolant elle est de l'ordre de $10^{14} \Omega m$. Les semi-conducteurs ont des valeurs intermédiaires. Le coefficient thermique est positif et inférieur au pourcent pour les métaux, il est négatif et dix fois plus grand pour les semi-conducteurs. D'où proviennent ces différences ? Pour le comprendre, il faut faire appel à la structure atomique de la matière ce qui implique quelques notions de mécanique quantique, qui sortent du cadre de ce cours.

Tableau V.1.

| Matériau | $\rho (\Omega m)$ | $\alpha (^\circ C)^{-1}$ |
|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| Conducteurs | | |
| Aluminium | $2,8 \times 10^{-8}$ | $4,29 \times 10^{-3}$ |
| Argent | $1,6 \times 10^{-8}$ | $6,1 \times 10^{-3}$ |
| Cuivre | $1,7 \times 10^{-8}$ | $6,8 \times 10^{-3}$ |
| Fer | $9,7 \times 10^{-8}$ | $6,51 \times 10^{-3}$ |
| Mercure | 98×10^{-8} | $0,9 \times 10^{-3}$ |
| Nichrome | 100×10^{-8} | $0,4 \times 10^{-3}$ |
| Platine | $10,6 \times 10^{-8}$ | $3,9 \times 10^{-3}$ |
| Tungstène | $5,6 \times 10^{-8}$ | $4,5 \times 10^{-3}$ |
| Semi-conducteurs(*) | | |
| Carbone (graphite) | $(3 - 60) \times 10^{-5}$ | $-0,5 \times 10^{-3}$ |
| Germanium | $(1 - 500) \times 10^{-3}$ | -50×10^{-3} |
| Silicium | $0,1 - 60$ | -70×10^{-3} |
| Isolants | | |
| Caoutchouc rigide | $10^{13} - 10^{15}$ | |
| Mica | 2×10^{15} | |
| Téflon | 10^{14} | |
| Verre | $10^9 - 10^{13}$ | |

(*) Ces valeurs varient fortement en présence de quantités insignifiantes d'impuretés.

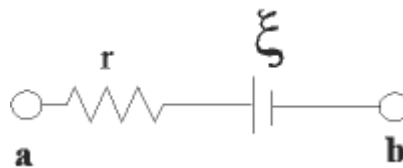
5.4.5 Force électromotrice (F.é.m.) et tension aux bornes

Un instrument qui, comme une pile ou un générateur d'électricité, transforme un type d'énergie quelconque, chimique, mécanique, nucléaire ou autre, en énergie électrique porte le nom de **source de force électromotrice**. On appelle **force électromotrice** la différence de potentiel entre les bornes d'une telle source lorsqu'aucun courant ne s'écoule vers un circuit extérieur et on représente généralement cette grandeur par ξ . En fait le terme de "force" électromotrice est inapproprié puisqu'il ne s'agit pas

d'une force mais d'une différence de potentiel. C'est pourquoi, pour éviter toute confusion, nous nous servons surtout de l'abréviation pour force électromotrice : **f.é.m.**

On observe couramment que lorsqu'une pile débite du courant, la tension entre ses bornes devient inférieure à la valeur nominale de sa f.é.m. Cela résulte de ce que le courant débité par la pile doit aussi circuler dans l'électrolyte : des ions doivent atteindre l'une ou l'autre des électrodes. Ceux-ci ont des collisions avec les atomes du milieu et sont freinés dans leur progression, tout comme les électrons de conduction dans un métal. La pile exerce donc elle aussi une certaine résistance au passage du courant, appelée **résistance interne** et symbolisée par r . Dans une pile, comme dans toute source de f.é.m., tout se passe comme si on avait en série avec une source de f.é.m. parfaite qui aurait toujours une différence de potentiel égale à la f.é.m., soit ξ , une résistance r (figure V.26a).

a)



b)

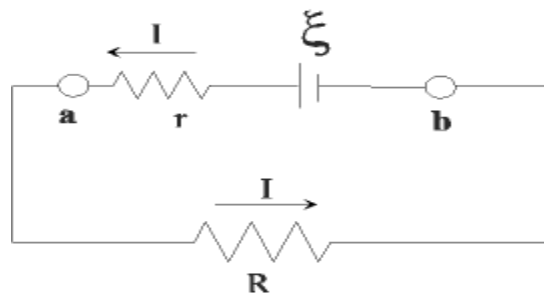


Figure V.26.

La résistance interne d'une f.é.m. se trouve à l'intérieur de la source de f.é.m. et on ne peut jamais l'en dissocier. La tension que l'on peut mesurer est celle présentée aux bornes de l'appareil, soit a et b.

Lorsque la source de f.é.m. ne débite aucun courant (voir Figure V.26.a), la différence de potentiel aux extrémités de r vaut : $\Delta V = r I = r \times 0 = 0$ et la borne positive (longue barre) de la f.é.m. est au même potentiel que a : $V_{ab} = V_a - V_b = \xi$.

Lorsque la source de f.é.m. débite un courant I (voir Figure V.26b), la différence de potentiel aux extrémités de r vaut $\Delta V = r I \neq 0$ et on a :

$$\boxed{V_{ab} = \xi - r I} \quad (V.44)$$

5.4.6 Puissance électrique

L'énergie électrique peut se convertir aisément en d'autres formes d'énergie : les moteurs servent à transformer de l'énergie électrique en travail mécanique. Des appareils comme les fers à repasser électriques, les radiateurs, les poêles, les grille-pain et les sèche-cheveux transforment l'énergie électrique en énergie thermique dans une résistance appelée "élément chauffant" (l'on parle de **l'effet Joule**). L'effet Joule correspond à une **chaleur produite par unité de temps** provenant de **l'énergie potentielle électrique** qui est continuellement perdue lorsqu'un courant passe au sein d'une résistance ohmique.

Cette conversion de l'énergie électrique en énergie thermique est due au courant qui passe dans la résistance : les électrons de conduction entrent en collision avec les atomes de la résistance. Lors de ces collisions, chaque électron cède une partie de son énergie cinétique à l'atome avec lequel il se heurte. Par conséquent, l'énergie cinétique moyenne des atomes augmente, ce qui fait monter la température de la résistance. En effet, la température d'un corps est associée à l'énergie cinétique d'agitation thermique des molécules qui le composent. L'énergie thermique accrue de la résistance se transmet, par conduction et par convection, à l'air d'un radiateur ou aux aliments dans une poêle (ne pas confondre avec un poêle électrique) ; elle se propage par rayonnement au pain dans un grille-pain.

Pour déterminer la puissance d'un appareil électrique, on utilise le fait que l'énergie transformée lorsqu'une charge infinitésimale dq se déplace sous l'effet d'une différence de potentiel V , correspond à $dU = dq V$ (équation (V.29)). Si dt désigne le temps pendant lequel la charge dq se déplace sous l'effet de V , la puissance P , qui représente le taux de transformation de l'énergie, (voir III.18) s'exprime par :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} V$$

Or la charge qui s'écoule par unité de temps, dq/dt , n'est autre que le courant électrique I (voir (V.36)). On obtient donc :

$$\boxed{P = I V} \quad (V.45)$$

où I désigne le courant qui passe dans l'appareil et V , la différence de potentiel qui est appliquée à ses bornes. Dans le SI, la puissance électrique s'exprime par la même unité que n'importe quel autre type de puissance, soit le watt (voir section III.7).

Dans le cas d'une résistance ohmique, la relation générale (V.45), peut s'écrire de deux autres manières, en utilisant la loi d'Ohm, $V = R I$:

$$P = I(RI) = RI^2, \text{ pour } R \text{ ohmique} \quad (V.46)$$

$$P = \frac{V}{R} \cdot V = \frac{V^2}{R}, \text{ pour R ohmique} \quad (V.47)$$

5.4.7 Courant alternatif

Lorsqu'on relie une pile à un circuit, le courant se déplace de façon régulière dans une direction. On parle alors de **courant continu** ou DC (pour "Direct Current" en anglais) (figure V.27.a). Par contre les génératrices de courant des centrales électriques produisent un courant qui change de direction plusieurs fois par seconde, qu'on appelle **courant alternatif** ou AC (pour "Alternative Current" en anglais). La variation dans le temps de l'intensité de ce courant a généralement une forme sinusoïdale (figure V.27.b). C'est le cas du courant fourni à nos installations domestiques et industrielles.

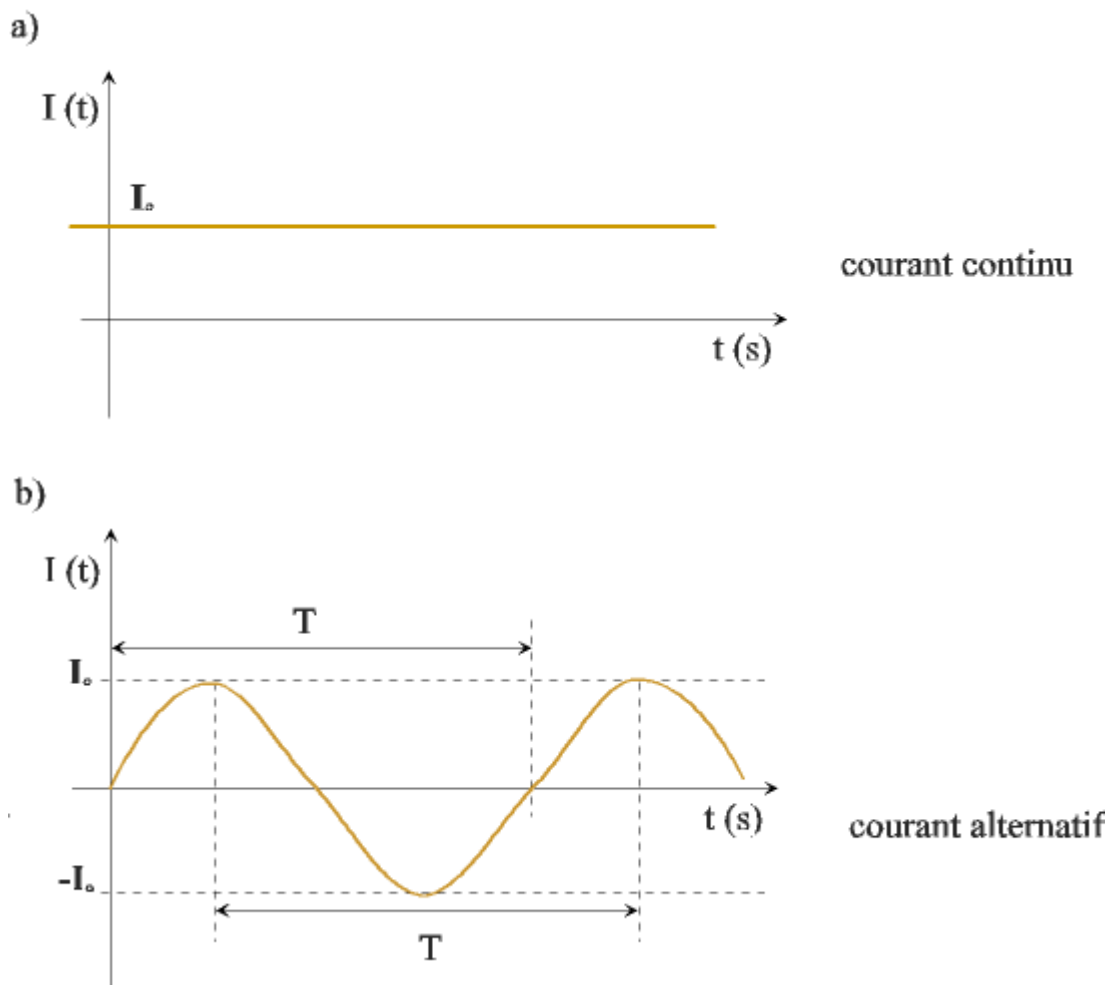


Figure V.27.

Lorsque le courant alternatif a une forme sinusoïdale, il prend une valeur maximum, I_0 , que l'on appelle l'amplitude du courant. Il varie alors entre $+I_0$ et $-I_0$ (figure V.27 b) et on peut écrire :

$$I = I_0 \sin(2\pi ft), \quad (V.48)$$

où f est la fréquence du courant, c'est-à-dire le nombre de fois par seconde que le courant effectue une période T complète, c'est-à-dire le nombre de fois par seconde qu'il passe par I_0 . Au Burundi la fréquence du courant fourni dans les installations domestiques est de 50 Hz. On écrit aussi :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \sin(\omega t) \quad (\text{V.49})$$

où on a posé :

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{V.50})$$

Nous verrons que si le courant fourni par une génératrice a une forme sinusoïdale c'est parce que la tension qu'elle fournit est sinusoïdale. En effet, dans le cas d'un circuit qui a une résistance ohmique R, on a :

$$\mathbf{V} = \mathbf{R I} = \mathbf{R I}_0 \sin(2\pi f t) = \mathbf{V}_0 \sin(2\pi f t)$$

où la tension maximale vaut :

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{R I}_0 \quad (\text{V.51})$$

La figure V.27.b permet d'observer que le courant sinusoïdal est aussi souvent positif que négatif : le courant moyen est nul, ce qui ne veut pas dire que le courant alternatif ne dissipe pas de puissance, ni qu'aucune chaleur n'est produite dans un fil électrique dans lequel passe un courant alternatif. En effet, dire que le courant est aussi souvent positif que négatif veut dire que la moitié du temps les électrons circulent dans une direction, l'autre moitié du temps dans l'autre direction. Dans les deux cas les électrons subissent des chocs avec les atomes du conducteur et il y a échauffement. En effet, la puissance instantanée vaut, dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R I}^2(t) = \mathbf{R I}_0^2 \sin^2(2\pi f t).$$

Faisant intervenir le carré du sinus, la puissance instantanée n'est jamais négative : elle est positive la plupart du temps et ne s'annule que lorsque la fonction sinus s'annule, c'est-à-dire, chaque demi-période (figure V.28).

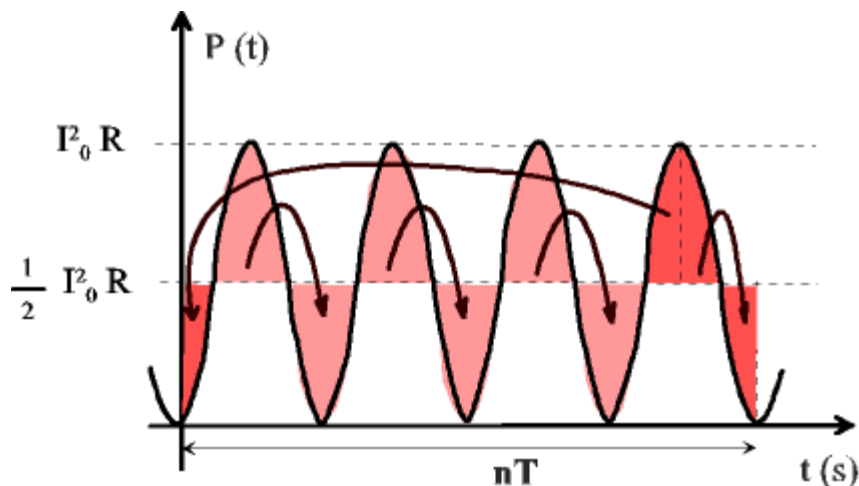


Figure V.28.

La valeur moyenne de la puissance se calcule sur un nombre entier de périodes, soit nT . Pour l'estimer, on fait la somme de toutes les valeurs prises par la puissance durant cet intervalle de temps, c'est-à-dire :

$$\int_0^{nT} P(t) dt \text{ et on divise par l'intervalle de temps, ce qui donne :}$$

$$P_m = \frac{\int_0^T R I_0^2 \sin^2(2\pi ft) dt}{T}$$

en choisissant $n = 1$. Cette intégrale peut être estimée de manière graphique si on se souvient que l'intégrale définie représente l'aire de la surface délimitée par la fonction intégrée et les bornes d'intégration. En effet, cette surface a la même aire que le rectangle de hauteur $\frac{1}{2} I_0^2 R$ et de base nT : les bosses viennent remplir les creux. Dès lors :

$$P_m = \frac{\frac{1}{2} I_0^2 R \times nT}{nT}$$

Et la puissance moyenne est donnée par :

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2} I_0^2 R} \quad (V.52)$$

En tenant compte de la relation (V.51), elle peut aussi s'écrire :

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2} I_0 V_0} \quad (V.53)$$

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}} \quad (V.54)$$

Les relations V.52, V.53 et V.54 montrent que la puissance moyenne dissipée par un courant alternatif de forme sinusoïdale d'amplitude I_0 dans une résistance R , fourni par une tension d'amplitude V_0 , est la même que la puissance instantanée dissipée par un courant continu qui aurait une intensité constante :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (V.55)$$

fournie par une tension continue :

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (V.56)$$

C'est pourquoi I_{eff} et V_{eff} sont appelés **courant efficace** et **tension efficace**.

5.4.8 Exercices

1. Un courant de 1 A circule dans un fil. Combien d'électrons passent par seconde en un point du fil ? (R : $6,25 \times 10^{18}$).
2. Un oiseau est posé sur une ligne de transmission électrique transportant un courant de 1800 A et ayant une résistance de $2,0 \times 10^{-5} \Omega$ par mètre. Si ses pattes se trouvent à 3,0 cm l'une de l'autre, quelle tension ressent-il ? (R : $1,1 \times 10^{-3}$ V).
3. Un fil de 20,0 m de long et de 1,80 mm de diamètre oppose au courant une résistance de $3,20 \Omega$. Déterminez celle d'un fil de 35,0 m de long et de 3,00 mm de diamètre fabriqué dans le même matériau. (R : 2Ω).
4. Une ampoule de 100 W oppose au courant une résistance d'environ 12Ω lorsqu'elle est à température ambiante (20°) et de 140Ω lorsqu'elle est allumée et chauffe. Évaluez la température du filament lorsque l'ampoule est allumée en supposant que son coefficient thermique de résistivité α vaut en moyenne $0,0060^\circ\text{C}^{-1}$ pour cet écart de température. (R : 1798°C).
5. Une centrale électrique fournit 560 kW à une usine au moyen d'une ligne de tension ayant une résistance de $3,2 \Omega$. Déterminez la quantité de puissance économisée si l'électricité est transportée sous une tension de 40 000 V plutôt que de 12 000 V. (R : 6342 W).
6. À l'intérieur d'une maison, l'installation électrique doit comporter des fils assez épais pour qu'ils ne chauffent pas au point de déclencher un incendie. Quel diamètre doit avoir un fil de cuivre destiné à transporter un courant maximal de 40 A sans produire plus de 1,6 W de chaleur par mètre de longueur ? (Résistivité du cuivre : $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$; R : 4,7 mm).
7. Une tension alternative sinusoïdale d'une valeur maximale de 80 V passe entre les bornes d'une résistance de 160Ω . Déterminez la valeur efficace du courant et sa valeur maximale à l'intérieur de ce dispositif. (R : 0,35 A ; 0,5 A).
8. On relie la bobine d'un radiateur d'une résistance de 20Ω à une ligne de tension alternative de 240 V (valeur efficace). Déterminez la quantité de puissance moyenne utilisée. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de la puissance instantanée ? (R : 2880 W ; 5760 W ; 0 W).
9. L'intensité d'un courant se traduit par l'équation suivante : $I = 2,8 \sin 220 t$, où I est exprimé en ampères et t en secondes.
Déterminez :
 - a) la fréquence
 - b) la valeur efficace du courant.
 - c) S'il s'agissait du courant qui traverse une résistance de 60Ω , par quelle équation pourrait-on exprimer la tension en fonction du temps ? (R : 35 Hz ; 1,98 A ; $168 \sin 220 t$).

5.5 Circuits avec résistances ohmiques

Ce paragraphe porte sur les courants et les différences de potentiel dans les circuits.

5.5.1 Résistances en série et en parallèle

On dit que deux ou plusieurs résistances sont branchées en **série** lorsqu'elles sont reliées l'une à l'autre bout à bout par un conducteur, de telle sorte à former un seul conducteur dans lequel **un même courant** peut passer (figure V.29).

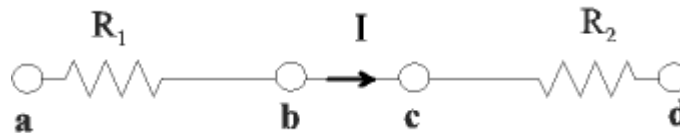


Figure V.29.

La différence de potentiel aux bornes de R_1 vaut :

$$\Delta V_1 = V_a - V_b = R_1 I,$$

en vertu de la loi d'Ohm. De même, aux bornes de R_2 :

$$\Delta V_2 = V_c - V_d = R_2 I$$

La différence de potentiel aux bornes de l'ensemble formé par les deux résistances en série vaut :

$$\Delta V = V_a - V_d = V_a - V_b + V_b - V_d = V_a - V_b + V_c - V_d .$$

En effet, puisque la résistance du fil conducteur qui lie b à c est négligeable, $V_b - V_c \approx 0 \times I \approx 0$ et $V_b = V_c$. Dès lors, en vertu des relations précédentes :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

Donc, la différence de potentiel aux bornes de deux résistances placées en série est égale à la somme des différences de potentiel aux bornes de chacune des résistances.

L'ensemble formé par les résistances R_1 et R_2 en série, offre donc au passage du courant une résistance équivalente :

$$R_{\text{éq}} = \frac{\Delta V}{I} = R_1 + R_2.$$

On peut facilement généraliser le raisonnement ci-dessus à un nombre n de résistances en série. Celles-ci auront une résistance équivalente :

| |
|--|
| $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \text{ pour des résistances en série}$ |
|--|

(V.57)

La résistance équivalente à plusieurs résistances associées en série est égale à la somme des résistances.

Lorsque les résistances groupées ont leurs **deux extrémités connectées ensemble** au reste du circuit (figure V.30), on dit qu'elles sont placées en **parallèle**.

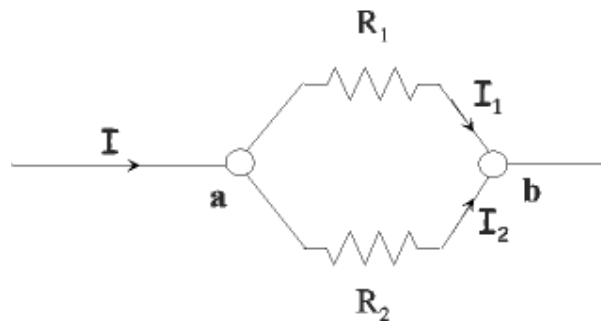


Figure V.30.

Cette fois, la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble est égale à celle aux bornes de chaque résistance placée en parallèle.

$$\Delta V = V_a - V_b = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

Par contre, **le courant total I se divise** lorsqu'il arrive en a, une partie, I_1 , passant par R_1 , l'autre, I_2 , passant par R_2 :

$$I = I_1 + I_2 \quad (V.58)$$

La résistance équivalente offerte au passage du courant par l'ensemble des deux résistances en parallèle est donnée par :

$R_{\text{éq}} = \frac{\Delta V}{I}$, d'où l'on tire $I = \frac{\Delta V}{R_{\text{éq}}}$. Dès lors, en appliquant la loi d'Ohm aux courants I_1 et I_2 de la relation

(58), on obtient :

$$\frac{\Delta V}{R_{\text{éq}}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}.$$

En divisant membre à membre par ΔV , il vient :

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En généralisant le raisonnement ci-dessus au cas de n résistances placées en parallèle, on obtient :

| | |
|--|--------|
| $\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \text{ pour des résistances en parallèle}$ | (V.59) |
|--|--------|

Exemple :

Une pile ayant une f.é.m. de 9 V et une résistance interne de 0,5 Ω alimente le circuit schématisé sur la Figure V.31.

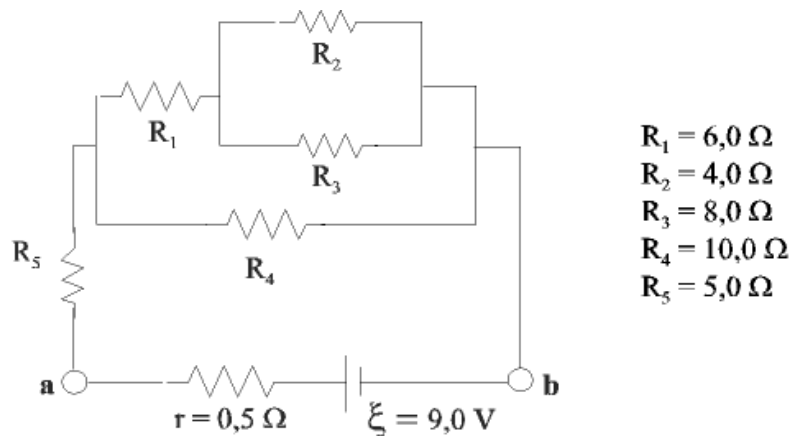


Figure V.31.

On demande : a) la résistance équivalente du circuit, b) le courant débité par la pile, c) la tension aux bornes de celle-ci.

a) les résistances R_2 et R_3 placées en parallèle ont une résistance équivalente R_{23} , donnée par :

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4,0} + \frac{1}{8,0},$$

de sorte que $R_{23} = 2,7 \Omega$. Ce système se trouve groupé en série avec la résistance R_1 , ce qui donne pour la résistance équivalente de la branche supérieure du circuit :

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 6,0 + 2,7 = 8,7 \Omega.$$

Cette résistance de la branche supérieure est placée en parallèle avec R_4 , ce qui donne en les combinant : $\frac{1}{R_{1234}} = \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{8,7} + \frac{1}{10,0}$ et conduit à : $R_{1234} = 4,8 \Omega$. Pour obtenir la résistance équivalente de tout le circuit branché aux bornes (a) et (b) de la pile, il faut encore lui ajouter R_5 , branchée en série :

$$R_{\text{éq}} = R_{1234} + R_5 = 4,8 + 5,0 = \underline{\underline{9,8 \Omega}}.$$

b) pour calculer le courant débité par la pile, il faut tenir compte de sa résistance interne qui s'ajoute en série avec la résistance du circuit proprement dit, de sorte que :

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{éq}} + r = 9,8 + 0,5 = 10,3 \Omega.$$

Et : $I = \xi / R_{\text{tot}} = 9,0 / 10,3 = \underline{\underline{0,87 \text{ A}}}$.

c) la différence de potentiel aux bornes (a) et (b) de la pile sera par conséquent :

$$V_a - V_b = \xi - rI = 9,0 - 0,5 \times 0,87 = \underline{\underline{8,6 \text{ V}}}.$$

5.5.2 Lois de Kirchhoff

Dans l'exemple précédent, nous avons déterminé l'intensité du courant débité par la pile en combinant les résistances placées en série et en parallèle et en utilisant la loi d'Ohm. Dans les circuits complexes, dans lesquels les résistances ne sont ni en série, ni en parallèle (voir Figure V.32.a) ou lorsqu'il y a plusieurs sources de f.é.m. (figure V.32.b), cette méthode ne s'applique plus et il faut faire appel à d'autres méthodes, notamment celle basée sur les lois de Kirchhoff.

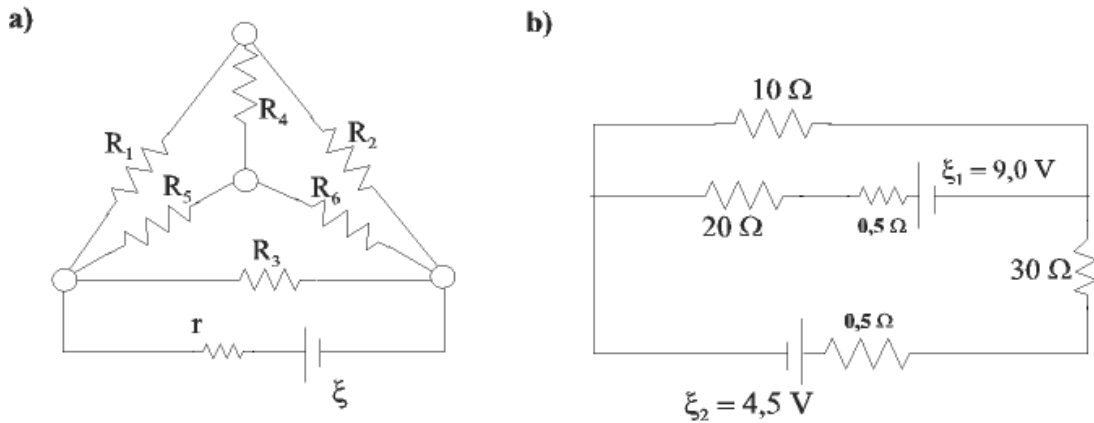


Figure V.32.

Les lois de Kirchhoff découlent des lois de conservation de l'énergie et de la charge électrique. La première, ou loi des nœuds résulte de la conservation de la charge. On appelle nœud d'un circuit électrique un endroit où sont connectées au moins trois branches, comme aux points a et b du système de résistances de la figure V.31. La **loi des nœuds** stipule que :

la somme de tous les courants qui pénètrent dans n'importe quel nœud doit égaler celle de tous les courants qui en sortent.

La relation :

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 \quad (V.60)$$

exprime la loi des nœuds pour le nœud schématisé à la figure V.34.

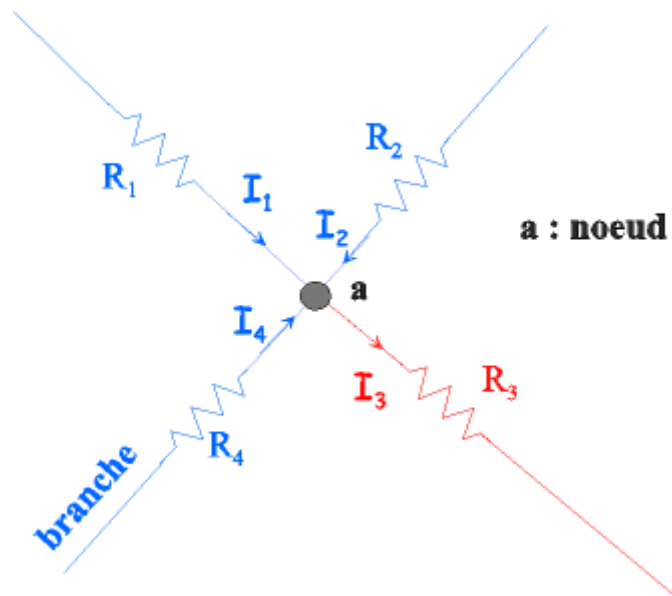


Figure V.33.

La loi des nœuds résulte bien de la loi de la conservation de la charge électrique si on se souvient qu'un courant est un taux de charges électriques. La somme des courants qui entrent dans un nœud amène un certain nombre de charges par seconde qui, au nom de la conservation de la charge, doivent en sortir,

par les branches ayant un courant sortant, de sorte qu'il n'y ait ni création, ni accumulation de charges au nœud.

Remarquons que lorsque nous avons écrit la relation (V.58), nous avons déjà fait appel à la loi des nœuds sans le dire.

La **deuxième loi de Kirchhoff, ou loi des mailles**, découle de la conservation de l'énergie. Elle stipule que :

dans un circuit, la somme algébrique des variations de potentiel le long de n'importe quel parcours fermé doit être nulle.

La relation :

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de} + V_{ef} + V_{fa} = 0, \quad (V.61)$$

exprime la loi des mailles pour la maille (a, b, c, d, e, f, a) schématisée à la figure V.34. Celle-ci comporte deux nœuds, (a) et (b), où il y a plus de deux branches qui arrivent (trois), les points c, d, e, f sont de simples points de référence.

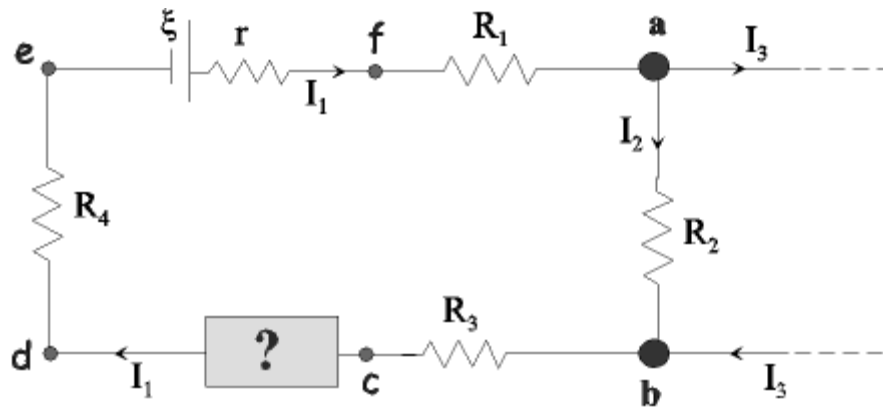


Figure V.34.

La somme de différences de potentiels (V.61) peut s'expliquer par :

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_e) + (V_e - V_f) + (V_f - V_a) = V_a - V_a = 0,$$

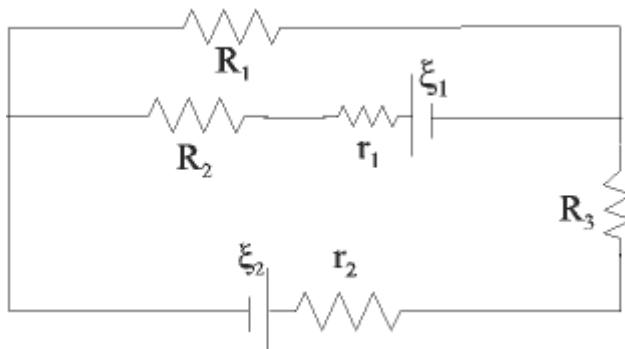
puisque le potentiel électrique est une différence d'énergie potentielle par unité de charge et que l'énergie potentielle ne dépend que du point a où on se trouve.

5.5.3 Méthode de résolution de circuits par les lois de Kirchhoff

Lorsqu'on a à résoudre un circuit tel que ceux de la figure V.32, on peut faire appel aux lois de Kirchhoff établies à la section précédente. Résoudre un circuit veut généralement dire : déterminer les courants qui passent dans chaque branche, connaissant les sources de f.é.m. Les lois de Kirchhoff permettent d'établir un **système de n équations à n inconnues**, une par branche.

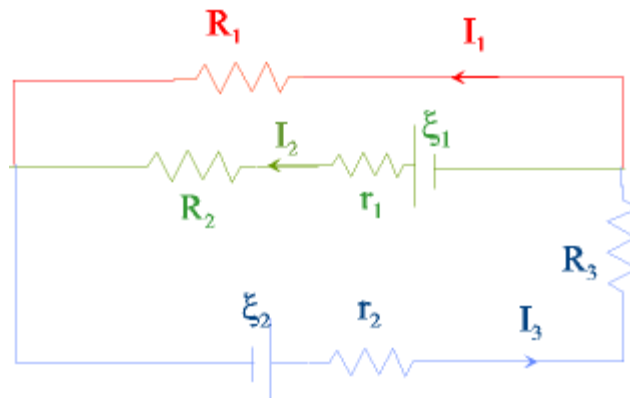
Pour établir ce système d'équations, il peut être utile d'adopter une méthode systématique qui permet de minimiser les risques d'erreur. En voici une, appliquée au cas de la figure V.32.b :

1. Faites un schéma clair du circuit dans lequel chaque élément est représenté par un symbole : ξ_i pour une f.é.m., R_i pour une résistance, etc ... Mettez en regard les valeurs numériques de ces symboles, dans un tableau :



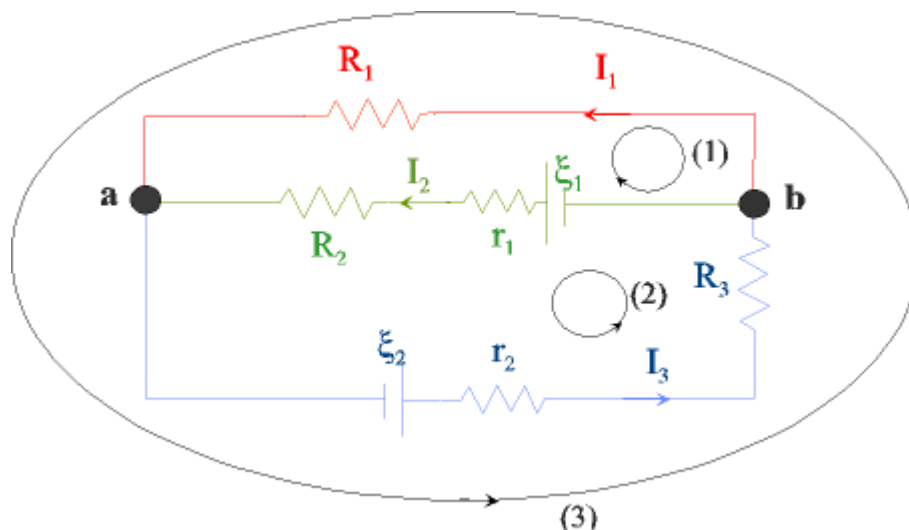
| |
|-------------------------|
| $\xi_1 = 9 \text{ V}$ |
| $\xi_2 = 4,5 \text{ V}$ |
| $r_1 = 0,5 \Omega$ |
| $r_2 = 0,5 \Omega$ |
| $R_1 = 10 \Omega$ |
| $R_2 = 20 \Omega$ |
| $R_3 = 30 \Omega$ |

2. Identifiez chaque branche i du circuit et attribuez un symbole I_i pour le courant qui y circule. Choisissez arbitrairement un sens pour le courant et indiquez-le sur le schéma par une flèche :



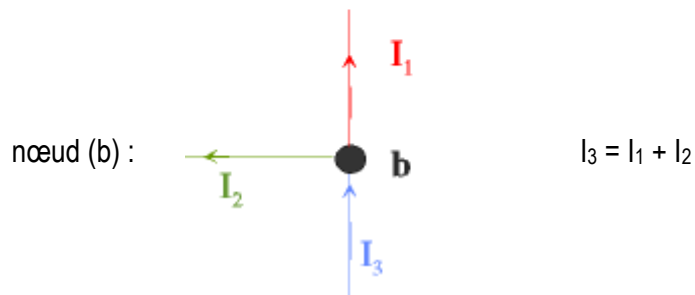
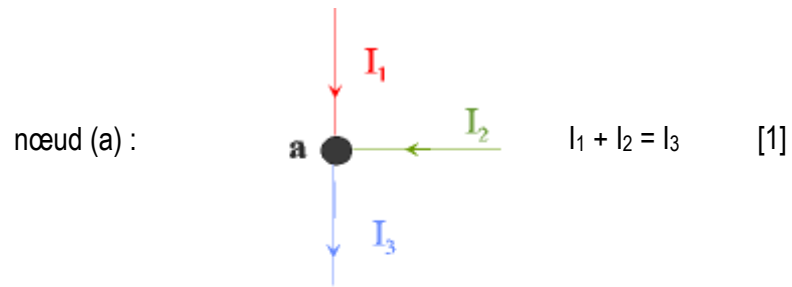
Souvenez-vous que c'est nécessairement le même courant qui circule partout le long d'une même branche et qu'il ne peut donc y avoir deux symboles inscrits le long d'une même branche.

3. Identifiez les différents nœuds du circuit et désignez les par une lettre : a, b, ... Indiquez les différentes mailles par une boucle et indiquez-y le sens dans lequel vous allez les parcourir, sens que vous choisissez arbitrairement.



Dans le circuit ci-dessus, il y a deux nœuds, a et b et trois mailles : (1), (2) et (3).

4. Ecrivez la loi des nœuds pour les différents nœuds :



En fait les deux équations obtenues ci-dessus sont identiques : dans tous les circuits vous constaterez que l'information apportée par le dernier nœud est redondante.

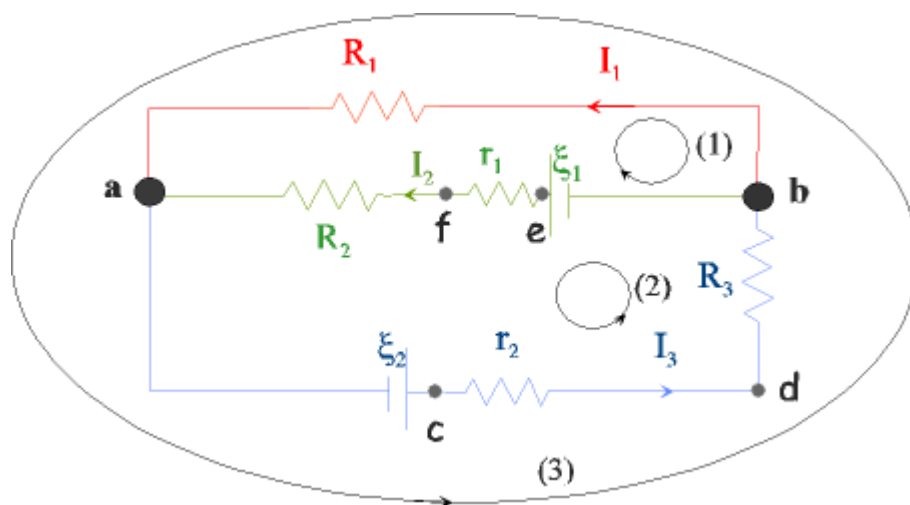
5. Mettez une lettre de référence entre chaque élément différent du circuit et écrivez la loi des mailles pour chacune d'entre elle.

maille (1) : $V_{ab} + V_{be} + V_{ef} + V_{fa} = 0$ [2]

maille (2) : $V_{ac} + V_{cd} + V_{db} + V_{be} + V_{ef} + V_{fa} = 0$ [3]

maille (3) : $V_{ac} + V_{cd} + V_{db} + V_{ba} = 0$

On peut voir aisément que la 3^{ème} équation ci-dessus est une combinaison linéaire des deux autres : l'information apportée par la dernière maille est redondante.



6. Les équations [1], [2] et [3], établies ci-dessus, doivent permettre de déterminer les courants des différentes branches : I_1 , I_2 et I_3 . Pour cela, il reste encore à remplacer les différences de potentiel qui apparaissent dans la loi des mailles, soit par leur valeur numérique lorsque celle-ci est donnée, soit en fonction du courant en utilisant la loi d'Ohm : $V_i = R_i I$. Pour ce faire, on fera attention au signe des différences de potentiel, en se souvenant que le courant s'écoule du point de potentiel le plus haut vers le point de potentiel le plus bas. On obtient alors le système à résoudre :

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad [1]$$

$$-R_1 I_1 - \xi_1 + r_1 I_2 + R_2 I_2 = 0 \quad [2]$$

$$-\xi_2 + r_2 I_3 + R_3 I_3 - \xi_1 + r_1 I_2 + R_2 I_2 = 0 \quad [3]$$

On remplace par les valeurs numériques et on met en évidence :

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad [1]$$

$$-10 I_1 - 9 + 20,5 I_2 = 0 \quad [2]$$

$$-4,5 + 30,5 I_3 - 9 + 20,5 I_2 = 0 \quad [3]$$

7. Résolution du système d'équation : en gardant [2] et en utilisant [1] dans [3], il vient :

$$-10 I_1 + 20,5 I_2 = 9 \quad [2]$$

$$30,5 (I_1 + I_2) + 20,5 I_2 = 13,5$$

$$\text{ou : } 30,5 I_1 + 51 I_2 = 13,5 \quad [3]$$

Ce système de deux équations linéaires à deux inconnues peut être résolu, par exemple, par la méthode des déterminants :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 20,5 \\ 13,5 & 51 \\ -10 & 20,5 \\ 30,5 & 51 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 20,5 \\ 30,5 & 51 \end{vmatrix}} = \frac{182,25}{-1135,25} = -0,16 \text{ A} = -160 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 9 \\ 30,5 & 13,5 \\ -10 & 20,5 \\ 30,5 & 51 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 20,5 \\ 30,5 & 51 \end{vmatrix}} = \frac{-409,5}{-1135,25} = 0,36 \text{ A} = 360 \text{ mA}$$

Dès lors, en utilisant [1], il vient :

$$I_3 = 0,36 - 0,16 = 0,20 \text{ A} = 200 \text{ mA}$$

On vérifie que les résultats obtenus satisfont bien aux équations de départ.

Remarquons que la valeur obtenue pour I_1 est négative. Cela résulte du choix initial arbitraire du sens du courant dans les différentes branches. Il apparaît que le choix arbitraire fait pour I_1 est l'inverse du sens réel du courant dans cette branche. Dans la branche 1, des charges positives s'écouleraient en sens inverse de la flèche placée arbitrairement, soit de a vers b et non de b vers a comme supposé initialement.

5.5.4 Dangers de l'électricité

Les dangers de l'électricité sont dus à l'intensité de courant qui traverse le corps et à la durée de ce passage de courant. Le courant alternatif est plus dangereux que le courant continu car le courant ne provoque d'excitation neuro-musculaire qu'à l'installation et à la rupture. Ce sont les courants alternatifs dont la fréquence est de 50 à 100 Hz qui sont les plus dangereux.

L'intensité $I = \frac{V}{R}$ dépend de la différence de potentiel entre deux points du corps et de la résistance entre ces deux points. Ces points sont habituellement la main qui touche un conducteur sous tension et les pieds au contact du sol. Dans nos installations électriques, un conducteur est mis à la terre, l'autre est porté à un potentiel efficace de 230 V.

La résistance dépend de la surface de contact et de l'état de la peau ainsi que du contact avec le sol. Mesurée à l'ohmmètre (voir section 5.4) entre les deux mains, la résistance est de l'ordre de 200.000 Ω lorsque la peau est sèche, mais elle tombe à moins de 50.000 Ω lorsque la peau est mouillée ou qu'elle contient de la poussière métallique.

Le contact au sol dépend du type de chaussures et de l'état du sol. Les locaux humides tels que caves, buanderies, salles de bain, présentent plus de dangers que les autres. Dans les cas extrêmes, la résistance du corps peut s'abaisser à quelques milliers d'ohms, voire même 500 ohms.

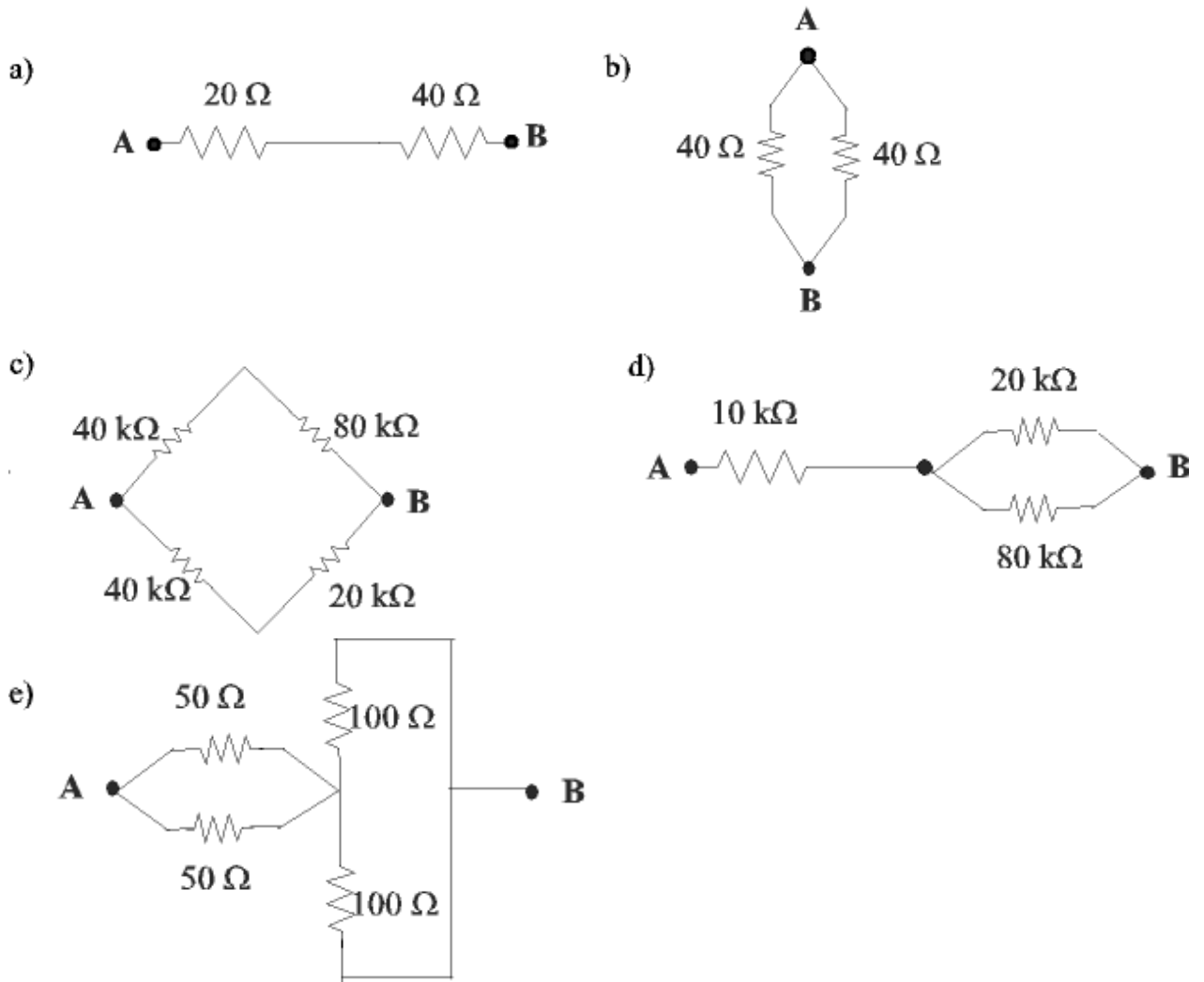
En courant alternatif, ce qui est habituellement le cas, un courant de 1 mA provoque un picotement qui a pour effet habituel de lâcher le contact. Vers 25 mA, il se présente une paralysie de certains muscles qui empêche de lâcher le conducteur sous tension et peut arrêter la respiration. Vers 80 mA, si la durée dépasse 30 secondes, il y a arrêt cardiaque suivi de fibrillations ventriculaire, i.e. de rapides mouvements non coordonnés du muscle cardiaque qui l'empêchent d'assurer la circulation du sang. Les mêmes phénomènes se produisent après 0,2 secondes si le courant est de 1 A, mais une telle intensité n'est possible que dans le cas où on touche un [câble de haute tension](#).

Pour éviter les accidents, il faut couper le courant dès que l'on veut effectuer une réparation à un appareil. Il faut également que la masse métallique des appareils soit mise à la terre en utilisant des prises à trois bornes dont une est la prise de terre. L'on peut aussi utiliser des disjoncteurs différentiels qui coupent le circuit dès que le courant d'arrivée à l'appareil n'est pas égal au courant de sortie, ce qui est le signe d'une fuite de courant dans la masse. Il faut aussi respecter tous les règlements techniques des installations électriques, entre autres ne pas dépasser 24 V dans certains cas particuliers, par exemple pour les appareils électriques destinés aux enfants. La prudence est surtout de rigueur dans les locaux humides.

En cas d'accident, il faut avant tout couper le courant en retirant la prise de l'appareil. Le cas échéant, il faut pratiquer sur l'électrocuté la respiration artificielle et un massage cardiaque externe.

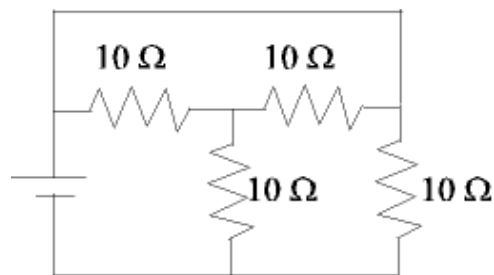
5.5.5 Exercices

1. Calculer la résistance équivalente entre les points A et B des groupements de résistances suivants :



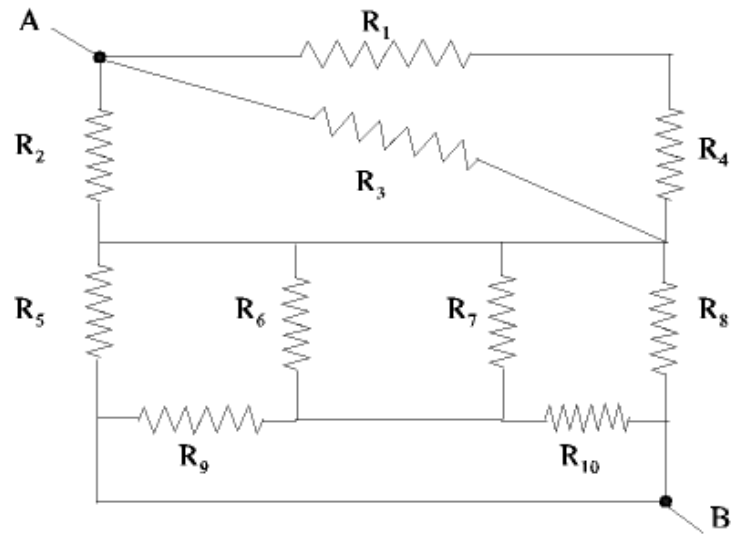
(R : a) 60Ω ; b) 20Ω ; c) $40 \text{ k}\Omega$; d) $26 \text{ k}\Omega$; e) 75Ω).

2. Pour le circuit suivant où toutes les résistances valent 10Ω , calculer la résistance équivalente aux bornes de la pile.



(R: 6Ω).

3. a) Déterminer dans le circuit suivant quelles sont les résistances en série et quelles sont celles en parallèle.



b) Simplifier au maximum le circuit ci-dessus, c'est-à-dire remplacer les groupements de résistances en série ou en parallèle par leur résistance équivalente, en sachant que :

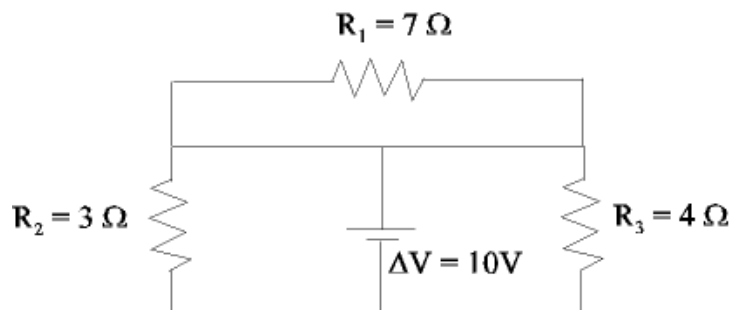
$$R_1 = 1 \Omega; R_2 = R_9 = R_{10} = 2 \Omega; R_3 = 4 \Omega; R_4 = R_5 = R_7 = R_8 = 3 \Omega; R_6 = 6 \Omega$$

(faites le schéma du circuit simplifié, en plusieurs étapes).

c) Déterminer la résistance équivalente entre les points A et B.

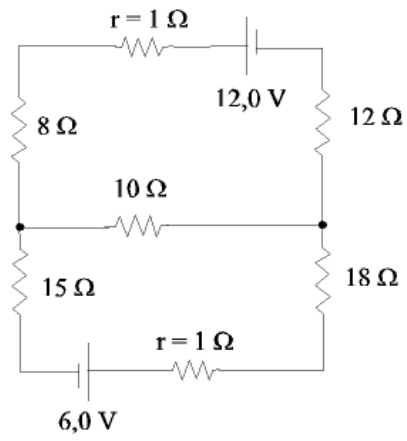
(R : a) R_1 et R_4 en série ; R_2 et R_3 en parallèle ; R_6 et R_7 en parallèle ; R_5 et R_8 en parallèle ; R_9 et R_{10} en parallèle c) $R_{AB} = 2 \Omega$).

4. Trouver les courants circulant dans les trois résistances ainsi que celui débité par la pile :



(R : $I_1 = 0 \text{ A}$; $I_2 = 3,3 \text{ A}$; $I_3 = 2,5 \text{ A}$; $I_{\text{pile}} = 5,8 \text{ A}$).

5. La résistance interne de chaque pile étant désignée par r dans le circuit ci-dessous, déterminez l'intensité des courants débités par chacune des deux piles et la tension aux bornes de la pile de 6,0 V.



(R : $I_{12} = 465 \text{ mA}$; $I_6 = 242 \text{ mA}$; $V_6 = 5,76 \text{ V}$).

5.6 Condensateurs

Les condensateurs permettent d'emmagasiner des charges électriques et donc de l'énergie électrique. Un condensateur est constitué de deux conducteurs placés à proximité l'un de l'autre, mais sans qu'il y ait contact entre eux. La figure V.35.a offre un exemple typique de condensateur consistant en une paire de plaques parallèles, d'aire A , situées à une faible distance d l'une de l'autre ; on les appelle les armatures du condensateur.

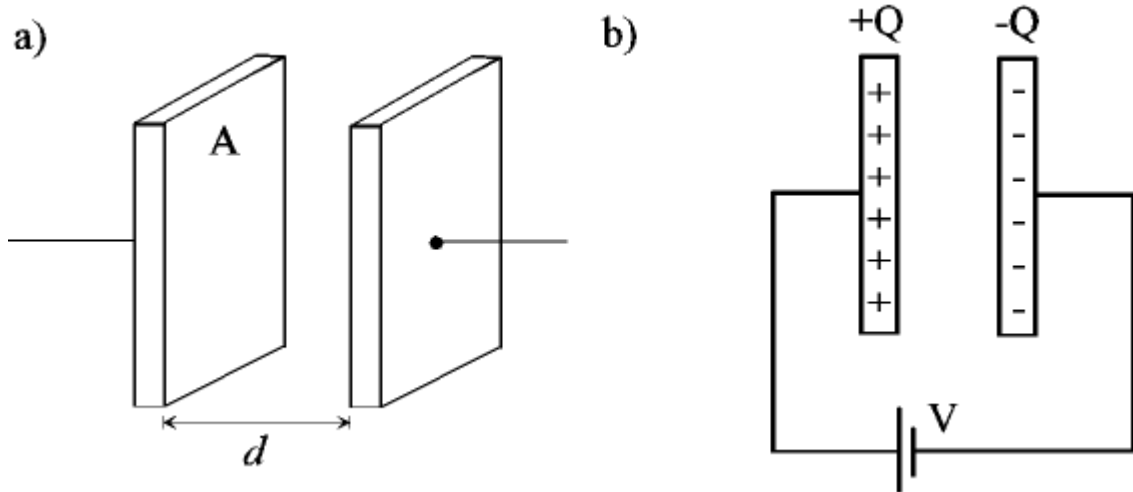


Figure V.35.

Lorsqu'on applique une tension aux armatures d'un condensateur, par exemple à l'aide d'une pile (voir figure V.35.b), il s'électrise rapidement : l'armature reliée à la borne positive de la pile porte une charge $+Q$ tandis que celle reliée à la borne négative de la pile porte une charge égale et opposée $-Q$. Ceci résulte de ce que des électrons provenant de l'électrode négative de la pile s'écoulent vers l'armature du condensateur à laquelle elle est reliée par un fil conducteur. Cette armature portant une charge $-Q$ repousse les électrons de l'armature opposée par induction et ceux-ci rejoignent l'électrode positive de la pile qui les attire ; cette armature porte une charge $+Q$. Dans les schémas de circuits électriques, on représente les condensateurs par : $\text{---} \text{---} \text{---}$

5.6.1 Capacité d'un condensateur

On constate que pour un condensateur donné, la charge Q portée par ses armatures est proportionnelle à la différence de potentiel V qu'on y applique. La constante de proportionnalité de cette relation, C , est appelée capacité du condensateur :

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \text{constante} \quad (\text{V.62})$$

L'unité SI pour la capacité est le **farad (F)** ; c'est la capacité d'un condensateur qui porte 1 coulomb sur ses armatures lorsqu'on lui applique une différence de potentiel de 1 volt :

$$1 \text{ F} \equiv 1 \text{ C} / \text{V} \quad (\text{V.63})$$

La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la taille, de la forme, de la position relative des deux conducteurs qui le constituent, ainsi que de la substance isolante, appelée diélectrique, qui sépare éventuellement les deux armatures.

Remarque :

Contrairement à ce que peut suggérer à première vue la relation (62), la capacité ne dépend ni de V , ni de Q : si l'une de ces quantités est doublée, l'autre l'est aussi de manière à garder le rapport et donc C constant.

On peut déterminer la capacité d'un condensateur de façon expérimentale à partir de la relation (62), en mesurant la charge Q de l'une de ses armatures, après l'avoir soumis à une différence de potentiel connue V .

Dans le cas de condensateurs ayant une forme géométrique simple, la capacité peut se calculer. Prenons par exemple le condensateur à armatures parallèles, séparées par du vide, représenté sur la Figure V.36.

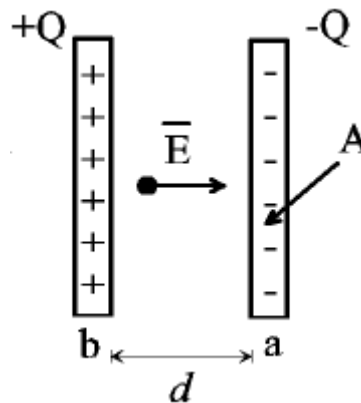


Figure V.36.

Ses plaques d'aire A portent une charge $+/-Q$ et sont séparées par une distance d qu'on suppose faible par rapport aux dimensions des armatures. Dès lors on peut faire l'approximation que les plaques sont infinies et le champ électrique qui règne entre celles-ci vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ et est dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir section V.2).

Dès lors :

$$E = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

D'autre part, d'après les relations (V.28) et (V.30), nous avons

$$V_{ba} = V_b - V_a = Ed, \tag{V.64}$$

ce qui conduit à :

$$V_{ba} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

et donne :

$$C \equiv \frac{Q}{V_{ba}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (\text{V.65})$$

pour un condensateur à armatures parallèles séparées par du vide.

On voit qu'effectivement, la capacité ne dépend ni de Q , ni de V , seulement de l'aire des plaques et de la distance entre elles, ainsi que du milieu qui sépare les deux plaques. En effet, nous verrons à la section suivante que lorsqu'on place un isolant entre les deux plaques, il faut remplacer ϵ_0 , la permittivité du vide, par ϵ , la permittivité de l'isolant.

5.6.2 Rôle des diélectriques dans un condensateur

La plupart des condensateurs renferment une feuille de matériau isolant (papier, plastique, etc.), appelé diélectrique, qui sépare leurs armatures, et cela pour différentes raisons. D'abord les diélectriques empêchent plus efficacement que l'air ou le vide, les charges de passer d'une armature à l'autre, ce qui aurait pour effet de décharger le condensateur. La présence d'un diélectrique permet d'appliquer de plus hautes tensions avant de provoquer la décharge du condensateur. Elle permet aussi de rapprocher les armatures sans risquer qu'elles se touchent, ce qui accroît la capacité (voir relation (V.65)). Enfin, on a constaté expérimentalement que lorsqu'un diélectrique remplit l'espace compris entre les armatures d'un condensateur, sa capacité augmente d'un facteur κ ($\kappa > 1$), appelé constante diélectrique :

$$C = \kappa C_0, \quad (\text{V.66})$$

où C_0 désigne la capacité du condensateur lorsqu'il y a le vide entre ses armatures et C celle du même condensateur avec un diélectrique de constante κ entre ses armatures. La valeur de κ varie avec la nature du diélectrique et se mesure expérimentalement. Le résultat de ces mesures se trouve consigné dans des tables. Quelques valeurs sont données à titre d'exemple dans le tableau V.2.

Tableau V.2.

| Matériau | Constante diélectrique (κ) |
|------------|-------------------------------------|
| vide | 1,0000 |
| air | 1,0006 |
| papier | 3 – 7 |
| porcelaine | 6 – 8 |
| eau | 80 |

Dans le cas d'un condensateur à armatures parallèles, séparées par un diélectrique de constante diélectrique κ , on obtient, en combinant les relations (V.65) et (V.66) :

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad (\text{V.67}).$$

pour un condensateur à armatures parallèles.

On pose :

$$\epsilon = \epsilon_0 \kappa \quad (\text{V.68})$$

que l'on appelle la permittivité du diélectrique.

L'augmentation de la capacité d'un condensateur dont les armatures sont séparées par un diélectrique provient de la polarisation de ce dernier. Certains électrons atomiques, attirés par la plaque positive, se déplacent légèrement vers celle-ci de telle sorte que bien que le diélectrique soit globalement neutre, la position moyenne des charges négatives est légèrement déplacée par rapport à la position des charges positives, attirées elles par la plaque négative (voir figure V.37).

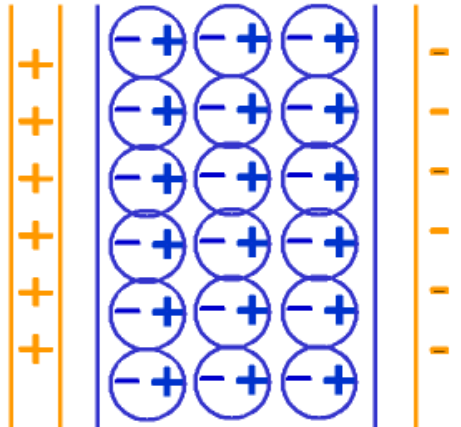


Figure V.37.

Les molécules polarisées donnent lieu à un champ électrique dirigé de leur charge + vers leur charge –, de sens opposé à celui créé par les plaques chargées. Par conséquent le champ électrique entre les plaques diminue ainsi que la différence de potentiel entre les plaques si celles-ci ne sont pas connectées et que les charges ne peuvent pas s'échapper :

$$\begin{array}{ll}
 Q \rightarrow Q & \text{constant} \\
 V \searrow & \text{diminue} \\
 C \equiv \frac{Q}{V} \nearrow & \text{augmente}
 \end{array}$$

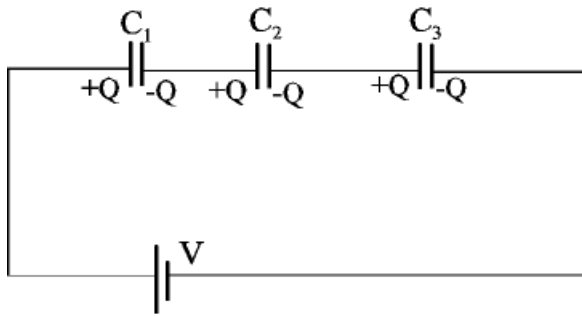
Si les plaques sont connectées à une pile lorsqu'on introduit le diélectrique, la pile maintient V constant et c'est la charge portée par les plaques qui va augmenter.

5.6.3 Condensateurs en série et en parallèle

Tout comme les résistances, les condensateurs peuvent être associés en série ou en parallèle (voir figures V.38.a et b).

Lorsque les condensateurs sont branchés en série, ils portent nécessairement tous la même charge Q . En effet, si une charge $+Q$ s'écoule de l'électrode positive de la pile sur l'armature gauche du premier condensateur, il apparaît, par induction, une charge $-Q$ sur l'autre armature. Comme cette dernière est connectée à l'armature gauche du deuxième condensateur par un fil conducteur, il apparaîtra une charge $+Q$ sur cette dernière.

a) condensateurs en série :



b) condensateurs en parallèle :

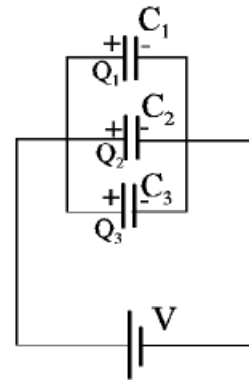


Figure V.38.

En effet les deux armatures connectées par un fil conducteur forment un conducteur unique, isolé du monde extérieur ; la charge totale doit donc y rester nulle. De proche en proche, les condensateurs placés en série se chargent donc de la même charge : $+Q$, pour l'armature gauche, $-Q$, pour l'armature droite. La différence de potentiel aux bornes de chacun des condensateurs vaut par conséquent :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

La loi des mailles donne :

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

Si C est la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en série, nous avons donc :

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3},$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \text{ pour des condensateurs en série}} \quad (V.69)$$

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle, la différence de potentiel à leurs armatures est la même :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V.$$

D'autre part, la charge totale Q qui s'est écoulée des électrodes de la pile vaut :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

où Q_1 , Q_2 et Q_3 sont les charges portées par les armatures de chacun des trois condensateurs, ceci en raison de la conservation de la charge. Si C est la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en parallèle :

$$CV = C_1 V + C_2 V + C_3 V.$$

En divisant les deux membres par V , il vient :

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3, \text{ pour des condensateurs en parallèle}} \quad (V.70)$$

5.6.4 Energie électrique emmagasinée par un condensateur

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger, par exemple à l'aide d'une pile. Supposons qu'à un instant donné, la charge déjà accumulée sur les armatures soit q . Dès lors, la différence de potentiel entre les armatures vaut q/C . Le travail nécessaire pour faire passer une charge infinitésimale dq de l'armature négative à l'armature positive, via la pile est :

$$dW = (q/C)dq.$$

Le travail total W , pour charger un condensateur non chargé avec une charge Q s'obtient en intégrant :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique, U_E . Comme on a la relation $Q = CV$, où V est la différence de potentiel de la pile, l'énergie potentielle électrique peut s'écrire sous trois formes différentes :

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2} \quad (V.71)$$

5.6.5 Circuits RC

Les circuits dont nous avons parlé jusqu'à présent, alimentés par une pile, étaient des circuits parcourus par des courants continus. Lorsqu'on inclut un condensateur dans un circuit alimenté par une pile, le courant varie en fonction du temps pendant la charge et la décharge du condensateur, ensuite il devient nul dans les branches où se trouve un condensateur.

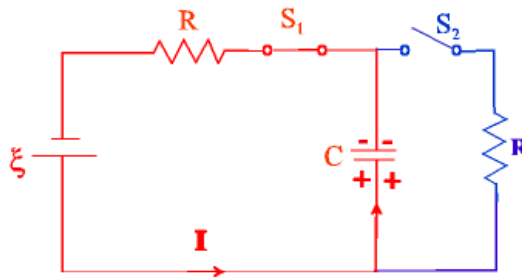
5.6.5.1 Charge du condensateur

Supposons que le condensateur de la figure V.39 soit initialement non chargé ($Q_0 = 0$) et que les deux interrupteurs, S_1 et S_2 soient ouverts. Aucun courant ne circule dans aucune branche du circuit car il n'y a pas de maille fermée : le condensateur reste non chargé.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur S_1 , on se trouve en présence d'un circuit à une maille, comportant une différence de potentiel ξ , fournie par la pile (voir figure V.39.a). Par conséquent un courant I s'établit, s'écoulant de la borne positive de la pile vers la borne négative. Ce courant amène des électrons sur l'armature supérieure du condensateur qui prend une charge $-Q$ tandis que l'armature inférieure prend une charge $+Q$, des électrons rejoignant la borne positive de la pile. La loi des mailles nous permet d'écrire qu'à tout instant :

$$\xi = V_R + V_C = RI + \frac{Q}{C}. \quad (V.72)$$

a) charge d'un condensateur



b) décharge du condensateur

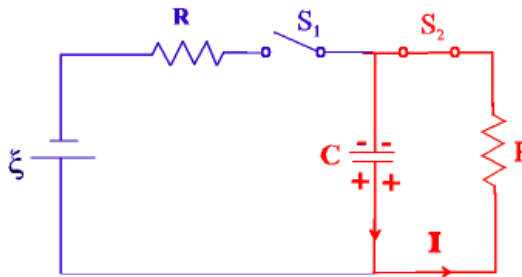


Figure V.39.

Comme le courant qui circule accroît la charge du condensateur, on peut écrire :

$$\mathbf{I} = + \frac{dQ}{dt}, \quad (\text{V.73})$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante, en remplaçant dans (72) :

$$C\xi - Q = RC \frac{dQ}{dt},$$

ou encore, en séparant les variables Q et t :

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{C\xi - Q}.$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\frac{t}{RC} = -\ln(C\xi - Q) + k,$$

où k est une constante d'intégration fixée par les conditions initiales. En $t = 0$, $Q = 0$; dès lors, nous avons :

$$0 = -\ln(C\xi) + k,$$

ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{C\xi - Q}{C\xi}\right) = -\frac{t}{RC},$$

En prenant la fonction inverse du logarithme et en réarrangeant les termes, on trouve :

$$Q = Q_f \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{V.74})$$

avec $Q_f = C \xi$ (voir figure V.40.a).

Ce résultat permet de voir que la charge Q du condensateur, qui était nulle au départ, tend vers une valeur finale $Q_f = C \xi$, lorsque le temps tend vers l'infini. La quantité RC porte le nom de constante de temps du circuit. En effet, elle a les dimensions d'un temps :

$$[RC] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{C/s} = s .$$

Elle représente le temps requis pour que le condensateur atteigne une charge $Q = Q_f (1 - e^{-1}) = 0,63 Q_f$, ou 63% de la charge finale Q_f .

Ainsi, le produit RC constitue une mesure de la vitesse à laquelle le condensateur accumule de la charge.

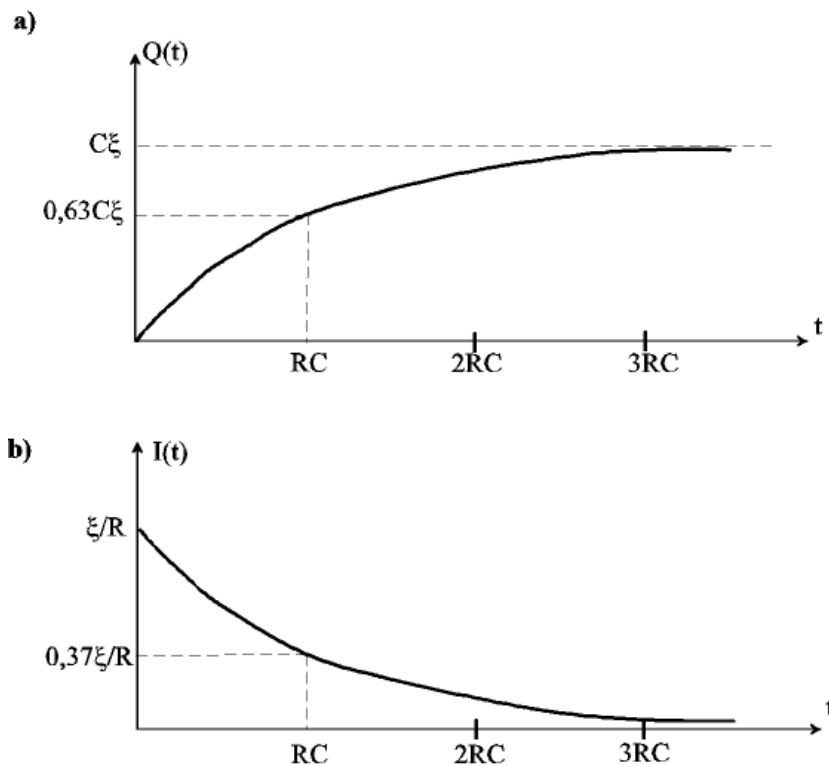


Figure V.40.

D'après la relation (V.74), il semble que le condensateur n'atteigne jamais la charge maximale Q_f : il atteint 86% de cette valeur en $2 RC$, 95% en $3 RC$, 98% en $4 RC$, etc ...

Par exemple si $R = 30 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,20 \text{ }\mu\text{F}$, la constante de temps vaut :

$$(3,0 \times 10^4) \times (2,0 \times 10^{-7}) = 6,0 \times 10^{-3} \text{ s} .$$

Le condensateur atteint 98% de sa charge maximale en moins de 1/40 de seconde.

Pour obtenir l'intensité du courant qui charge le condensateur, il suffit de combiner les relations (V.73) et (V.74) :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\xi}{R} e^{-t/RC}. \quad (V.75)$$

Ainsi, à l'instant $t = 0$, le courant est maximum et vaut ξ/R . Il décroît ensuite de manière exponentielle, avec la constante de temps RC , de sorte qu'il ne vaut plus que $1/e \approx 0,37$ de sa valeur initiale au bout d'un temps RC . Il tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini (voir Figure V.40.b).

5.6.5.2 Décharge du condensateur

Supposons que le condensateur du circuit de la figure V.40 ait eu le temps de se charger complètement et porte donc la charge initiale $Q_0 \approx C\xi$. Le courant est devenu pratiquement nul. On ouvre l'interrupteur S_1 et à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur S_2 . On se trouve en présence d'un circuit à une maille comportant une différence de potentiel $V_C = \frac{Q}{C}$, fournie par le condensateur (voir Figure V.40.b). Par conséquent, un courant I s'établit, s'écoulant de l'armature chargée positivement du condensateur, vers celle chargée négativement, en sens inverse du courant de charge. Ce courant amène des électrons de la plaque négative à la plaque positive, au travers de la résistance R . La loi des mailles nous permet d'écrire qu'à tout instant :

$$V_C = V_R,$$

ou encore :

$$\frac{Q}{C} = RI. \quad (V.76)$$

Cette fois, le courant qui circule fait diminuer la charge du condensateur et :

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (V.77)$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante, en remplaçant dans (76) :

$$Q = -RC \frac{dQ}{dt},$$

ou encore, en séparant les variables Q et t :

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}.$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$-\frac{t}{RC} = \ln Q + k,$$

où k est une constante d'intégration fixée par les conditions initiales. En $t = 0$, $Q = Q_0$; dès lors :

$$0 = \ln Q_0 + k,$$

ce qui donne :

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{Q}{Q_0}.$$

En prenant la fonction inverse du logarithme et en réarrangeant les termes, on trouve :

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (\text{V.78})$$

Ce résultat permet de voir que la charge qui valait Q_0 au départ, tend exponentiellement vers zéro avec une constante de temps RC ; après un temps égal à RC , la charge ne vaut plus que $\approx 37\%$ de sa valeur initiale (figure V.41).

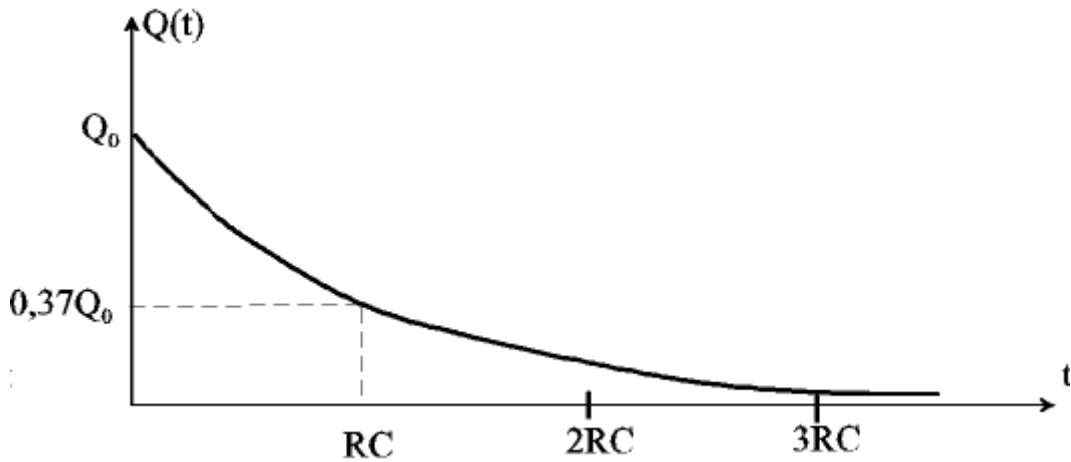


Figure V.41.

Pour obtenir l'intensité du courant qui décharge le condensateur, il suffit de combiner les relations (77) et (78) :

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (\text{V.79})$$

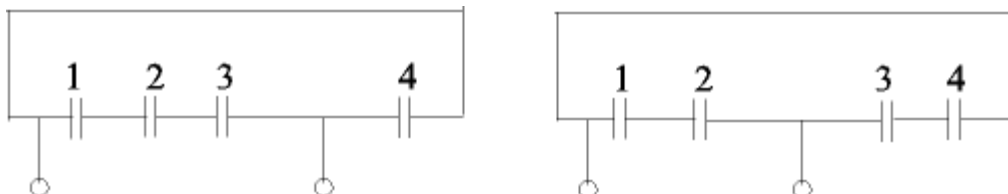
C'est de nouveau à l'instant $t = 0$ que le courant est maximum ; il vaut Q_0 / RC . Il décroît ensuite de manière exponentielle, avec la constante de temps RC , de sorte qu'il ne vaut plus que 37% de sa valeur initiale au bout d'un temps RC , exactement comme pour le courant de charge.

Remarque :

Des relations (V.75) et (V.79), on déduit qu'il ne faut jamais charger un condensateur en le connectant directement aux bornes de la pile et qu'il ne faut jamais décharger un condensateur en court-circuitant ses armatures. En effet, dans ce cas $R \approx 0$ et le courant initial en $1/R$ est énorme, faisant fondre les fils de connexion.

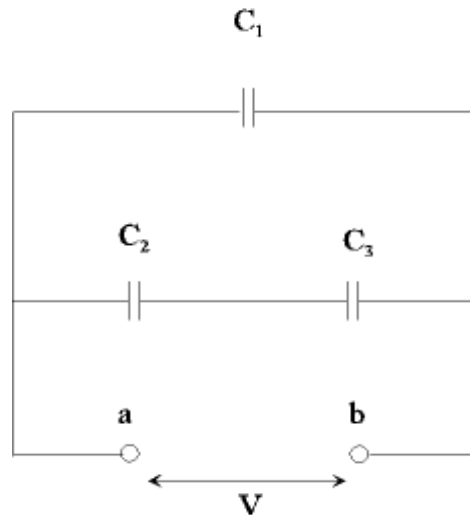
5.6.6 Exercices

- 1) Soit deux arrangements différents de 4 condensateurs de capacité C .



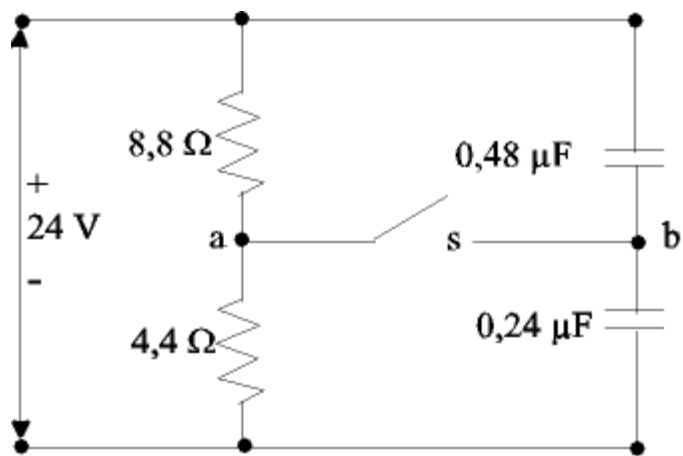
Quelles sont les capacités résultantes? ($R : 4/3C$ et C).

- 2) Soit le circuit suivant :



$$C_1 = C_2 = 2 C_3 = 4,0 \mu\text{F}$$

- a) Que vaut la capacité totale du circuit placé entre les bornes a et b. (R : 5,33 μF).
 - b) Quelle quantité de charge s'accumule sur chaque condensateur si $V = 50 \text{ V}$. (R : $Q_1 = 0,2 \text{ mC}$; $Q_2 = Q_3 = 0,067 \text{ mC}$).
- 3) On charge un condensateur d'une capacité de 2,5 μF à l'aide d'une pile de 2,4 V puis on le débranche et on le place en parallèle avec un second condensateur C_2 , initialement non chargé. Déterminez la valeur de C_2 sachant que la tension aux bornes des deux condensateurs a chuté à 1,8 V (R : 0,83 μF).
- 4) a) Calculez la quantité d'énergie emmagasinée dans un condensateur constitué de 2 plaques carrées de 9 cm de côté, séparées par un espace d'air de 2 mm, lorsque ses armatures portent une charge de $\pm 300 \mu\text{C}$ (R = $1,3 \times 10^3 \text{ J}$).
- b) Que devient cette énergie si on introduit une plaque en mica ($\kappa = 7$) de 2 mm d'épaisseur qui remplit donc tout l'espace (R = $1,8 \times 10^2 \text{ J}$).
- c) Même question que b) pour le cas où la plaque de mica ne fait qu' 1 mm d'épaisseur (R = $7,2 \times 10^2 \text{ J}$).
- 5) On monte deux résistances et deux condensateurs non chargés de la manière illustrée sur la figure ci-dessous. Sachant qu'il y a une différence de potentiel de 24 V aux bornes de ce réseau, déterminez :
- a) le potentiel au point a lorsque l'interrupteur S est ouvert depuis un temps long (posez que $V = 0$ à la borne négative de la source) (R : 8 V),
 - b) le potentiel au point b lorsque l'interrupteur est ouvert (R : 16 V),
 - c) le potentiel final au même point lorsque l'interrupteur est fermé depuis un temps long (R : 8 V) ;
 - d) la quantité de charge qui a traversé l'interrupteur S fermé (R : $-5,76 \mu\text{C}$).

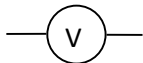


5.7 Appareils de mesures électriques

L'appareil de mesure qui permet de mesurer la différence de potentiel entre deux points d'un circuit est un voltmètre, celui qui mesure le courant dans une branche d'un circuit, un ampèremètre, celui qui mesure la résistance d'une portion du circuit, un ohmmètre. Les différences de potentiel peuvent aussi être étudiées au moyen d'un oscilloscope dont nous parlerons plus loin. Chaque appareil de mesure possède deux sondes, deux fils qui sortent de l'appareil et qu'il faut connecter au circuit de manière appropriée pour prendre la mesure. Voyons d'abord comment connecter correctement ces appareils.

5.7.1 Le voltmètre

Le symbole utilisé pour présenter un voltmètre dans le schéma d'un circuit électrique est le suivant :



Le voltmètre mesure la différence de potentiel entre deux points quelconques, a et b, d'un circuit (voir figure V.42). Par conséquent il faut connecter une sonde à chacun de ces points et le voltmètre se retrouve placé en parallèle avec la branche ou les branches du circuit situées entre a et b.

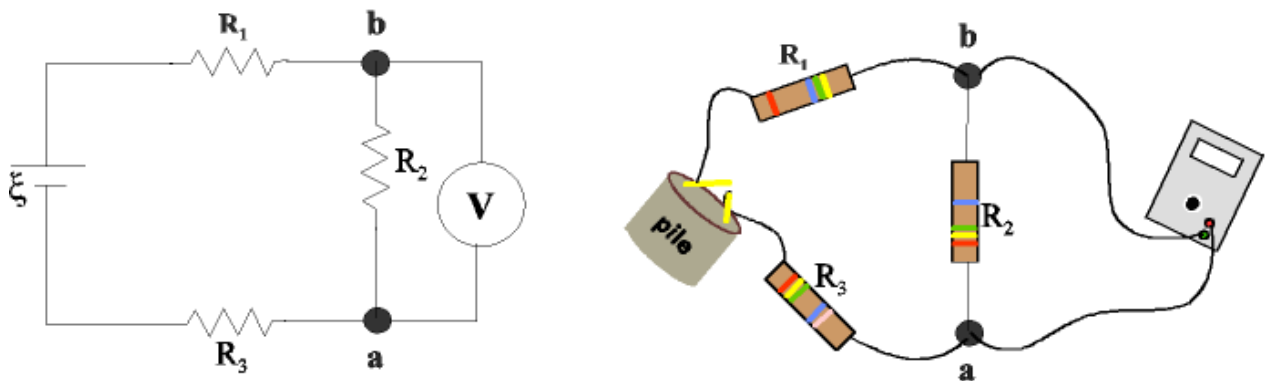
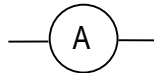


Figure V.42.

Une partie du courant du circuit, en arrivant en b, est dévié par le voltmètre. Pour que ce dernier perturbe le moins possible le circuit initial, il faut qu'il dévie le moins possible de courant et donc que sa résistance interne, R_v , soit grande par rapport à celle du circuit.

5.7.2 L'ampèremètre

Le symbole utilisé pour représenter un ampèremètre dans le schéma d'un circuit électrique est le suivant :



L'ampèremètre mesurant le courant qui passe dans une branche du circuit, il faut le brancher en série avec la branche de sorte que le même courant qui passe par la branche traverse aussi l'ampèremètre. Il faut donc d'abord déconnecter la branche pour faire une mesure de courant, afin d'insérer l'ampèremètre dans la branche. Dans la figure V.43 l'ampèremètre est branché en série avec la résistance R_3 et mesure par conséquent le courant qui passe dans R_3 .

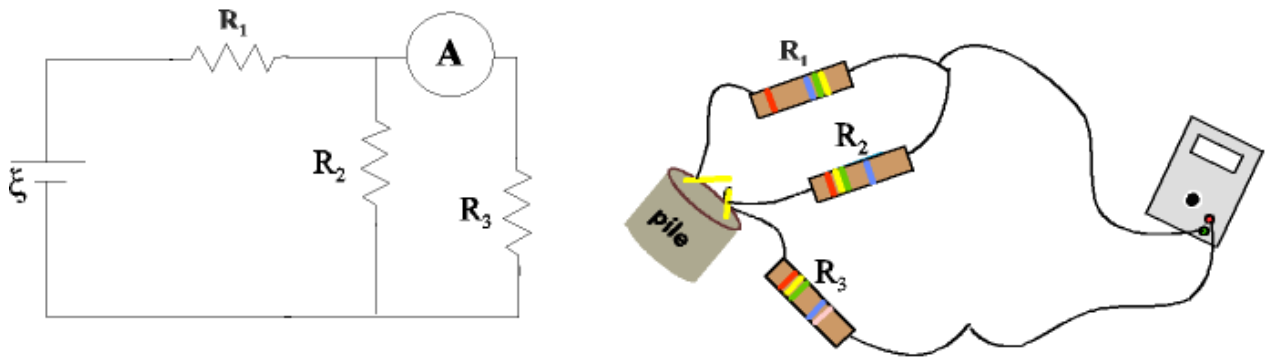


Figure V.43.

L'ampèremètre offre une certaine résistance, r_A , au passage du courant qui le traverse. La résistance du circuit s'en trouve augmentée et le courant qui y passe, diminué. Pour minimiser cette perturbation du circuit par l'ampèremètre, il est important que sa résistance interne soit petite par rapport à la résistance du circuit, en particulier, par rapport à la résistance de la branche dans laquelle il est introduit.

5.7.3 L'ohmmètre

Le symbole utilisé pour représenter un ohmmètre dans un circuit est le suivant : Ω

Contrairement au voltmètre et à l'ampèremètre, l'ohmmètre est un appareil actif : il possède une pile interne, de valeur connue et envoie du courant dans le circuit, qu'il mesure. Pour mesurer la valeur d'une résistance ou d'une combinaison de résistances, il faut connecter les deux sondes de l'ohmmètre aux extrémités de la résistance ou de la combinaison de résistances, alors qu'elle ne reçoit pas de courant du reste du circuit. En effet, dans le cas contraire, ce courant viendrait s'ajouter au courant fourni par l'ohmmètre, ce qui fausserait la mesure.

La figure V.44.a montré une manière correcte d'effectuer la mesure de la résistance R_3 du circuit de la figure V.43. Remarquons que seul un des liens qui relie R_3 au reste du circuit a été rompu. On aurait pu rompre les deux mais ce n'est pas nécessaire : il suffit que la branche soit interrompue en un point pour que la pile ne fournisse plus de courant à R_3 .

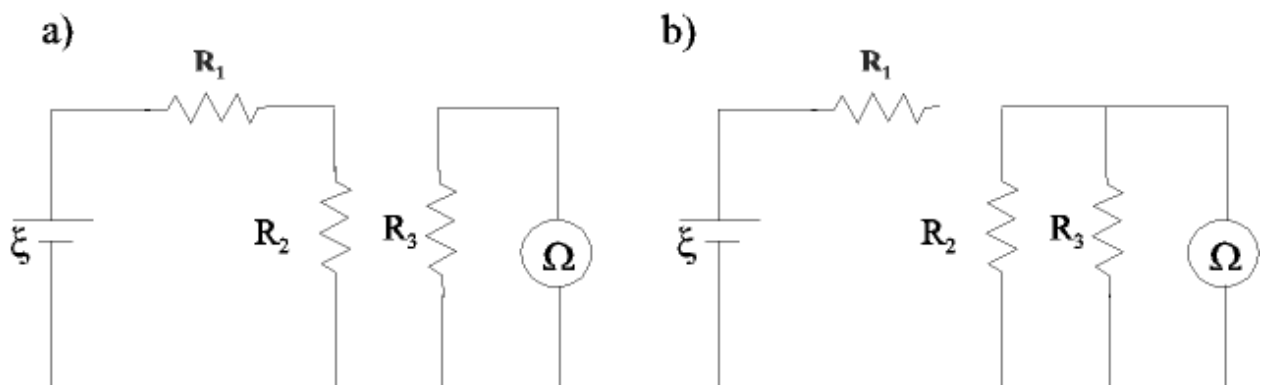


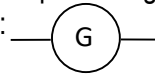
Figure V.44.

La Figure V.44.b montre une manière correcte d'effectuer la mesure de la combinaison de résistances en parallèle, R_2 et R_3 .

5.7.4 Le multimètre

En pratique, le plus souvent, les différents appareils décrits ci-dessus sont groupés dans un seul appareil appelé multimètre, qui peut être réglé pour être utilisé soit comme voltmètre, soit comme ampèremètre, soit comme ohmmètre. De plus, différentes échelles de sensibilité peuvent être sélectionnées.

Les appareils de mesures électriques à aiguille sont construits à partir d'un galvanomètre, représenté dans un schéma de circuit par :



Le galvanomètre est basé sur des effets magnétiques dont nous parlerons plus tard. Disons simplement que l'aiguille du galvanomètre est déviée de manière proportionnelle au courant qui le traverse (voir figure V.45). La valeur maximum de courant mesurable par le galvanomètre, I_{\max} , est celle qui fait dévier l'aiguille à fond d'échelle. Par exemple, pour un galvanomètre ayant une valeur maximale $I_{\max} = 50 \mu\text{A}$, un courant de $25 \mu\text{A}$ fera dévier l'aiguille jusqu'au milieu de l'échelle.

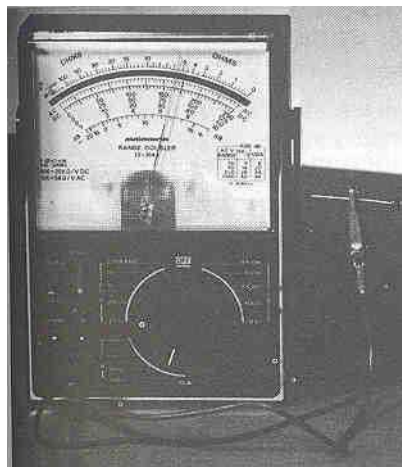


Figure V.45.

Un simple galvanomètre permet seulement de mesurer des courants de faible intensité, typiquement inférieurs à $50 \mu\text{A}$. Pour mesurer des courants d'intensité plus élevée et obtenir un ampèremètre on branche une résistance R , que l'on appelle "shunt" en parallèle avec le galvanomètre (voir figure V.46.a). La valeur de R est choisie en fonction du courant maximum que l'on désire pouvoir mesurer, en tenant compte de r , la résistance interne du galvanomètre. Par exemple si on désire obtenir un ampèremètre permettant de mesurer un courant maximum de 1 A , il faut que lorsque le courant I qui entre dans l'ampèremètre vaut 1 A , l'aiguille du galvanomètre soit déviée à fond d'échelle, donc qu'il y passe un courant $I_G = 50 \mu\text{A}$. Le courant dans la résistance R sera alors : $I_R = 1 \text{ A} - 50 \mu\text{A} = 0,999950 \text{ A}$. Dès lors, si la résistance interne du galvanomètre est de 30Ω :

$$R = \frac{I_G r}{I_R} = \frac{(5,0 \times 10^{-5} \text{ A}) \times (30 \Omega)}{0,999950 \text{ A}} = 1,5 \times 10^{-3} \Omega.$$

Pour constituer un voltmètre à partir d'un galvanomètre, on place une résistance R en série avec ce dernier (voir figure V.46.b). Supposons qu'on veuille obtenir un voltmètre permettant de mesurer des différences de potentiel jusqu'à 5 V à partir du même galvanomètre que ci-dessus. Lorsque la différence de potentiel aux bornes du voltmètre sera de 5 V , l'aiguille du galvanomètre devra être à fond d'échelle et par conséquent il y passera un courant de $50 \mu\text{A}$, qui traversera aussi la résistance R . Dès lors :

$$5 \text{ V} = 50 \text{ } \mu\text{A} \times (R + r),$$

et :

$$R = \frac{5 \text{ V}}{5,0 \times 10^{-5} \text{ A}} - r = 10^5 \text{ } \Omega = 100 \text{ k}\Omega.$$

Pour obtenir un ohmmètre, il faut mettre une pile de tension connue, V , en série avec le galvanomètre (voir Figure V.46.c). La pile fait circuler dans la résistance inconnue, R_x , connectée aux bornes de l'ohmmètre, un courant I_G donné par :

$$I_G = \frac{V}{R_x + r}.$$

Dès lors :

$$R_x = \frac{V}{I_G} - r.$$

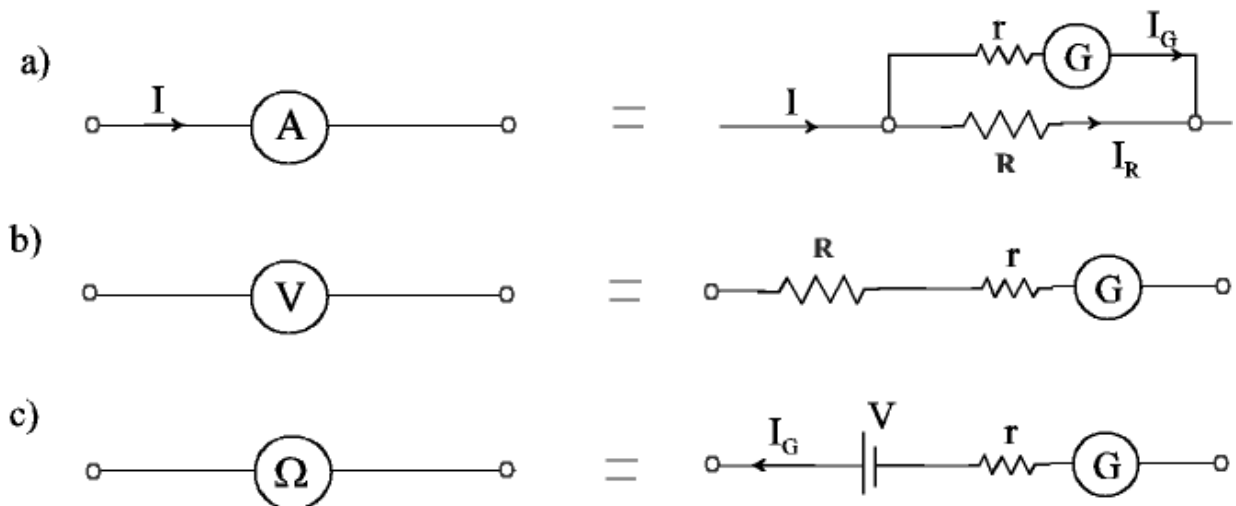


Figure V.46.

La résistance à mesurer R_x est inversement proportionnelle au courant qui circule dans le galvanomètre, I_G . L'échelle de l'ohmmètre est donc non linéaire et une faible résistance conduit à un déplacement maximum de l'aiguille du galvanomètre.

Dans un multimètre qui combine tous ces appareils en un seul, les additions de résistances en parallèle ou en série, l'introduction de la pile, se font à l'intérieur de l'appareil et sont invisibles à l'utilisateur qui se contente de tourner un commutateur pour sélectionner la fonction et la plage de valeurs désirées.

La sensibilité des appareils de mesure est le plus souvent précisée sur leur cadran, généralement en ohms par volt, ce qui indique quelle est la résistance interne de l'appareil, par volt au maximum d'une échelle. Ainsi lorsqu'un appareil a une sensibilité de $50\,000 \text{ } \Omega / \text{V}$, il possède une résistance interne de $500 \text{ k}\Omega$ lorsqu'il est utilisé avec l'échelle de 10 V . La valeur maximum du courant qui traverse le galvanomètre est alors de $10 \text{ V} / 500 \text{ k}\Omega = 20 \text{ } \mu\text{A}$; elle est donnée par l'inverse de la sensibilité.

Actuellement, pour la plupart des applications, les appareils à aiguilles ont été supplantés par des appareils à affichage numérique, généralement moins chers, plus robustes et plus précis (voir figure V.47). Ceux-ci ne sont pas basés sur un galvanomètre mais sur des circuits électroniques comportant des transistors et permettant une mesure directe de différence de potentiel. Les autres échelles,

l'ampèremètre et l'ohmmètre sont obtenus à partir de ce voltmètre par des opérations analogues à celles de la figure V.47.

Remarque importante : dans le cas de courants alternatifs, les multimètres donnent les valeurs des courants et des tensions efficaces, pas les valeurs maximums ou amplitudes.

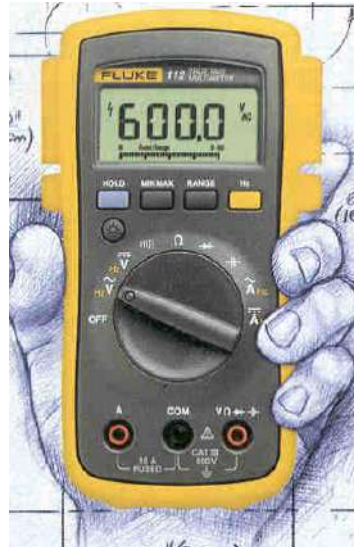
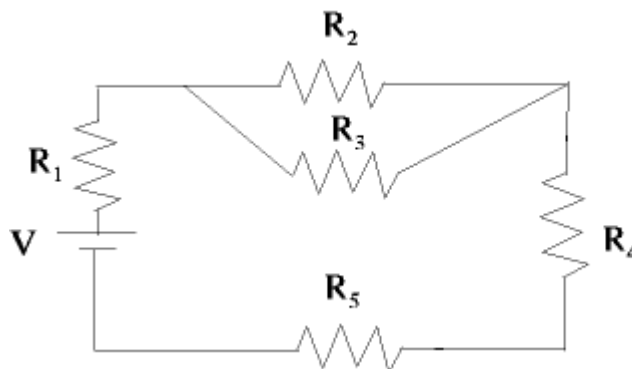


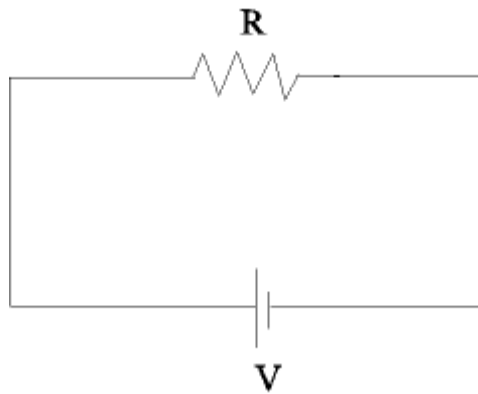
Figure V.47.

5.7.5 Exercices

1. Calculez la résistance interne d'un voltmètre ayant une sensibilité de $30\,000\ \Omega/V$ sur une échelle de $50\ V$. ($R : 150\ k\Omega$).
2. Soit le circuit électrique suivant :



- a) Redessiner ce circuit en y incluant un ampèremètre de telle sorte à mesurer le courant qui passe dans la résistance R_3 .
 - b) Redessiner le circuit initial en y incluant un voltmètre qui permette de mesurer la chute de tension dans R_4 et R_5 .
 - c) Redessiner le circuit initial en y incluant un ohmmètre qui permette de mesurer la résistance R_2 .
3. Soit le circuit suivant comportant une résistance de l'ordre de $100\ \Omega$.



On désire mesurer simultanément le courant qui passe dans R, avec un ampèremètre ayant une résistance interne de $10\ \Omega$ et la différence de potentiel aux bornes de R, à l'aide d'un voltmètre ayant une résistance interne de $1\ \text{M}\Omega$. Faites un schéma du montage à réaliser en justifiant votre choix (R : courte dérivation).

4. Soit une résistance de $5\ \Omega$ connectée à une pile de $9\ \text{V}$ ayant une résistance interne de $1,0\ \Omega$.
 - a) Calculez la différence de potentiel aux bornes de la pile. (R : $7,5\ \text{V}$).
 - b) Supposons qu'on mesure cette différence de potentiel aux bornes de la pile au moyen d'un voltmètre de qualité ayant une résistance interne de $1\ \text{M}\Omega$. Quelle valeur fournira-t-il ? (R: $\approx 7,5\ \text{V}$).

5.8 Magnétisme

Les scientifiques n'ont découvert qu'au XIX^{ème} siècle le lien qui existe entre le magnétisme et l'électricité. Pourtant le magnétisme était connu depuis fort longtemps. Son observation remonte aux anciennes civilisations d'Asie mineure : certaines roches, provenant de Magnésie, en Asie mineure, avaient la propriété de s'attirer, d'où l'origine du nom donné à ce phénomène, le magnétisme. Dès le XI^{ème} siècle, les marins chinois utilisaient des aimants naturels comme boussoles pour s'orienter. Lorsqu'on déplace une aiguille aimantée autour d'une pierre magnétisée sphérique, cette aiguille dessine des lignes de forces qui convergent en deux points diamétralement opposés de la pierre, comme les lignes de longitude de la terre (figure V.48). Cette observation, faite en 1269 par Pierre de Maricourt, l'a conduit à appeler ces deux régions d'un aimant des pôles magnétiques.

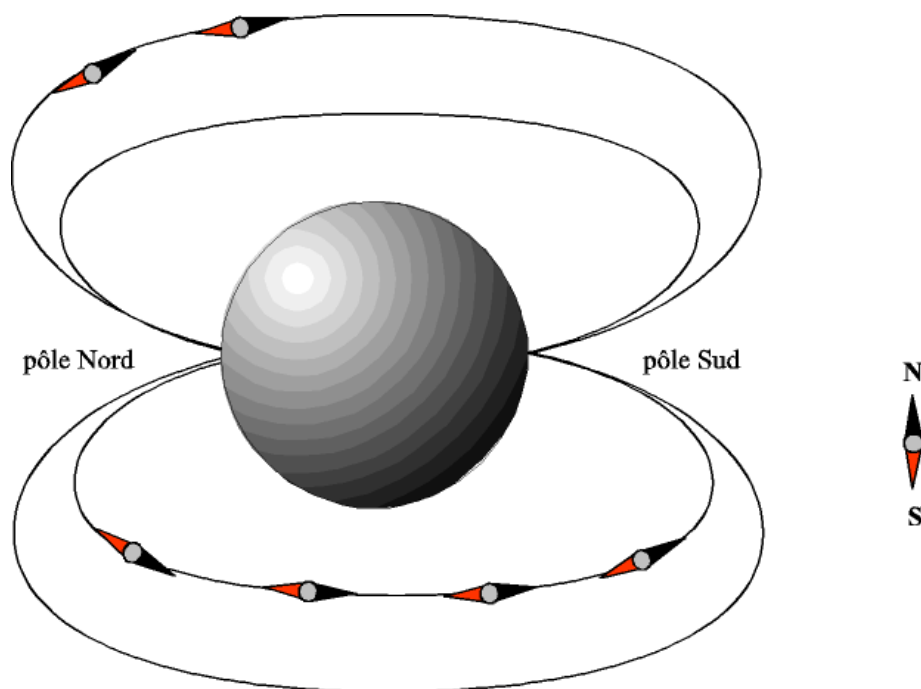


Figure V.48.

Lorsqu'une aiguille aimantée est suspendue, libre de s'orienter, l'une de ses extrémités pointe approximativement vers le pôle nord géographique de la terre, c'est pourquoi cette extrémité, est appelée pôle nord de l'aiguille, l'autre extrémité étant appelée pôle sud. Cette observation fit suggérer à William Gilbert, en 1600, que la terre est elle-même un gigantesque aimant. Le pôle nord d'un aimant attire le pôle sud d'un autre aimant. C'est donc un pôle magnétique sud qui se trouve situé près du pôle nord géographique de la terre (voir Figure V.49).

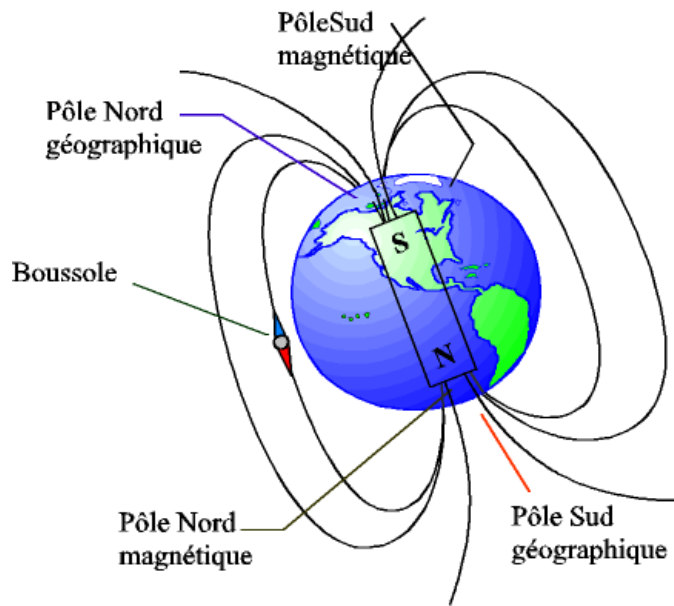


Figure V.49.

5.8.1 Champ magnétique

Deux aimants rapprochés exercent une force l'un sur l'autre, sans même avoir à se toucher. Cette force est répulsive entre pôles de même nom, attractive entre un pôle nord et un pôle sud (figure V.50).

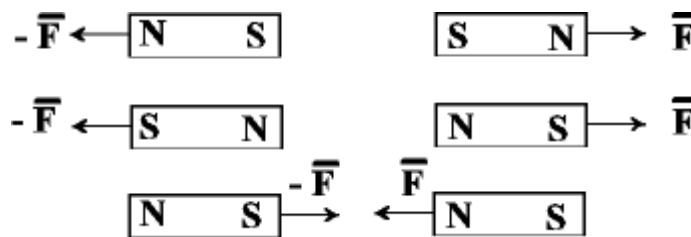


Figure V.50.

Bien qu'il semble y avoir une certaine analogie avec la force électrique discutée au chapitre V, section 5.1, il s'agit de quelque chose de différent : un aimant n'exerce aucune attraction sur un morceau d'isolant électrisé. Seuls le fer et dans une moindre mesure, le cobalt, le nickel et le gadolinium peuvent montrer des propriétés magnétiques significatives. On qualifie ces matériaux de ferromagnétiques.

Au voisinage d'un barreau aimanté, la limaille de fer forme une configuration caractéristique (figure V.51) qui montre l'influence de l'aimant sur le milieu environnant. C'est à partir de l'observation de ces configurations que Michael Faraday a eu l'idée d'appliquer la notion de [champ](#) au magnétisme, comme il l'avait fait pour l'électricité : les aimants produisent dans l'espace environnant un champ magnétique \vec{B} . Il est alors possible de décrire la force qu'un aimant exerce sur un autre par l'interaction qui existe entre lui et le champ magnétique de l'autre aimant. Toutefois, le champ magnétique est un peu plus difficile à définir. Dans cette section nous nous contenterons de définir sa direction : c'est celle que prendrait le pôle nord d'une aiguille aimantée. Nous définirons son intensité à la section 3.



Figure V.51.

5.8.2 Production d'un champ magnétique par un courant

Au cours du XVIII^{ème} siècle, un grand nombre de physiciens ont cherché à établir un lien entre électricité et magnétisme, mais ce n'est qu'en 1820 que Hans Christian Oersted y est parvenu. Il s'est aperçu qu'une aiguille aimantée placée à proximité d'un fil électrique parcouru par un courant est déviée. A proximité d'un segment de fil rectiligne, l'aiguille se place de façon à être tangente à une circonférence tracée autour de lui, dans un plan perpendiculaire (voir figure V.52.a).

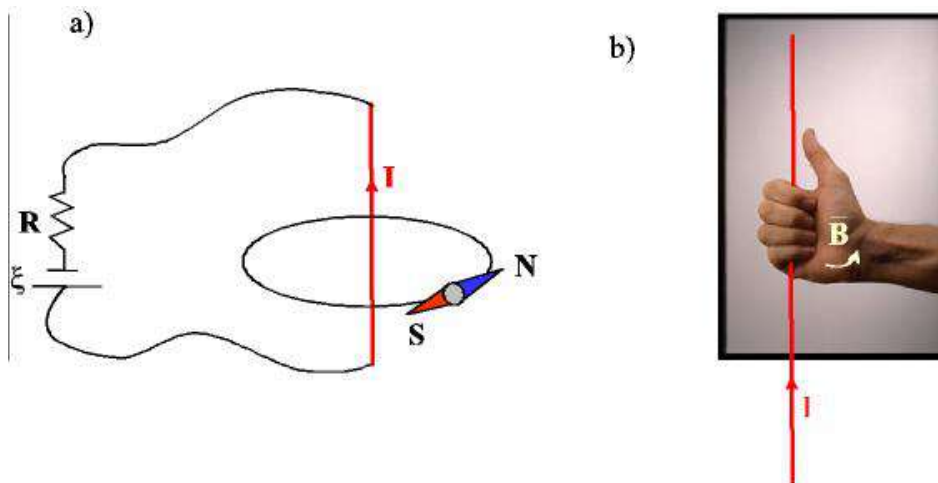


Figure V.52.

Ceci veut dire que le courant qui circule dans le fil, produit un champ magnétique dans l'espace qui l'entoure, tout comme un aimant, et que ce champ magnétique a la direction de l'aiguille aimantée. Pour se souvenir du sens de \vec{B} , on applique la règle de la main droite : on prend le fil dans sa main droite, pouce pointé dans le sens du courant conventionnel, les doigts entourent alors le fil, dans le sens du champ magnétique (voir figure V.52.b).

5.8.3 Force magnétique s'exerçant sur un courant

Nous venons de voir qu'un courant électrique peut faire dévier un aimant. Il exerce donc une force sur celui-ci. En vertu du principe de l'action et de la réaction, on s'attend à ce qu'un aimant exerce en retour une force égale et opposée sur le fil porteur de courant. C'est exactement ce qu'on peut [observer](#). Supposons qu'un fil rectiligne passe entre les pôles d'un aimant, comme le montre la figure V.53. Lorsqu'il est parcouru par un courant, il subit une force qui agit à angle droit par rapport à la direction du champ

magnétique et par rapport à celle du courant. Si on inverse le sens du courant ou si on inverse les pôles de l'aimant, la force change de sens.

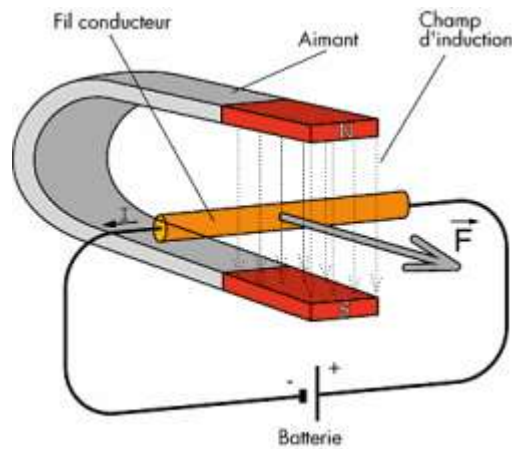


Figure V.53.

Pour se rappeler le sens de cette force magnétique, on utilise la règle de la main droite illustrée sur la figure V.54.

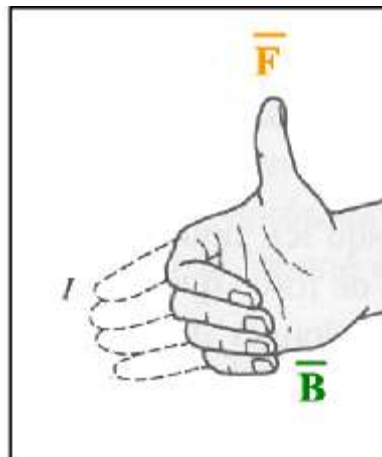


Figure V.54.

On oriente d'abord son avant-bras le long du fil conducteur, les doigts dépliés pointant dans le sens conventionnel du courant. Ensuite on fait tourner le bras sur lui-même jusqu'à ce que les doigts, repliés cette fois, pointent dans la direction du champ magnétique. Le pouce tendu indique alors le sens de la force.

Des expériences ont montré que l'intensité de la force ci-dessus est proportionnelle à l'intensité du courant qui parcourt le fil, à la longueur L de celui-ci, située dans le champ magnétique supposé uniforme. Si le fil fait un angle θ avec le champ magnétique (voir figure V.55), l'intensité de la force est proportionnelle au sinus de cet angle :

$$F \propto I L \sin \theta.$$

Il va de soi que la force doit également dépendre du champ magnétique B et croître avec celui-ci :

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{B}) I L \sin \theta.$$

En fait on se sert de la relation ci-dessus pour définir l'intensité du champ magnétique que nous n'avons pas encore définie, en posant $f(\mathbf{B}) \equiv B$. Dès lors :

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{F}}{I L \sin \theta} \quad (\text{V.80})$$

L'unité SI de champ magnétique est le tesla (T). D'après la relation (V.80), on voit que $1 \text{ T} \equiv 1 \text{ (N.s)/(C.m)}$.

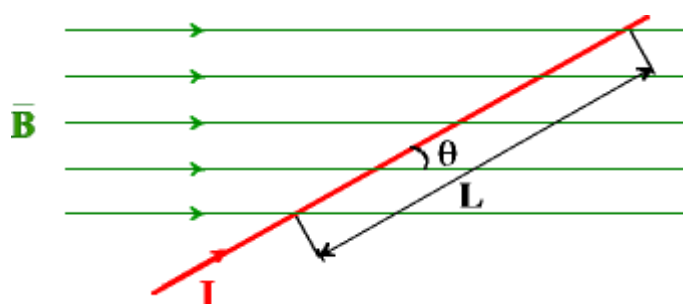


Figure V.55.

Rappelons que le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , faisant entre eux un angle θ , a pour norme :

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (\text{V.81})$$

Dès lors si on définit un vecteur \vec{L} qui a pour norme L et a le sens du courant I , la norme du produit vectoriel de \vec{L} par \vec{B} , vaut (voir 80) :

$$|\vec{L} \wedge \vec{B}| = LB \sin \theta = \frac{\mathbf{F}}{I}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{F} = I |\vec{L} \wedge \vec{B}|.$$

Dès lors le vecteur force magnétique peut s'écrire :

$$\vec{\mathbf{F}} = I \vec{\mathbf{L}} \wedge \vec{\mathbf{B}}, \text{ pour un courant rectiligne et un champ uniforme} \quad (\text{V.82})$$

En utilisant les règles du produit vectoriel, on vérifie aisément que le deuxième membre de la relation (V.82) donne bien un vecteur force qui satisfait à la règle de la main droite illustrée sur la figure V.54.

Lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme ou lorsque le fil n'est pas rectiligne, il faut faire appel au calcul différentiel pour calculer la force magnétique qui s'exerce sur ce dernier. La force infinitésimale

\vec{dF} qui agit sur un segment de fil infinitésimal $d\vec{\ell}$, parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} est donné, d'après (82), par :

$$\boxed{\vec{dF} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}} \quad (\text{V.83})$$

La force totale s'exerçant sur le fil, \vec{F} , est donnée par l'intégrale des forces infinitésimales \vec{dF} :

$$\vec{F} = \int_{\text{le long du fil}} \vec{dF} \quad (\text{V.84})$$

5.8.4 Application au galvanomètre et au moteur électrique

Le galvanomètre (voir section 5.7) et le moteur électrique fonctionnent tous deux grâce aux forces magnétiques qui s'exercent sur une boucle de courant plongée dans un champ magnétique, c'est pourquoi nous allons tout d'abord calculer celles-ci.

5.8.4.1 Forces agissant sur une boucle de courant

Considérons une boucle de courant rectangulaire, de côtés a et b , parcourue par un courant I , placée de telle sorte à pouvoir pivoter autour d'un axe vertical passant par son centre (voir figure V.56).

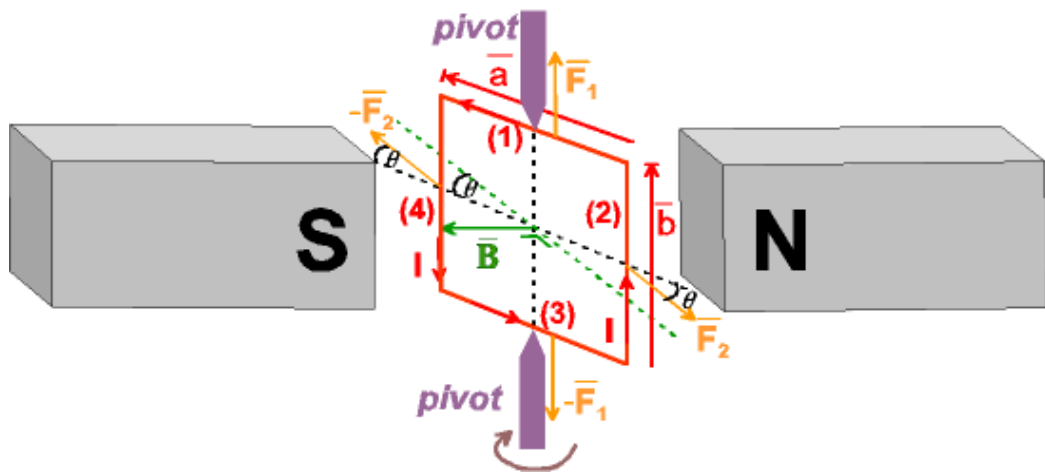


Figure V.56.

Elle est plongée dans le champ magnétique \vec{B} d'un aimant, horizontal, de droite à gauche sur la figure V.56. Supposons qu'au lieu d'être parallèle aux faces de l'aimant, c'est-à-dire perpendiculaire au champ magnétique, la boucle ait tourné d'un angle θ par rapport à cette position de référence. Calculons la force magnétique qui s'exerce sur chacun des côtés de la boucle, à l'aide de la relation (82) :

côté 1 : $\vec{F}_1 = I \vec{a} \wedge \vec{B}$ \vec{a} : de droite à gauche (sens du courant)

côté 2 : $\vec{F}_2 = I \vec{b} \wedge \vec{B}$ \vec{b} : de bas en haut (sens du courant)

côté 3 : $\vec{F}_3 = I (-\vec{a}) \wedge \vec{B} = -\vec{F}_1$

côté 4 : $\vec{F}_4 = I (-\vec{b}) \wedge \vec{B} = -\vec{F}_2$

Les vecteurs \vec{F}_1 et \vec{F}_3 sont tous deux verticaux, de même intensité, de sens opposé, et sont situés dans le plan de la boucle ; leurs effets s'annulent mutuellement. Les vecteurs \vec{F}_2 et \vec{F}_4 , aussi égaux et opposés, font un angle θ avec le plan de la boucle car ils sont perpendiculaires à \vec{B} : \vec{F}_2 tire le côté droit de la boucle vers l'avant, \vec{F}_4 tire le côté gauche de la boucle vers l'arrière. Ces deux forces forment ce qu'on appelle un couple ou un moment de force et font tourner la boucle autour des pivots. L'intensité des deux forces qui font tourner la boucle est :

$$F_2 = I b B, \text{ car } \vec{B} \perp \vec{b} \tag{V.85}$$

\vec{F}_2 tire sur la boucle à un angle θ ; l'effet est donc maximum lorsque la boucle est parallèle au champ magnétique et que $\theta = 90^\circ$. Lorsque la boucle est perpendiculaire au champ magnétique et que $\theta = 0^\circ$, les forces opposées \vec{F}_2 et \vec{F}_4 sont dans le plan de la boucle et ne peuvent plus la faire tourner ; le couple de forces s'annule. Lorsque la boucle dépasse cette position et est inclinée de l'autre côté, les forces qui gardent le même sens tendent à ramener la boucle dans cette position et font donc tourner la boucle en sens inverse.

5.8.4.2 Galvanomètre d'Arsonval

La relation 85 montre que les forces qui font tourner une boucle de courant dans un champ magnétique sont proportionnelles à l'intensité du courant I qui parcourt la boucle. C'est cette propriété qui est utilisée dans le galvanomètre d'Arsonval schématisé sur la figure V.57.

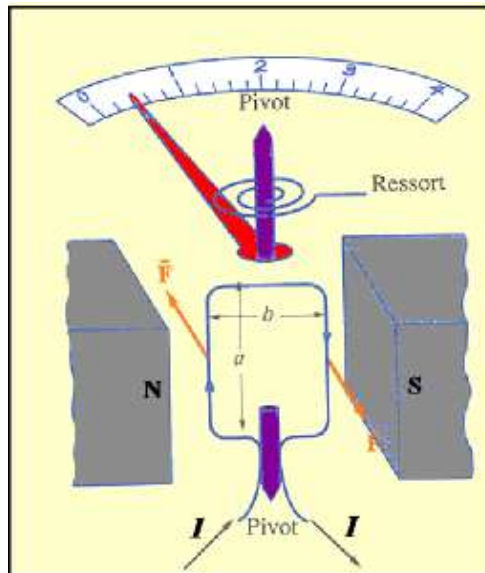


Figure V.57.

On fait passer le courant, dont on désire mesurer l'intensité, dans la boucle. Une aiguille, fixée au pivot se déplace devant une échelle graduée lorsque la boucle tourne sous l'effet du courant. Le ressort exerce

une force de rappel qui permet de stabiliser la boucle dans une position donnée lorsque cette force de rappel compense les forces magnétiques dues au courant qui passe dans la boucle.

5.8.4.3 Moteur électrique

Le schéma de principe du moteur électrique est illustré à la figure V.58.

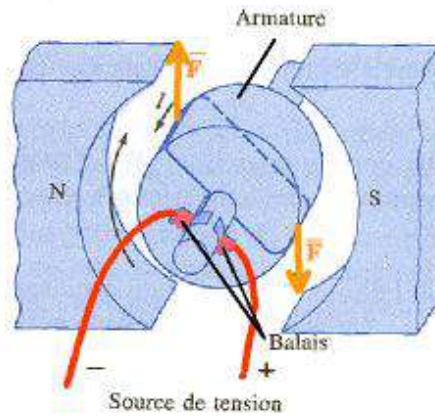


Figure V.58.

Sous l'effet du champ magnétique créé par un aimant, le courant qui alimente le moteur fait tourner la boucle et entraîne l'axe du moteur dans sa rotation. Normalement les forces devraient changer de sens à chaque passage de la boucle à la position perpendiculaire au champ magnétique (voir section 5.8.4.1), ce qui aurait pour effet d'inverser continuellement le sens de rotation du moteur. Pour éviter cela, on utilise des balais qui inversent la polarité du courant à chaque demi-tour, au moment où la boucle passe par la position perpendiculaire au champ magnétique, ce qui empêche l'inversion du sens des forces qui font tourner le moteur (voir figure V.59).

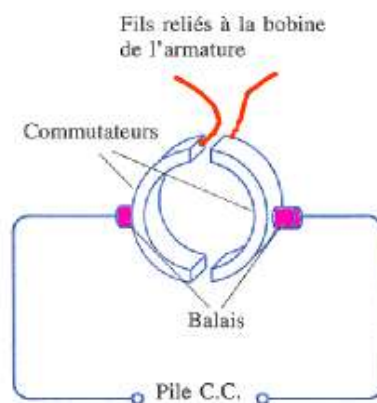


Figure V.59.

Remarque : dans la pratique, à la fois pour le galvanomètre et pour le moteur électrique, les choses se présentent de manière un peu plus compliquée. Afin de renforcer les effets, il n'y a pas qu'une seule boucle mais un grand nombre de boucles, formant un bobinage. Pour maintenir le champ magnétique parallèle aux boucles, même lorsque celles-ci ont tourné (effet maximum, $\theta = 90^\circ$), le fil est bobiné sur un noyau de fer doux (voir figure V.60).

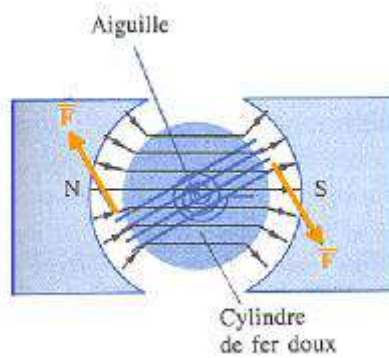


Figure V.60.

5.8.5 Force de Lorentz

Nous avons vu qu'un fil parcouru par un courant, c'est-à-dire des charges électriques en mouvement, subit une force lorsqu'il se trouve dans un champ magnétique. On peut donc s'attendre à ce que des particules chargées qui se déplacent librement soient elles aussi soumises à une force magnétique et il en est bien ainsi. Nous allons calculer cette force à partir de la relation (V.82). Supposons des particules de charge q ayant une vitesse \vec{v} ; elles parcourent en ligne droite une distance \vec{L} dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , en un temps t . Par conséquent ces particules constituent un courant. Si n d'entre elles passent en un point durant le temps t , ce courant vaut :

$$\mathbf{I} = \frac{nq}{t},$$

d'après la définition (V.35). D'après (V.82), la force qui s'exerce sur ce courant vaut :

$$\vec{F}_I = \mathbf{I} \vec{L} \wedge \vec{B} = \frac{nq}{t} \vec{L} \wedge \vec{B} = nq \vec{v} \wedge \vec{B}$$

puisque $\vec{v} = \vec{L}/t$. Cette force est en fait la force qui s'exerce sur les n particules de charge q . Par conséquent la force qui s'exerce sur une seule d'entre elle vaut :

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (\text{V.86})$$

Cette force est appelée **force de Lorentz**.

5.8.6 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Dès qu'une particule chargée pénètre dans une zone où règne un champ magnétique, avec une vitesse initiale, elle est soumise à la force de Lorentz (V.86). Toutefois, vu la forme de cette force qui s'exprime sous forme d'un produit vectoriel, celle-ci sera nulle si cette vitesse est parallèle au champ magnétique même si la vitesse et le champ magnétique sont non nuls. En effet, d'après (V.86), l'intensité de la force de Lorentz est :

$$F = q v B \sin \theta, \quad (\text{V.87})$$

où θ est l'angle entre la vitesse et le champ magnétique ; elle s'annule donc pour $\theta = 0^\circ$. Pour v et B fixés, elle sera maximum pour $\theta = 90^\circ$:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{vB}, \quad \text{lorsque } \vec{v} \perp \vec{B} \quad (\text{V.88})$$

D'après (V.86), la force de Lorentz est perpendiculaire à la fois à \vec{v} et à \vec{B} . Pour connaître le sens de la force de Lorentz, on applique la règle de la main droite : on place sa main droite, doigts dépliés dans le sens de déplacement de la particule, c'est-à-dire celui de \vec{v} . On fait tourner la main sur elle-même de sorte que les doigts une fois pliés indiquent la direction de \vec{B} . Le pouce tendu indique alors le sens de \vec{F} . **Attention, cette règle donne le sens de \vec{F} pour une charge q positive. Lorsque la charge est négative, le sens de la force est opposé.**

Exemple :

Un électron se déplace verticalement vers le haut avec une vitesse de $2,0 \times 10^6$ m/s lorsqu'il pénètre dans un champ magnétique. Il subit alors une force de $4,0 \times 10^{-14}$ N vers l'ouest. Sachant que cette force s'annule lorsque l'électron se déplace horizontalement vers le nord, déterminer l'intensité et le sens de ce champ magnétique.

Puisque la force s'annule lorsque l'électron se dirige horizontalement vers le nord, c'est qu'il a, à ce moment, un parcours parallèle ou antiparallèle à \vec{B} . Donc \vec{B} est horizontal avec une direction nord-sud ou sud-nord. Lorsque l'électron se dirige vers le haut, on a :

$$\vec{F}_0 = (-e) \vec{v}_{\text{haut}} \wedge \vec{B}_{\text{N-S(?)}}$$

Si \vec{B} était dirigé vers le nord (voir figure V.61.a), en appliquant la règle de la main droite et en inversant le résultat pour tenir compte de la charge négative de l'électron, la force \vec{F} serait dirigée vers l'est. C'est donc vers le sud que \vec{B} est dirigé (voir figure V.61.b).

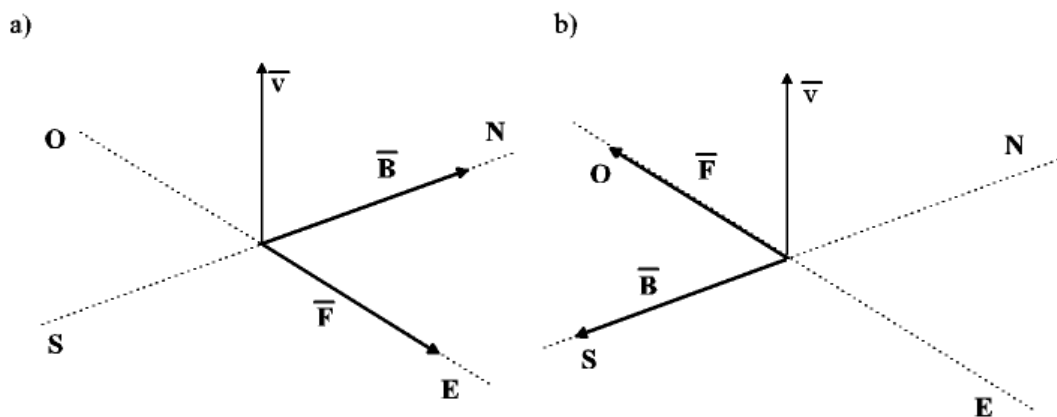


Figure V.61.

Quant à l'intensité de B , puisque \vec{v} est perpendiculaire à \vec{B} , elle est donnée par :

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= e v B, \\ \Rightarrow B &= \frac{|\vec{F}|}{e v} = \frac{4,0 \times 10^{-14} \text{ N}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 2,0 \times 10^6 \text{ m/s}} \\ &= 1,25 \times 10^{-1} \text{ N} = 0,125 \text{ T} \end{aligned}$$

5.8.7 Champ magnétique dû à des courants

A la section V.8.2, nous avons vu qu'un courant créait un champ magnétique dans l'espace qui l'entoure. L'intensité, la direction et le sens de ce champ magnétique dépendent de la forme et de l'intensité du courant mais aussi, bien sûr, de la distance à laquelle il se trouve. Par conséquent, dans la grande majorité des cas, les champs magnétiques ne sont pas uniformes. Pour calculer le champ magnétique qui correspond à une configuration de courants donnés on utilise le théorème d'Ampère que nous n'avons pas le temps d'étudier dans ce cours. Toutefois, nous allons passer en revue quelques résultats auxquels il conduit pour des situations courantes. Ces résultats peuvent aussi être obtenus expérimentalement.

5.8.7.1 Champ magnétique dû à un fil rectiligne

Dans le cas d'un conducteur rectiligne, nous avons déjà vu à la section V.8.2 que le champ magnétique était perpendiculaire au fil dans un plan qui lui est perpendiculaire. On s'attend à ce que l'intensité de ce champ magnétique augmente avec l'intensité du courant électrique et diminue avec la distance r à laquelle on se trouve par rapport au fil. Effectivement, on constate que :

$$\mathbf{B} \propto \frac{\mathbf{I}}{r},$$

à condition que r soit petit par rapport à la distance à laquelle on se trouve des extrémités du fil rectiligne (ce rapport serait exact pour un fil infini). La constante de proportionnalité s'exprime par $\mu_0/2\pi$, de sorte que :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r}, \text{ pour un fil rectiligne} \quad (\text{V.89})$$

La constante μ_0 est appelée **perméabilité du vide** et vaut :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (\text{V.90})$$

5.8.7.2 Champ magnétique dû à un solénoïde

Dans les circuits électriques, on trouve souvent des solénoïdes. Un [solénoïde](#) est un fil conducteur enroulé plusieurs fois sur une surface cylindrique ; de cette manière, il forme plusieurs boucles appelées spires (voir figure V.62). Celles-ci sont le plus souvent serrées l'une contre l'autre, mais pas nécessairement.

L'intérêt du solénoïde réside en ce qu'il permet de créer un champ magnétique à peu près uniforme dans une région de l'espace, à l'intérieur de ses spires. En effet, on peut montrer que pour un solénoïde de longueur infinie, le champ magnétique est nul à l'extérieur et constant à l'intérieur, dirigé suivant l'axe du solénoïde.

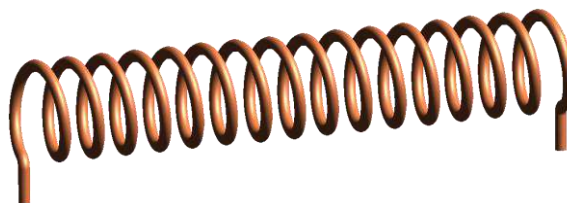


Figure V.62.

La figure V.63 montre une coupe dans un tel solénoïde; les cercles avec un point indiquent une section du fil avec le courant qui sort de la page, tandis que les cercles avec une croix indiquent un courant entrant.

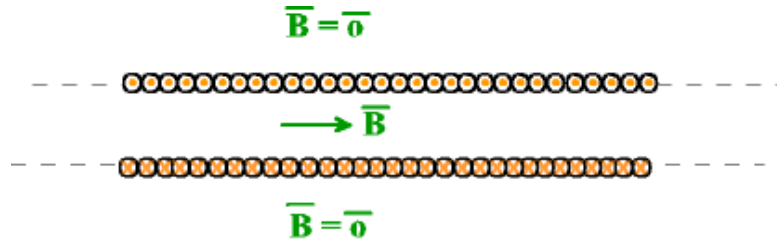


Figure V.63.

C'est en appliquant la règle de la main droite à un segment de spire quelconque, comme on l'avait fait à la section 8.2 pour un fil rectiligne infini, qu'on trouve le sens de \vec{B} dans le solénoïde. Son intensité est donnée par :

$$\mathbf{B} = \mu_0 n \mathbf{I}, \text{ pour un solénoïde infini,} \quad (\text{V.91})$$

où $n = N/L$ est le nombre N de spires sur une longueur L du solénoïde.

Dans la pratique les solénoïdes ont une longueur finie et les résultats ci-dessus restent valables, à condition de se trouver loin des extrémités du solénoïde.

5.8.8 Définition de l'ampère et du coulomb

Si la constante μ_0 vaut exactement $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$, c'est parce que cette valeur a été posée et qu'on a déduit la définition de l'ampère à partir du champ magnétique produit par un courant de 1 ampère. Pour cela, considérons deux longs conducteurs parallèles, séparés par une distance r (voir figure V.64) et parcourus par des courants respectifs I_1 et I_2 .

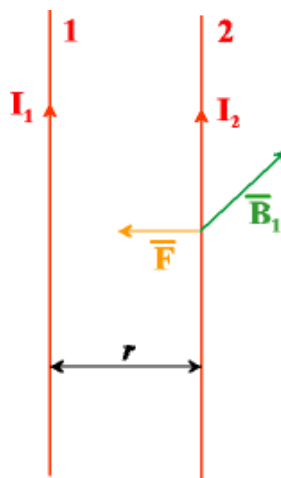


Figure V.64.

Le conducteur 1 crée autour de lui un champ magnétique \vec{B}_1 , dont l'intensité vaut, à l'endroit où se trouve le conducteur 2 :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (\text{V.92})$$

Par conséquent le conducteur 2 plongé dans le champ magnétique \vec{B}_1 , dû au conducteur 1, subit de la part de ce dernier une force. Pour une longueur L de fil, cette force est donnée par la relation (82) : $F = I_2 L B_1$. En remplaçant B_1 par son expression donnée en (92) et en divisant par L , on obtient la force par unité de longueur :

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{L}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (\text{V.93})$$

En utilisant la règle de la main droite, on peut vérifier que la force est attractive si les deux courants circulent dans le même sens (cf. figure V.64) ; elle est répulsive si les courants circulent en sens opposé.

On peut vérifier aisément que la force exercée par le conducteur 2 sur le conducteur 1 a la même intensité et est de sens opposé, ce qui satisfait bien au principe de l'action et de la réaction.

La relation (93) est utilisée pour définir l'ampère. Si $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ et que les deux fils se trouvent à 1 m l'un de l'autre, alors :

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{L}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}}{2\pi} \frac{1\text{A} \times 1\text{A}}{1\text{m}} = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$$

Ainsi :

un ampère se définit comme le courant circulant dans deux longs conducteurs parallèles, séparés par une distance de 1 m et produisant l'un sur l'autre une force de $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ par mètre de longueur.

Le coulomb quant à lui est défini par rapport à l'ampère :

Le coulomb est la charge qui traverse une section d'un conducteur parcouru par un courant d'un ampère pendant une seconde $1 \text{ C} \equiv 1 \text{ A} \cdot 1\text{s}$.

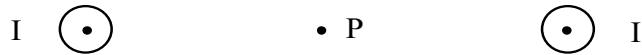
5.8.9 Exercices

1. Indiquer par une flèche la direction du champ magnétique \vec{B} aux points P dans les différentes situations ci-dessous. Si $\vec{B} = 0$, faites un cercle autour du point P

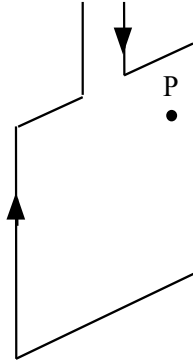
a) au voisinage d'un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant I , sortant perpendiculairement de la feuille :



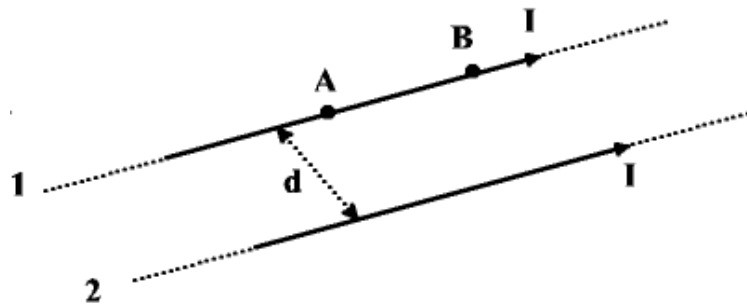
b) entre deux conducteurs rectilignes infinis, parallèles et parcourus par un courant I de même intensité et de même sens. P se trouve à égale distance des deux conducteurs :



- c) à l'intérieur d'un circuit constitué d'un fil conducteur en forme de rectangle, parcouru par un courant I :

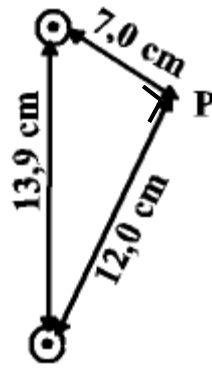


- Déterminez l'intensité d'un champ magnétique à 2,0 cm d'un long fil rectiligne portant un courant de 3,8 A. ($R = 3,8 \cdot 10^{-5}$ T).
- Deux fils conducteurs rectilignes infinis sont parallèles et parcourus tous deux par un courant I de même sens. Ils sont placés à une distance d l'un de l'autre.

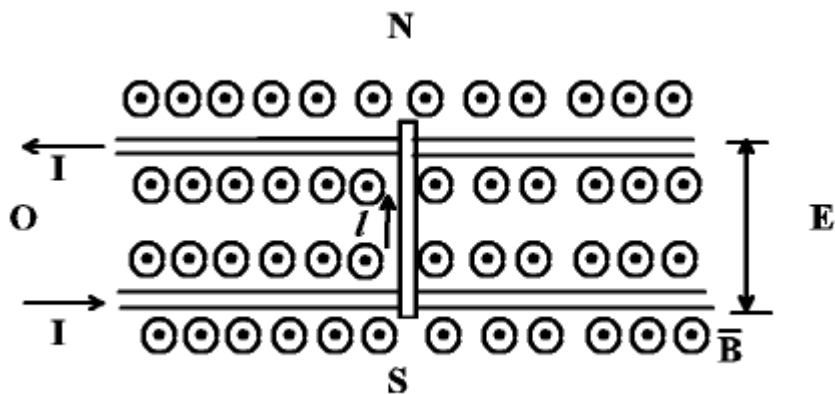


Donnez l'expression de la force exercée par le conducteur 2 sur la portion AB, de longueur L , du conducteur 1. Préciser sa direction et son sens. Représenter cette force par une flèche sur le schéma ci-dessus.

- Calculez la force magnétique qui s'exerce sur les 240 m de fil rattachés à deux pylônes et portant un courant de 150 A si le champ magnétique de la Terre, d'une intensité de 5.0×10^{-5} T, forme un angle de 60° avec ce fil. (R : 1,56 N).
- Deux longs fils minces parallèles séparés par une distance de 13,9 cm sont parcourus dans le même sens par un courant de 25 A. Calculez l'intensité du champ magnétique en un point situé à 12,0 cm d'un des fils et à 7,0 cm de l'autre ; remarquer que les trois distances citées forment les côtés d'un triangle rectangle. (R: $8,3 \cdot 10^{-5}$ T).

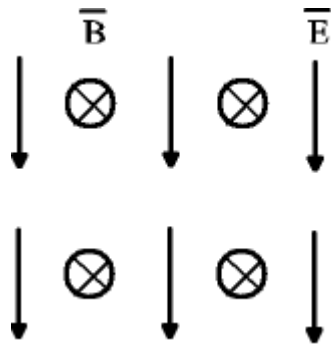


6. Un solénoïde mesurant 32 cm de longueur et 1,2 cm de diamètre doit produire un champ magnétique de 0,20 T en son centre. Combien de spires doit-il comporter s'il est parcouru par un courant maximal de 3,7 A ? (R: $1,38 \cdot 10^4$).
7. Deux fils rigides parallèles séparés par une distance ℓ dans un plan horizontal servent de rails à une légère tige métallique de masse m (perpendiculaire à chaque rail), comme dans la figure. Un champ magnétique B , qui s'oriente verticalement vers le haut, agit en tout point de ce système. A $t = 0$, on branche les fils reliés aux rails à une source de courant continu et le système se trouve parcouru par un courant d'intensité I . Déterminez la vitesse de la tige en fonction du temps en supposant qu'il n'y a aucun frottement entre la tige et les rails. Si le courant qui parcourt la tige s'oriente vers le nord, dans quelle direction se déplace-t-elle, est ou ouest ? (R : $v(t) = I\ell Bt/m$, est).



Vue de haut d'une tige qui glisse sur des rails.

8. Un électron pénètre dans une région de l'espace où règne un champ électrique de $9,5 \times 10^3$ V/m et un champ magnétique de $4,0 \times 10^{-3}$ T ; leurs directions respectives sont perpendiculaires :



- a. Quelles doivent être la direction et la vitesse de l'électron pour qu'il traverse cette région sans être dévié ?
- b. Quel serait le rayon de l'orbite décrit par ce même électron si on supprimait le champ électrique ?
 (R : a) horizontale de gauche à droite ; $v = 2,4 \times 10^6$ m/s b) $R = 3,38 \times 10^{-3}$ m).

5.9 Induction électromagnétique et inducteurs

Nous avons vu à la section 5.8 qu'un courant produisait un champ magnétique. A la suite de cette observation, les scientifiques se sont demandé si, à l'inverse, un champ magnétique pouvait faire apparaître un courant. Quelques 10 ans plus tard, vers 1830, Joseph Henry et Michael Faraday ont confirmé cette hypothèse, chacun de son côté. Le terme induction électromagnétique désigne la production de courants et donc de f.é.m. à partir de champs magnétiques ; on parle de courants induits et de f.é.m. induites. L'induction électromagnétique est à l'origine du fonctionnement des générateurs, des transformateurs et à la base de la production d'ondes électromagnétiques telles que, par exemple, la lumière et les ondes radio.

5.9.1 Conditions pour créer des courants induits

Nous allons maintenant étudier quelles sont les conditions auxquelles un courant est induit à partir d'un champ magnétique (<https://youtu.be/uQ1cDJirgcE>).

- Constatons tout d'abord qu'aucun courant n'est induit dans un conducteur immobile dans un champ magnétique constant.
- Par contre lorsque le champ magnétique au travers d'une boucle de conducteur varie, un courant est induit dans la boucle.

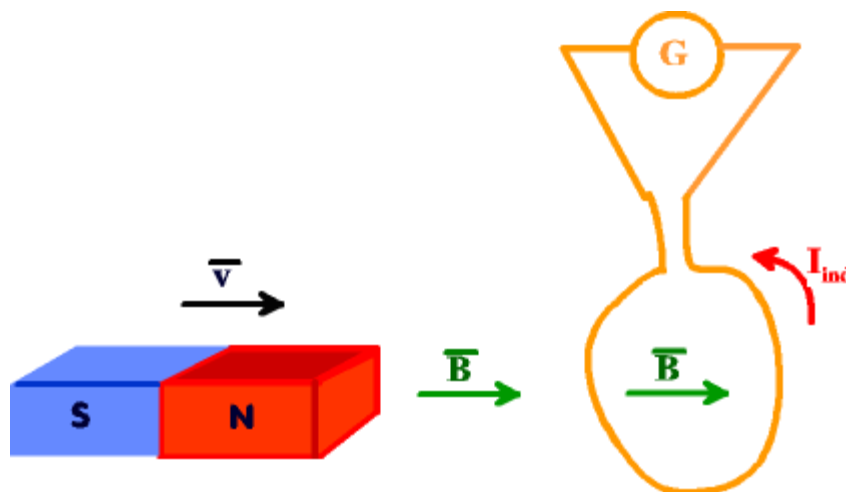


Figure V.65.

Cet effet est illustré à la figure V.65. En rapprochant l'aimant de la boucle de conducteur, le champ magnétique \vec{B} qui traverse celle-ci augmente ; en effet, le champ magnétique produit par l'aimant diminue au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Suite à ce mouvement, un courant est induit dans la boucle et peut être observé à l'aide d'un galvanomètre, alors qu'il n'y a pas de pile dans le circuit ; ce courant a été induit par la variation de champ magnétique au travers de la boucle. Dès que l'aimant s'arrête, \vec{B} cesse de varier et le courant s'annule. Lorsqu'on éloigne l'aimant de la boucle, un courant en sens inverse apparaît seulement pendant la durée du mouvement. Le même résultat peut être obtenu en laissant l'aimant immobile et en bougeant la boucle de courant.

- Un courant est également induit dans une boucle de conducteur flexible, située dans un champ magnétique constant et uniforme, lorsqu'on modifie subitement l'aire délimitée par cette boucle, en tirant dessus par deux points diamétralement opposés ; cette aire se trouve ainsi réduite (voir figure V.66). Le courant s'annule lorsque la déformation de la boucle s'arrête.

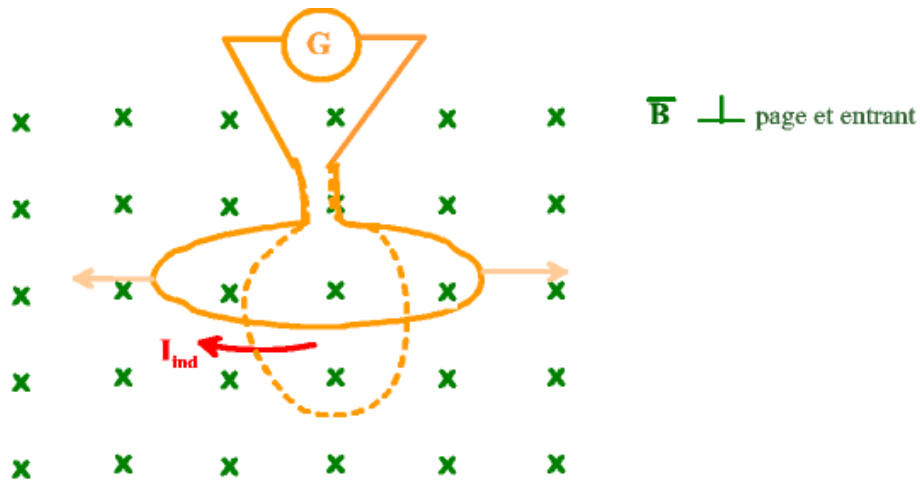


Figure V.66.

- d) Il est encore possible de faire apparaître un courant induit dans une boucle de conducteur d'aire constante, traversée par un champ magnétique constant et uniforme, en faisant tourner la boucle par rapport à la direction du champ (voir figure V.67).

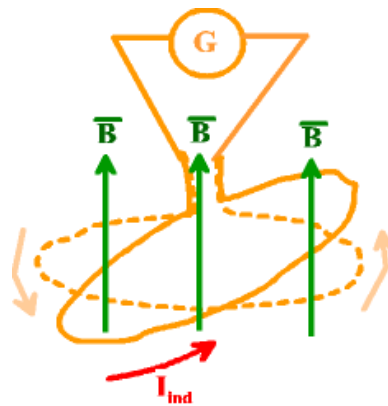


Figure V.67.

5.9.2 Loi de Faraday et loi de Lenz

Les observations faites à la section précédente s'expriment dans la loi de Faraday qui dit que l'intensité de la f.é.m. induite dans un circuit est donnée par la valeur absolue du taux de variation du flux magnétique, Φ_B au travers de ce circuit :

$$\boxed{|\xi_{ind}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|} \quad (V.94)$$

Le flux magnétique au travers d'une boucle plane se définit, dans le cas d'un champ magnétique uniforme, par :

$$\Phi_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cos \theta, \text{ pour } \vec{B} \text{ uniforme et boucle plane} \quad (V.95)$$

où A est l'aire de la boucle et θ est l'angle que fait le champ magnétique \vec{B} avec la perpendiculaire à la surface de la boucle (voir figure V.68).

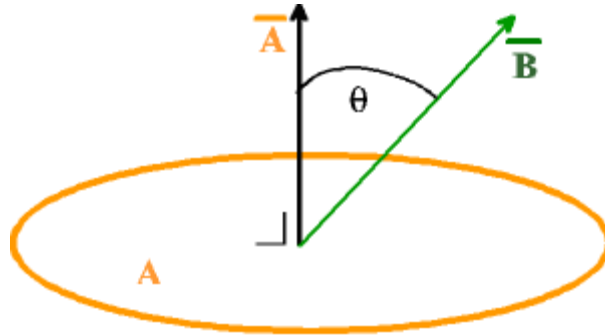


Figure V.68.

En définissant le vecteur \vec{A} comme un vecteur perpendiculaire à la boucle, de longueur A, on peut aussi écrire :

$$\Phi_B = \vec{A} \cdot \vec{B}, \text{ pour } \vec{B} \text{ uniforme et boucle plane} \quad (\text{V.96})$$

Avec la définition du flux magnétique donnée en (V.95), la loi de Faraday exprimée par la relation (94) implique bien que pour provoquer un courant induit et donc une f.é.m. induite, il faut soit une variation de B, soit une variation de A, soit une variation de θ ou toute combinaison de ces variations.

L'unité SI de flux magnétique est le weber (Wb). D'après la relation V.95, un flux d'un weber est produit par un champ magnétique d'un tesla traversant perpendiculairement une surface de 1 m^2 .

$$1 \text{ Wb} \equiv 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2.$$

Si le champ n'est pas uniforme ou si la surface considérée n'est pas plane, le flux magnétique au travers de la surface est donné par une intégrale :

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (\text{V.97})$$

La loi de Faraday telle qu'énoncée en (V.94) permet de déterminer l'intensité de la f.é.m. induite et d'en déduire l'intensité du courant induit à l'aide de la loi d'Ohm :

$$I_{\text{ind}} = \frac{|\xi_{\text{ind}}|}{R},$$

où R est la résistance de la boucle de conducteur.

Pour déterminer le sens du courant induit, H.F. Lenz proposa une règle connue sous le nom de **loi de Lenz** :

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il produit s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Pour comprendre comment appliquer la loi de Lenz appliquons-la à la situation illustrée sur la figure V.69.

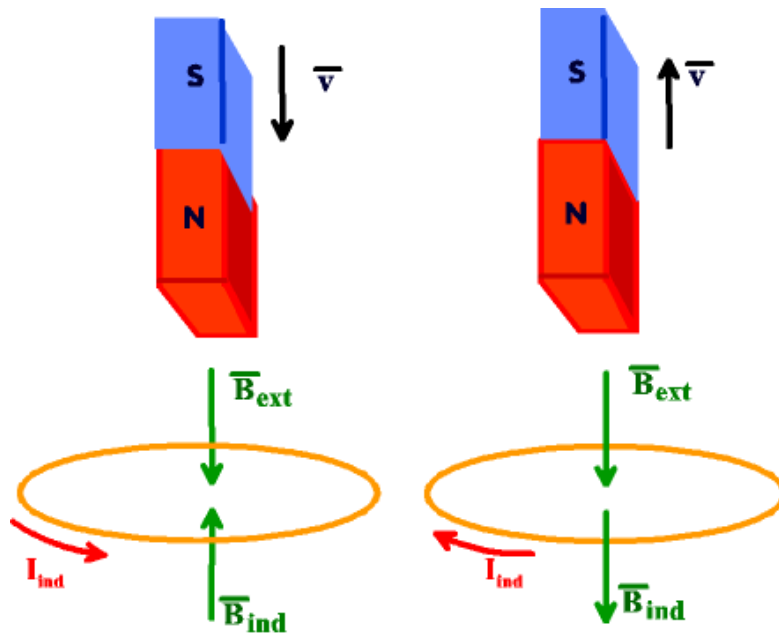


Figure V.69.

En (a), l'aimant est rapproché de la boucle de conducteur, conduisant à une augmentation du champ magnétique extérieur, \vec{B}_{ext} , au travers de celle-ci et donc à une augmentation du flux magnétique. Le courant induit I_{ind} doit donc avoir un sens tel que le champ qu'il induit, \vec{B}_{ind} provoque une diminution du flux magnétique. Dans le cas de la figure V.69.b, l'aimant est éloigné, provoquant une diminution du flux magnétique. Le sens du courant induit doit donc être tel qu'il provoque un champ induit qui conduit à une augmentation du flux magnétique.

La loi de Lenz n'est en fait qu'une conséquence de la loi de conservation de l'énergie. En effet, dans le cas de la figure V.69.a, si le champ magnétique induit venait renforcer le champ magnétique extérieur, ce champ supplémentaire entraînerait une augmentation du courant induit. Le courant plus intense provoquerait un champ induit plus intense, qui à son tour produirait un courant induit plus intense. Il est évident que cette croissance continue de la f.é.m. induite n'est pas possible sur le plan énergétique : un agent extérieur doit fournir l'énergie nécessaire à créer la f.é.m. induite.

Il est possible d'exprimer les lois de Faraday et de Lenz au moyen d'une seule expression, à condition d'adopter une convention pour le signe de ξ_{ind} et pour le sens du vecteur \vec{A} . Cette convention est illustrée à la figure V.70.

Par convention, $\xi_{\text{ind}} > 0$ correspond à la f.é.m. qui produirait un courant donnant lieu à un champ magnétique de même sens que le champ extérieur \vec{B}_{ext} et l'orientation du vecteur \vec{A} est telle qu'elle conduit à un flux magnétique initial positif.

Les lois de Faraday et de Lenz combinées s'énoncent alors :

$$\boxed{\xi_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_{\text{B}}}{dt}} \quad (\text{V.98})$$

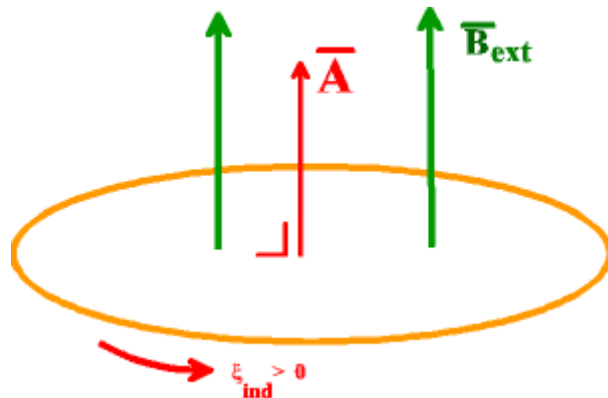


Figure V.70.

Dans le cas d'un bobinage de N spires, si le flux magnétique traversant chaque spire est le même, Φ_B , chaque spire est le siège d'une même f.é.m. induite donnée par la relation (98) et ces N f.é.m. induites, placées en série, s'ajoutent pour donner la f.é.m. induite aux extrémités du conducteur formant le bobinage :

$$\xi_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{V.99})$$

5.9.3 Les générateurs d'électricité

La principale application de la loi de Faraday est sans doute le générateur électrique ou [dynamo](#) ; il transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique. La figure V.71 illustre le schéma de principe d'un tel générateur.

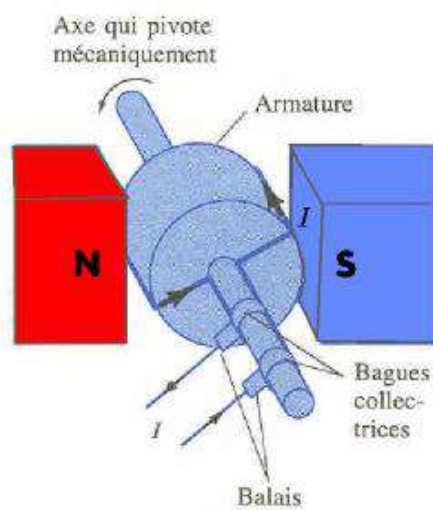


Figure V.71.

L'énergie mécanique fournie au générateur fait tourner son axe et entraîne dans sa rotation une spire de conducteur (plusieurs en réalité) qui se met à tourner entre les pôles d'un aimant. Il en résulte une variation du flux magnétique au travers de la spire et par conséquent une f.é.m. et un courant sont induits dans le conducteur. Ce courant est collecté vers un circuit extérieur par l'intermédiaire de deux bagues sur lesquelles sont fixées les extrémités du conducteur formant la spire, et deux balais qui établissent le contact avec le circuit extérieur.

La f.é.m. induite dans un tel générateur peut être calculée à l'aide de la loi de Faraday (98) :

$$\xi_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt} = - \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos \theta),$$

où B est l'intensité du champ magnétique uniforme créé par l'aimant, A est l'aire de la spire et θ l'angle entre \vec{B} et \vec{A} (voir figure V.72).

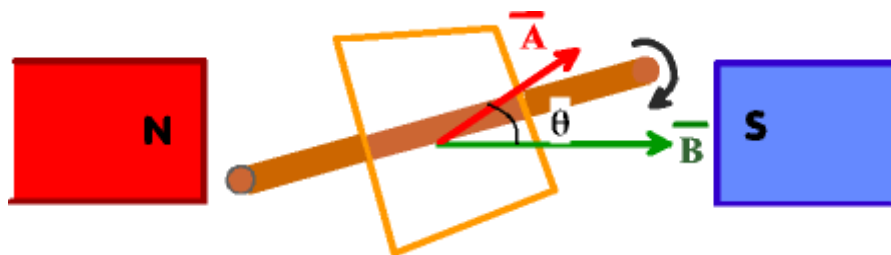


Figure V.72.

Si le pivot du générateur est tourné avec une vitesse angulaire constante, ω , on a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante.}$$

Donc

$$\theta = \omega t$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \xi_{\text{ind}} &= - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \frac{d \cos \theta}{dt}, \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont constants} \\ &= + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{B} \omega \sin(\omega t), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\xi_{\text{ind}} = \xi_0 \sin \omega t \tag{V.100}$$

On observe que la f.é.m. est une f.é.m. alternative qui varie de manière sinusoïdale avec le temps. Son amplitude vaut :

$$\xi_0 = \mathbf{A} \mathbf{B} \omega, \text{ dans le cas d'une seule spire}$$

et :

$$\xi_0 = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{B} \omega \text{ dans le cas d'un bobinage de } N \text{ spires} \tag{V.101}$$

Ce que nous venons de voir explique pourquoi le courant domestique et industriel sont, le plus souvent, alternatifs et sinusoïdaux : ils sont produits par la rotation de spires dans un aimant. Dans une centrale électrique située près d'un barrage, par exemple, c'est l'eau qui, en tombant, entraîne des turbines ; celles-ci font tourner l'axe des spires. Dans les éoliennes, c'est le vent qui fait tourner des pales et l'axe des spires ; la lampe d'une bicyclette est alimentée par une dynamo tournant grâce à la roue.

5.9.4 Force contre-électromotrice (f.c.é.m) des moteurs

A la section 5.8, nous avons vu le principe du moteur électrique : lorsqu'un courant parcourt un bobinage monté sur pivot dans un champ magnétique, ce bobinage est soumis à un couple de forces qui le fait tourner. Lorsque les spires du bobinage se mettent à pivoter dans le champ magnétique, elles sont le siège d'une f.é.m. induite, comme dans le cas d'un générateur électrique ; cette f.é.m. induite s'oppose à la f.é.m. extérieure qui provoque le courant qui fait tourner le moteur ; on l'appelle la force contre-électromotrice (f.c.é.m.). La f.c.é.m. est proportionnelle à la vitesse angulaire ω du moteur (voir relation (101)). Au démarrage, lorsque le moteur ne tourne pas encore, la f.c.é.m. est nulle et le courant est produit par la seule f.é.m. extérieure ; il est alors maximum. Le couple de forces intense qui en résulte met le moteur en marche ; il se met à tourner de plus en plus vite. La f.c.é.m. croît en conséquence, réduisant la f.é.m. effective et donc le courant dans le moteur :

$$f.\acute{e}.m.\text{eff.} = f.\acute{e}.m.\text{ext.} - f.c.\acute{e}.m.$$

$$I = f.\acute{e}.m.\text{eff.} / R$$

Le couple de forces est plus faible et la vitesse angulaire croît moins vite jusqu'à atteindre une valeur constante lorsque le couple de forces s'annule. Si le moteur ne fournit aucun travail, cette situation est atteinte lorsque la f.c.é.m. compense exactement la f.é.m. extérieure. Le courant est alors nul.

Lorsque le moteur effectue un travail mécanique, entraînant par exemple les couteaux d'un moulin à café, il est ralenti (les grains de café exercent sur le moteur un couple de forces qui s'oppose à sa rotation). La diminution de la vitesse angulaire entraîne une diminution de la f.c.é.m. et par conséquent la f.é.m. nette augmente, ainsi que le courant dans le moteur. La puissance électrique fournie à ce moment par la f.é.m. extérieure est convertie en puissance mécanique par le moteur qui effectue un travail. Si le travail à effectuer est trop important, la f.c.é.m. diminue encore, conduisant à un courant accru qui risque de faire griller le moteur.

En fait, lorsqu'un moteur ne fournit pas de travail, un faible courant le parcourt, même lorsqu'il a atteint sa vitesse de rotation constante. En effet, les forces de frottement sur l'axe du moteur et les pertes par effet Joule dans le circuit électrique le ralentissent de sorte que la f.c.é.m. est légèrement inférieure à la f.é.m. extérieure, conduisant à une faible f.é.m. nette et donc à un faible courant.

5.9.5 Transformateurs et transport de l'énergie électrique

Un transformateur est un appareil servant à augmenter ou à diminuer une tension alternative. La figure V.73 représente un transformateur simple constitué de deux bobines, enroulées sur un noyau de fer doux laminé qui les relie. La bobine primaire, reliée à la source qui fournit une f.é.m. ξ_p , comporte N_p spires, tandis que la bobine secondaire comporte N_s spires. La tension alternative ξ_p fait circuler dans le primaire un courant alternatif qui produit un flux magnétique variable ϕ_B dans chacune des spires.

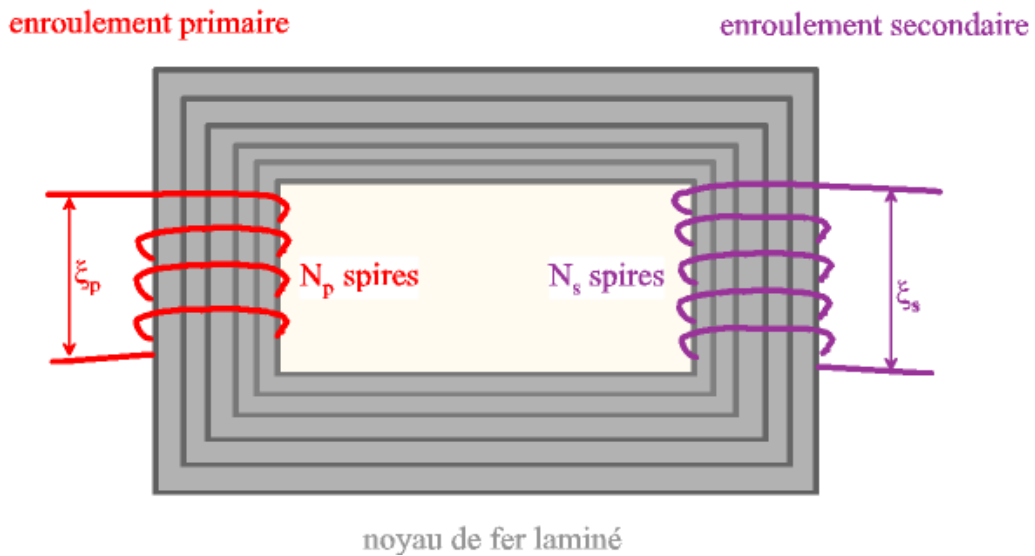


Figure V.73.

Le noyau de fer doux guide ce flux magnétique jusqu'aux spires de l'enroulement secondaire de sorte que d'après la loi de Faraday, une f.é.m. est induite aux bornes de l'enroulement secondaire :

$$\xi_s = -N_s \frac{d\phi_B}{dt} \quad (V.102)$$

De même, le flux magnétique variable induit une f.c.é.m. aux bornes de l'enroulement primaire :

$$-N_p \frac{d\phi_B}{dt}$$

La loi des mailles, appliquée au circuit primaire, nous dit que la f.é.m. fournie par la source, ξ_p égale la tension aux bornes de l'enroulement primaire :

$$\xi_p = -N_p \frac{d\phi_B}{dt} \quad (V.103)$$

En divisant les relations (102) et (103) membre à membre, on obtient :

$$\frac{\xi_s}{\xi_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad (V.104)$$

Le rapport des f.é.m. dans le primaire et dans le secondaire est égal au rapport de leur nombre de spires.

Lorsque N_s est supérieur à N_p , la tension du secondaire est supérieure à celle du primaire, on dit qu'on a un **transformateur élévateur de tension ou survolteur**. Dans le cas où N_s est inférieur à N_p , on parle de **transformateur abaisseur de tension ou dévolteur**.

Dans un schéma électrique, le transformateur est représenté par le symbole illustré à la figure V.74.

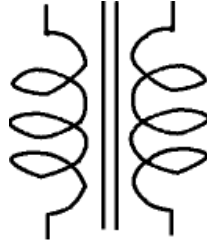


Figure V.74.

Si on branche une résistance R aux bornes du secondaire, il y circulera un courant I_s . Si le transformateur est idéal, il y aura transfert complet de puissance entre le primaire et le secondaire :

$$P_s = P_p,$$

et donc :

$$\xi_s I_s = \xi_p I_p, \quad (V.105)$$

où I_p est le courant dans le primaire. En combinant les relations (104) et (105), on obtient :

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} \quad (V.106)$$

Par conséquent, un transformateur élévateur de tension a pour effet de diminuer le courant dans le secondaire, tandis qu'un transformateur abaisseur de tension, augmente le courant.

C'est cette dernière propriété des transformateurs qui rend leur usage intéressant dans le transport de l'électricité depuis les centrales électriques vers les lieux d'utilisation. Au départ de la centrale la tension est élevée à l'aide d'un transformateur : le courant est transporté par des lignes à haute tension, typiquement quelques dizaines de milliers de volts. Le courant qui circule dans ces lignes à haute tension est par conséquent très faible, ce qui limite les pertes de puissance par effet Joule pendant le transport. Au voisinage des habitations, pour des raisons de sécurité notamment, un deuxième transformateur abaisse la tension, à une valeur efficace de 220 V au Burundi et dans les pays voisins.

5.9.6 Inductance et inducteurs

Un courant électrique produit un champ magnétique. Si le courant est variable, les variations de flux magnétique au travers du circuit lui-même (auto-induction) ou au travers d'un autre circuit situé à proximité (induction mutuelle) font apparaître, d'après la loi de Faraday, une f.é.m. induite.

5.9.6.1 Inductance Mutuelle

Lorsqu'on place deux bobines à proximité l'une de l'autre, comme sur la figure V.75, un courant variable I_1 circulant dans la première crée un champ magnétique variable \vec{B}_1 . Le flux variable de ce champ magnétique \vec{B}_1 au travers des spires du deuxième circuit, ϕ_{21} , induit une f.é.m., ξ_2 , aux bornes de ce deuxième circuit :

$$\xi_2 = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} \quad (V.107)$$

où N_2 est le nombre de spires du deuxième circuit.

Le flux total de B_1 au travers du deuxième circuit est proportionnel au courant I_1 qui le crée :

$$N_2 \Phi_{21} \propto I_1$$

On pose :

$$N_2 \Phi_{21} = M I_1, \quad (V.108)$$

où la constante de proportionnalité, M, est appelée inductance mutuelle (à ce stade, il faudrait écrire M_{21} mais on peut montrer que l'inductance mutuelle du circuit 2 sur le circuit 1, $M_{12} = M_{21} = M$).

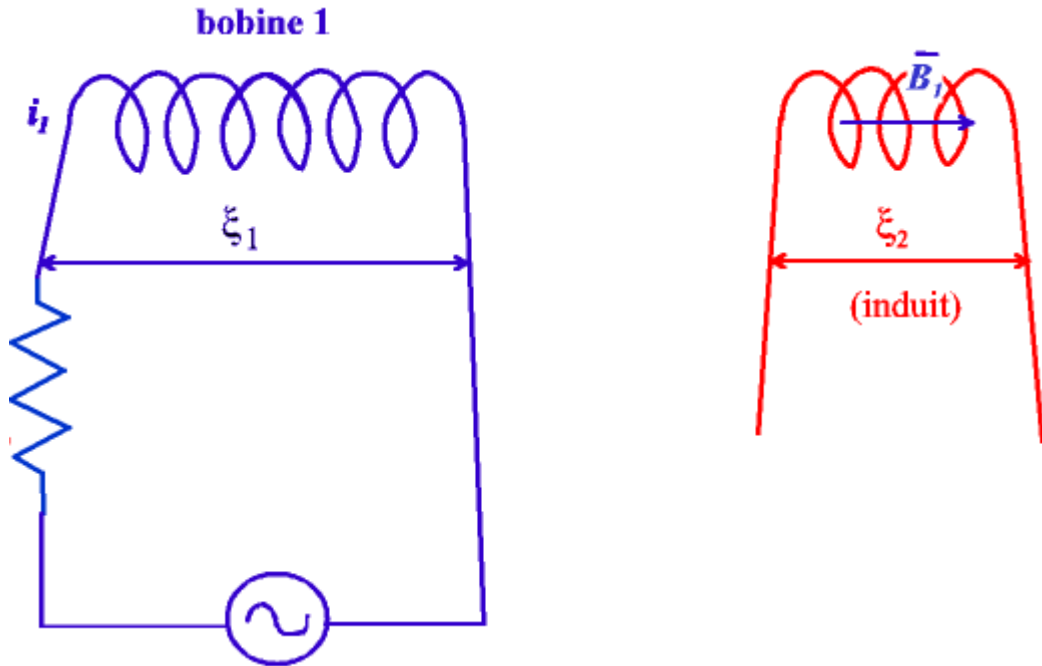


Figure V.75.

En combinant (107) et (108), on a :

$$\xi_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (V.109)$$

L'inductance mutuelle de deux circuits dépend de leurs dimensions, de leur forme géométrique et de leurs positions relatives ; elle est indépendante des courants qui circulent dans les deux circuits. La relation (109) a l'avantage de relier directement l'effet, la f.é.m. induite, à la cause, la variation de courant qui se mesure plus directement qu'une variation de flux.

5.9.6.2 Auto-inductance

De même, le courant variable qui circule dans un circuit, provoque un flux magnétique variable au travers de celui-ci et donc une f.é.m. induite :

$$\xi_1 = -N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt}, \quad (V.110)$$

et :

$$N_1 \Phi_{11} = L I_1, \quad (V.111)$$

où la constante de proportionnalité L est appelée auto-inductance. En combinant (110) et (111), on a :

$$\xi_1 = -L \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{V.112})$$

L'auto-inductance d'un circuit dépend de ses dimensions et de sa forme géométrique. Elle est indépendante du courant qui circule dans le circuit et permet de relier directement la f.é.m. induite à la variation de ce courant.

L'unité SI d'inductance, que ce soit pour l'inductance mutuelle ou pour l'auto-inductance, est le henry (H). Les relations (108) et (111) montrent que l'inductance est un flux par unité de courant. Une inductance de un henry correspond au cas où un courant d'un ampère crée un flux magnétique d'un wéber :

$$1 \text{ H} \equiv 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ V.s/A} \quad (\text{V.113})$$

5.9.6.3 Inducteur

On appelle inducteur un élément de circuit ayant une auto-inductance non négligeable ; il s'agit en général d'une bobine. Dans un schéma, l'inducteur se représente par le symbole :



5.9.7 Energie emmagasinée dans un inducteur

Lorsqu'un élément de circuit d'inductance L est parcouru par un courant variable I , il reçoit de l'énergie à un taux :

$$P = I\xi = -LI \frac{dI}{dt},$$

en utilisant la relation (112). Pour calculer le travail requis pour faire croître le courant dans un inducteur de zéro à I , on calcule le travail infinitésimal effectué pendant un temps dt , pour faire passer le courant de I à $I + dI$:

$$dW = P dt = LI dI$$

Pour trouver le travail total, on intègre l'expression ci-dessus de zéro à la valeur finale du courant :

$$W = \int dW = \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2} LI^2.$$

Ce travail correspond à l'énergie U emmagasinée à l'intérieur de l'inducteur transportant un courant I , en posant $U = 0$, lorsque $I = 0$:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{V.114})$$

5.9.8 Circuits RL

Tout inducteur offre une certaine résistance au courant. On le représente généralement comme un inducteur idéal, de résistance nulle, en série avec une résistance R. Une résistance peut aussi être mise en série avec un inducteur. Dans les deux cas on se retrouve dans la situation schématisée à la figure V.76.

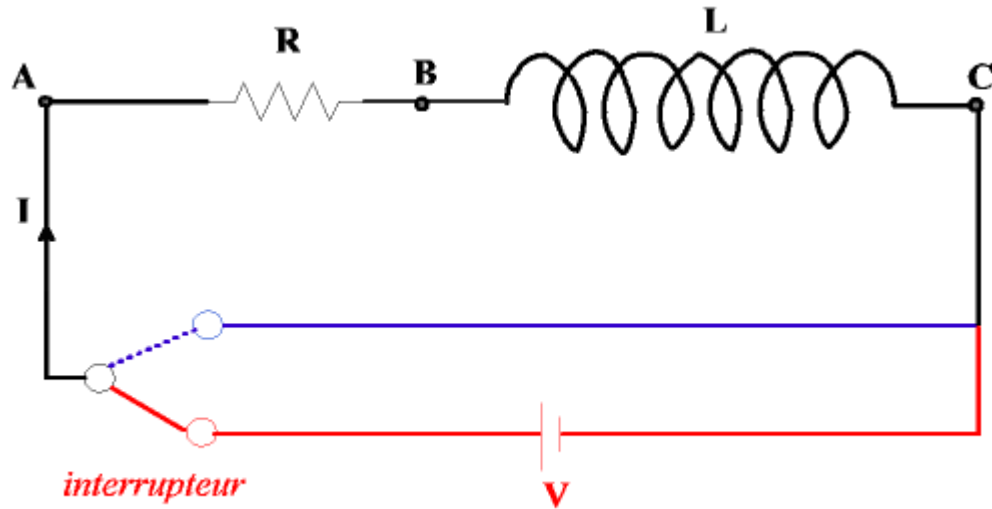


Figure V.76.

Que se passe-t-il lorsqu'on alimente soudainement une telle combinaison avec une pile fournissant une différence de potentiel V (circuit rouge de la figure V.76). A l'instant $t = 0$, où on ferme l'interrupteur, le courant qui était nul tend à s'établir. Il y a donc une variation de courant ; celle-ci produit donc une f.é.m.

induite aux bornes de l'inducteur : $V_{CB} = -L \frac{dI}{dt}$ (voir relation 112), qui s'oppose à celle de la pile qui produit le courant. La différence de potentiel aux bornes de la résistance est donnée par la loi d'Ohm : $V_{AB} = RI$. En appliquant la loi des mailles (2^{ème} loi de Kirchhoff) à ce circuit, on a :

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (V.115)$$

L'équation différentielle ci-dessus montre que tant que le courant varie, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est inférieure à celle de la pile et le courant est inférieur à la valeur finale maximum I_{\max} telle que :

$$V = R I_{\max}$$

Une fois cette valeur maximum atteinte, le courant est continu ($dI = 0$), la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est nulle. Le rôle de l'inducteur est donc de retarder l'établissement du courant $I_{\max} = V/R$ qui s'établirait immédiatement en l'absence d'inducteur. Une fois la valeur I_{\max} atteinte, l'inducteur n'a plus d'effet, le courant étant continu.

Pour vérifier cela, résolvons l'équation (115), en séparant les variables t et I :

$$\frac{dI}{V - IR} = \frac{dt}{L}$$

et en intégrant :

$$\int_0^I \frac{dI'}{V - I'R} = \int_0^t \frac{dt}{L},$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{R} \ln\left(\frac{V - IR}{V}\right) = \frac{t}{L},$$

ou encore, en posant $\tau = L/R$:

$$\boxed{I = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau})} \quad (V.116)$$

La dépendance de I en fonction du temps obtenue ci-dessus est illustrée à la figure V.77.a. Elle montre que le courant tend effectivement vers $I_{\max} = V/R$, lorsque t tend vers l'infini. La constante de temps $\tau = L/R$, joue le même rôle que la constante de temps $\tau = RC$ dans les circuits RC : au bout d'un temps $t = L/R$, le courant atteint 63% de sa valeur maximum.

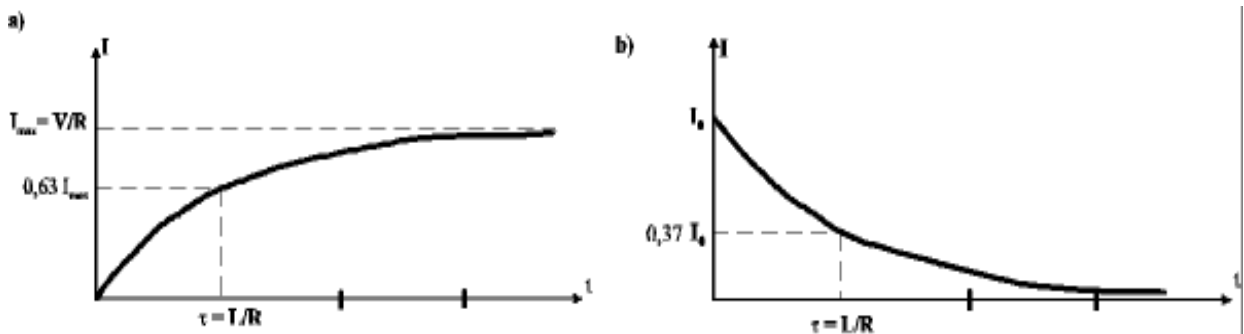


Figure V.77.

Lorsqu'on fait basculer l'interrupteur de la figure V.76, on obtient le circuit bleu dans lequel la pile a été soudainement retirée. A cet instant initial, $t = 0$, $I = I_0$ et la loi des mailles donne (115 avec $V = 0$) :

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (V.117)$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient :

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt,$$

ce qui donne :

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t,$$

ou encore :

$$\boxed{I = I_0 e^{-t/\tau}}, \quad (V.118)$$

où $\tau = L/R$ désigne à nouveau la constante de temps du circuit. La relation (118) est illustrée à la figure V.77.b. On voit que le courant tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Au bout d'un temps $t = L/R$, il n'a déjà plus que 37% de sa valeur initiale. A nouveau le rôle de l'inducteur est de retarder la suppression du courant qui serait immédiate si on retirait la pile dans un circuit où seule se trouve une résistance.

5.9.9 Circuits LC et oscillations électromagnétiques

Après avoir étudié les circuits RC et RL, voyons ce qui peut se produire dans un circuit idéal, où on peut négliger toute résistance et où seuls se trouvent un condensateur de capacitance C et un inducteur d'inductance L (voir 107).

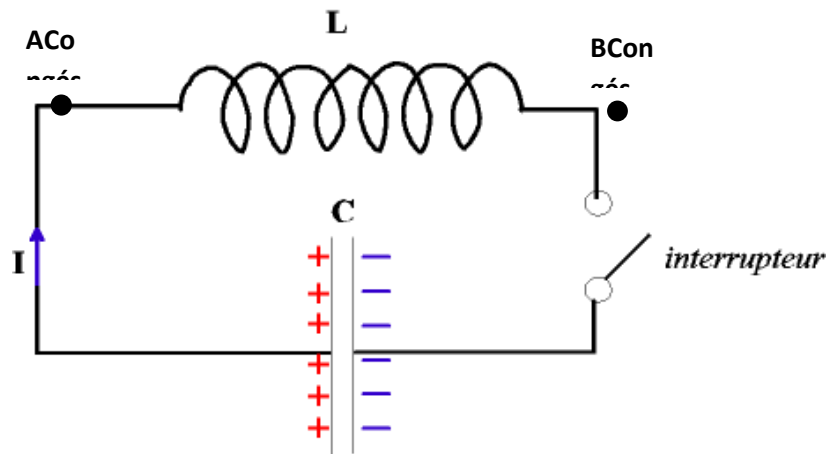


Figure V.78.

Supposons que le condensateur soit initialement chargé et que ses armatures portent une charge Q_0 à l'instant $t = 0$ où on ferme l'interrupteur. Le courant qui était nul tend à s'établir dans le sens indiqué sur la figure. Il y a donc une variation de courant qui produit une f.é.m. induite aux bornes de l'inducteur :

$V_{BA} = -L \frac{dI}{dt}$, qui s'oppose à celle de la source de courant, ici, le condensateur chargé. En appliquant la loi des mailles au circuit fermé, on a :

$$\frac{Q}{C} = L \frac{dI}{dt} \quad (V.119)$$

Le courant est donné par $I = -\frac{dQ}{dt}$ car le courant I qui s'écoule de la plaque positive du condensateur vers la plaque négative (voir figure V.78) fait décroître la charge du condensateur : $dQ < 0$. Le signe moins permet d'obtenir $I > 0$, comme il se doit. Dès lors, en remplaçant dans 119, on obtient :

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (V.120)$$

En dérivant deux fois et en remplaçant dans l'équation ci-dessus, on peut vérifier aisément que :

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (V.121)$$

est une solution de cette équation, pour :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad (V.122)$$

ω est appelée fréquence angulaire, Q_0 est l'amplitude et ϕ la phase. Ces deux dernières constantes sont fixées par les conditions initiales. Le courant est obtenu en dérivant l'expression (121) :

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (V.123)$$

Les variations de Q et de I en fonction du temps, données par les expressions (121) et (123), sont illustrées à la figure V.79 dans le cas où la phase ϕ est nulle.

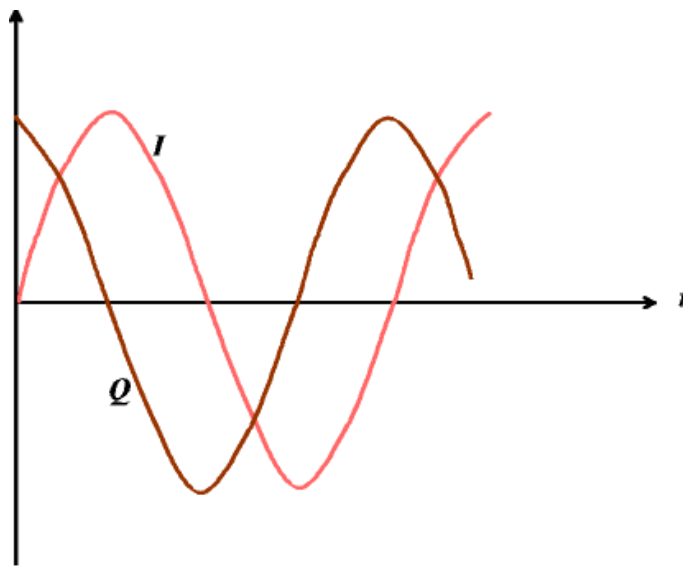


Figure V.79.

On voit que les deux variables oscillent entre leur valeur maximum, $+Q_0$ pour la charge, $I_0 = \omega Q_0$, pour le courant et leur valeur minimum, $-Q_0$ et $-I_0$ respectivement. Elles oscillent à la même fréquence :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (V.124)$$

mais sont déphasées d'un angle $\frac{\pi}{2}$: le courant s'annule lorsque la charge passe par un extrémum ; la charge s'annule lorsque le courant passe par un extrémum.

Ces expressions, (121) et (123), traduisent l'oscillation de la charge Q_0 d'une armature à l'autre du condensateur, au travers de l'inducteur. Au moment où dans la situation illustrée à la figure V.78, on ferme l'interrupteur, l'armature de gauche porte une charge $+Q_0$, celle de droite, $-Q_0$; le courant initialement nul se met à croître dans le sens positif indiqué par la flèche et le condensateur se décharge progressivement. Lorsqu'il est totalement déchargé, le courant a atteint sa valeur maximum, I_0 et continue de faire passer des charges positives de l'armature de gauche à celle de droite. Il se met à décroître et s'annule lorsque c'est l'armature de droite cette fois qui porte une charge $+Q_0$ et celle de gauche une charge $-Q_0$. Ensuite

les charges positives repartent en sens opposé, vers l'armature de gauche et le courant devient négatif, puisqu'en sens inverse de la flèche sur la figure V.78.

Ces oscillations de la charge d'une armature à l'autre du condensateur correspondent à un transfert de l'énergie emmagasinée dans le condensateur, $U_C = \frac{1}{2} Q^2 / C$, à celle contenue dans l'inducteur, $U_L = \frac{1}{2} LI^2$ et réciproquement. L'énergie totale à chaque instant est conservée :

$$U_{\text{tot}} = U_C + U_L$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{Q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)}{C} + L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) \right].$$

En remplaçant $\omega^2 = 1/LC$ et en mettant en évidence, on obtient :

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) \right].$$

Donc :

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (\text{V.125})$$

C'est l'énergie totale initiale entièrement stockée dans le condensateur, le courant étant nul à cet instant. Lorsque le condensateur est déchargé et que le courant est maximum (dans un sens ou dans l'autre), toute l'énergie se retrouve dans l'inducteur. Ces oscillations de l'énergie entre le condensateur et l'inducteur sont illustrées à la figure V.80.

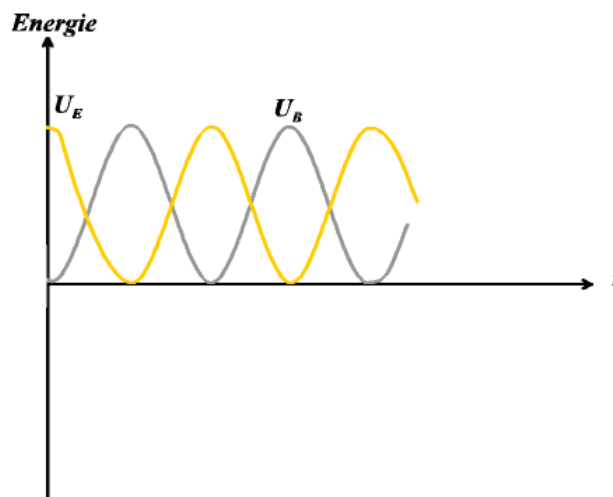
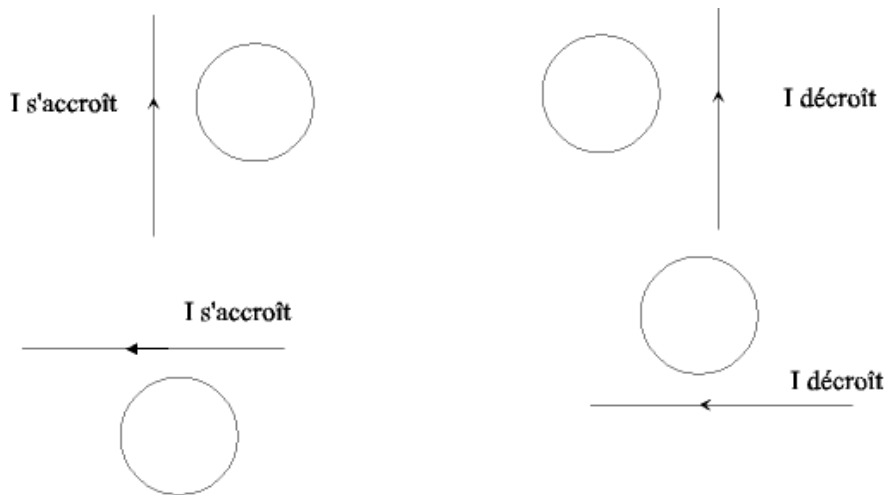


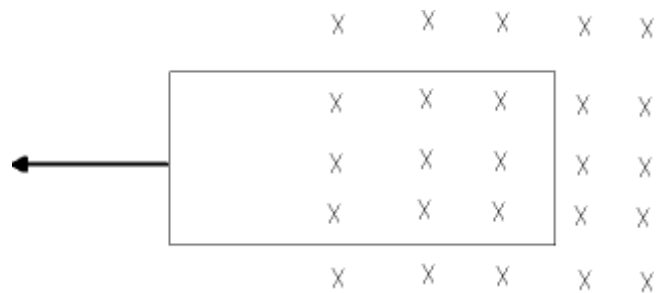
Figure V.80.

5.9.10 Exercices

1. Donnez le sens du courant induit dans chacune des boucles circulaires ci-dessous sachant qu'il est attribuable au courant indiqué dans chaque partie du schéma.

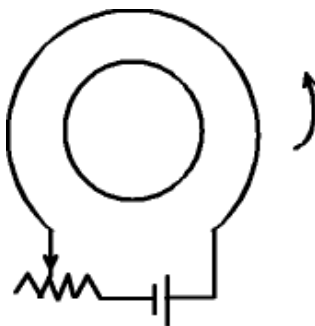


2. On tire la boucle de conducteur rectangulaire, représentée ci-dessous, vers la gauche, hors du champ magnétique uniforme et constant qui s'oriente vers l'intérieur de la page :



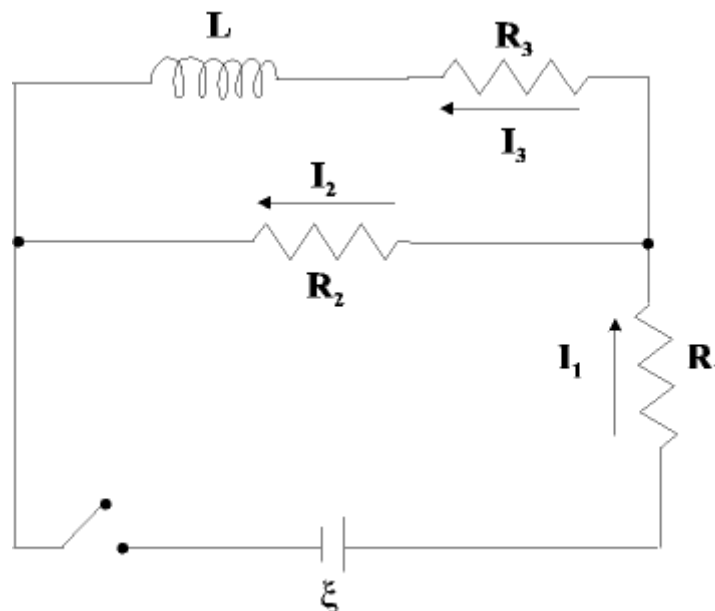
Déterminez le sens dans lequel y circule le courant induit. (R : sens horlogique).

3. En supposant qu'on accroît lentement la valeur de la résistance de la figure, déterminez la direction du courant induit dans la petite boucle circulaire placée à l'intérieur de la grande boucle. (R : sens trigonométrique).



4. Une boucle de fil circulaire de 10 cm de rayon a une résistance de 150Ω . Au départ, elle se trouve à l'intérieur d'un champ magnétique d'une intensité de 0,40 T, dans un plan perpendiculaire à \vec{B} , mais on l'en retire en 100 ms. Calculez l'énergie électrique dissipée au cours de cette opération. ($R = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ J}$).

5. Le flux magnétique qui traverse chacune des 60 spires d'une bobine correspond à : $(8,8t - 0,51t^3) \times 10^{-2} \text{ T.m}^2$, où le temps t est donné en secondes. Déterminez : a) la f.é.m. ξ en fonction du temps et b) sa valeur à $t = 1,0 \text{ s}$ et à $t = 5,0 \text{ s}$.
(R : a) $(-5,3 + 0,92t^2) \text{ V}$; b) $-4,4 \text{ V}$ à $t = 1,0 \text{ s}$ et $+18 \text{ V}$ à $t = 5,0 \text{ s}$).
6. La f.c.é.m. d'un moteur vaut 80 V lorsqu'il tourne à 1200 r/min . Déterminez sa valeur à 1800 r/min si le champ magnétique ne varie pas. (R : 120 V).
7. Un transformateur survolteur augmente une tension de 80 V jusqu'à 240 V . Déterminez le rapport entre les courants qui parcourent les enroulements secondaire et primaire, en supposant une efficacité de 100% . (R : $1/3$).
8. Quand on applique une tension de 120 V à un transformateur comportant 1800 spires d'enroulement primaire et 120 spires d'enroulement secondaire, il produit un courant de $8,0 \text{ A}$. Déterminez la tension aux bornes du secondaire et le courant qui parcourt le primaire. (R : 8 V ; $0,53 \text{ A}$).
9. Déterminez la f.é.m. induite lorsque le courant qui parcourt une bobine de 180 mH varie de façon constante de $20,0 \text{ mA}$ à $28,0 \text{ mA}$ en 240 ms . (R : $6,0 \times 10^{-3} \text{ V}$).
10. Dans un circuit RL, le courant met $1,56 \text{ ms}$ à augmenter de zéro à la moitié de sa valeur maximale. Déterminez a) la constante de temps du circuit et b) sa résistance lorsque $L = 310 \text{ H}$. (R : a) $2,25 \text{ ms}$; b) $1,38 \times 10^5 \Omega$).
11. Pour le circuit de la figure ci-dessous, déterminez le courant qui parcourt chaque résistance (I_1, I_2, I_3) a) au moment où on ferme l'interrupteur et b) longtemps après cette fermeture. En supposant qu'au bout d'un long intervalle de temps, on ouvre à nouveau l'interrupteur, déterminez l'intensité du courant dans chaque résistance c) immédiatement après l'ouverture du circuit et d) longtemps après.



12. On charge un condensateur d'une capacité de 660 pF jusqu'à une tension de 100 V puis on le branche rapidement à un inducteur de 75 mH . Déterminez a) la fréquence d'oscillation de ce circuit, b) la valeur maximale du courant qui y circule et c) l'énergie maximale emmagasinée dans le champ magnétique de l'inducteur.

Fiche signalétique

| | |
|-------------------------------------|--|
| Objectifs en termes de compétences: | <p>1. Objectif de formation. Inculquer aux étudiants une démarche scientifique et un mode de pensée critique, l'accent étant mis sur l'interaction entre l'approche théorique étudiée lors du cours et pratiquée dans les exercices.</p> <p>2. Objectif d'information. On donne à l'étudiant les éléments nécessaires à la compréhension des matières scientifiques au cours de ses études. Le cours aborde les différents aspects d'un cours de Physique classique avec des références régulières, par le biais des applications, aux sciences de la vie.</p> |
| Volume horaire | Cours magistral (30 h), TD (15 h) |
| Contenu du cours : | Vecteurs. Cinématique. Dynamique (lois de Newton ; quantité de mouvement ; mouvement circulaire ; frottements). Gravitation (loi de Newton). Travail – Puissance – Energie (énergie cinétique et potentielle ; conservation de l'énergie mécanique). Statique et dynamique des fluides. Force électrostatique, champ électrique, potentiel électrique. Courant électrique. Magnétisme. Induction électromagnétique. Courants alternatifs. |
| Méthode d'enseignement : | <ul style="list-style-type: none"> - L'exposé se fait à l'aide des supports multimédia avec explications supplémentaires au tableau. Il aborde les concepts fondamentaux de la Physique en les illustrant par des applications concrètes dans différents contextes. L'étudiant ayant préalablement lu les notes de cours du jour. - Les exercices jouent un rôle essentiel. |
| Organisation des travaux dirigés : | <ul style="list-style-type: none"> - Les séances d'exercices sont obligatoires - La préparation de ces séances est exigée - Pour les exercices, l'étudiant reçoit une liste de problèmes qu'il doit tenter de résoudre pour la séance prochaine. Il est susceptible d'être appelé à exposer au tableau l'un des problèmes proposés. |
| Evaluation : | Evaluation continue (40 %) et examen final (60 %) par écrit : des questions sur la partie théorique sont posées et la résolution des problèmes est demandée, le tout couvrant l'ensemble de toute la matière vue au cours. |
| Pré-requis : | Bases mathématiques (les notions de dérivées et intégrales d'une fonction doivent être vues). |
| Ouvrages de référence | <ol style="list-style-type: none"> 1. Kane J., Sternheim M., Physique, Cours, QCM, exemples et 1900 exercices corrigés, 3^{ème} édition, nouveau tirage corrigé, Paris, Dunod 2006. 2. Hecht E., Physique, 1^{ère} édition, 4^{ème} tirage, De Boeck Université, Bruxelles 2004. |